Funções e álgebra no ensino secundário[1]

NCTM, *EUA*

No 9º ao 12º ano de escolaridade todos os estudantes devem:

1. Compreender regularidades, relações, e funções:

- generalizar regularidades usando funções definidas explicitamente recursivamente;
- compreender relações e funções e seleccionar, converter e usar várias representações destes objectos matemáticos;
- analisar funções de uma variável investigando taxas de mudança, intersecções com os eixos, zeros, assímptotas, e o comportamento local e global;
- compreender e executar transformações tais como combinação aritmética, composição e inversão de funções usuais, usando a tecnologia para executar tais operações em expressões simbólicas mais complicadas;
- compreender e comparar as propriedades das classes das funções, incluindo funções exponenciais, polinomiais, racionais, logarítmicas, e periódicas;
- interpretar representações das funções de duas variáveis.

2. Representar e analisar situações matemáticas e estruturas usando símbolos algébricos:

- compreender o significado de formas equivalentes das expressões, equações, desigualdades e relações;
- escrever formas equivalentes das equações, desigualdades e sistemas das equações e resolvê-las fluentemente – mentalmente ou com papel e lápis em casos simples e usando tecnologia em todos os casos;
- usar álgebra simbólica para representar e explicar relações matemáticas;
- usar uma variedade de representações simbólicas, incluindo equações recorrentes e paramétricas, para funções e relações;
- julgar o significado, a utilidade, e a razoabilidade dos resultados das manipulações simbólicas, incluindo as realizadas pela tecnologia.

3. Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas:

- identificar as relações quantitativas essenciais numa situação e determinar a classe ou classes das funções que puderam modelar essas relações;
- usar expressões simbólicas, incluindo formas iterativas e de recorrência, para representar as relações que surgem em vários contextos;
- tirar conclusões razoáveis sobre uma situação que está sendo modelada.

4. Analisar a mudança em vários contextos:

- aproximar e interpretar taxas de mudança de gráficos e dados numéricos.

---

[1] Tradução do *Algebra standard*, extracto dos *Principles and standards for school mathematics*, do NCTM (2000, pp. 296-306). Reston, VA: NCTM. De notar que este texto retoma a perspectiva clássica, que inclui os estudo das Funções como parte da Álgebra.

Funções e álgebra

Na visão da Matemática escolar destes *Standards*, os estudantes do 3º ciclo[2] aprenderão que as regularidades podem ser representadas e analisadas matematicamente. No 9º ano, terão representado funções lineares com tabelas, gráficos, regras verbais e simbólicas e terão trabalhado e interpretado estas representações. Terão explorado também algumas relações não-lineares.

Na escola secundária[3], os estudantes devem ter oportunidades de se apoiar nestas experiências, aprofundando sua compreensão das relações e das funções e expandindo o seu repertório de funções familiares. Os estudantes devem usar ferramentas tecnológicas para representar e estudar o comportamento de funções polinomiais, exponenciais, racionais, e periódicas, entre outras. Aprenderão combinar funções, expressá-las em formas equivalentes, compô-las e invertê-las quando possível. À medida que o fazem, virão a compreender o conceito de uma classe das funções e aprender a reconhecer as características de várias classes.

A álgebra na escola secundária também deve proporcionar aos estudantes compreensão da abstracção e estrutura matemática. No 9º ao 12º ano de escolaridade, os estudantes devem desenvolver uma compreensão das propriedades algébricas que governam a manipulação dos símbolos nas expressões, equações e inequações. Devem tornar-se fluentes em executar tais manipulações pelos meios apropriados – mentalmente, à mão ou com a máquina – para resolver equações e inequações, para gerar formas equivalentes das expressões ou funções, ou para provar resultados gerais.

A classe mais alargada das funções disponíveis aos estudantes da escola secundária para a criação de modelos matemáticos deve fornecer-lhes meios versáteis e poderosos para analisar e descrever seu mundo. Com utilidades para a manipulação de símbolos, representação gráfica e ajustamento de curvas e com *software* e folhas de cálculo programáveis para representar processos iterativos, os estudantes podem modelar e analisar um conjunto de fenómenos alargado. Estas ferramentas matemáticas podem ajudar os estudantes a desenvolver uma compreensão mais profunda dos fenómenos reais. Ao mesmo tempo, trabalhar em contextos reais pode ajudar os estudantes a entender o sentido dos conceitos matemáticos subjacentes e pode promover uma apreciação desses mesmos conceitos.

---

[2] No original em inglês, *middle school.*
[3] No original em inglês, *high school.*

Compreender regularidades, relações e funções

As experiências em álgebra dos estudantes da escola secundária devem permiti-lhes criar e usar representações tabulares, simbólicas, gráficas e verbais e analisar e compreender regularidades, relações e funções com mais sofisticação do que no 3º ciclo. Ajudando os estudantes da escola secundária a aprender sobre as características de classes particulares das funções, os professores podem considerar útil comparar e contrastar situações modeladas por funções de várias classes. Por exemplo, as funções que modelam as características essenciais das situações na figura 7.4 são completamente diferentes uma da outra. Os estudantes devem poder expressá-las usando tabelas, gráficos e símbolos.

Situação 1: Em Fevereiro de 2000 o custo adicional de enviar uma carta em correio azul era 33 cêntimos para a primeira onça[4] e 22 cêntimos adicionais para cada onça ou parcela até 13 onças.

Número de onças	1	2	3	4	5	...	P
Custo em cêntimos	33	33+22	33+2,22	33+3,22	33+4,22	...	33+(P – 1)22

Situação 2: Durante 1999 a população do mundo chegou a 6 bilhões. A taxa de crescimento média prevista é de 2 por cento por ano.

Situação 3: Uma tabela de dados dá o número dos minutos da luz do dia em Chicago, Illinois, do dia 1 de Janeiro ao dia 30 de Dezembro 2000.

551, 553, 555, 557, 559, 562, 565, 568, 571, 575, 579, 582, 586, 591, 595, 599, 604, 609, 614, 619, 624, 629, 634, 639, 644, 650, 655, 661, 666, 672, 677, 683, 689, 694, 700, 706, 711, 717, 723, 728, 734, 740, 745, 751, 757, 762, 768, 773, 779, 785, 790, 796, 801, 806, 812, 817, 822, 827, 832, 837, 842, 847, 852, 856, 861, 865, 870, 874, 878, 881, 885, 889, 892. 895. 898, 901, 903, 905, 907, 909, 911, 912, 913, 914, 9141 914, 914, 914, 914, 913. 912, 911 909, 907, 905, 903, 901, 898, 895, 892, 889, 885, 882, 878, 874, 870, 866, 861, 857, 852, 848, 843, 838, 833, 828, 823, 818, 813. 807, 802, 797, 791, 786, 781, 775, 770, 764, 758, 753, 747, 742, 736, 731, 725, 719, 714, 708, 703, 697, 691, 686, 680, 675, 669, 664. 658, 653, 648, 642, 637, 632, 627, 622, 617, 612, 607, 603, 598, 594, 590, 585, 581, 578, 574, 571. 567, 564, 561, 559, 557, 554, 553, 551, 550, 549, 548, 547, 547, 547, 548, 548, 549, 550

Figura 7.4 – Três situações que podem ser modeladas por funções de diferentes classes

[4] Uma onça corresponde a 28,35 gramas.

Para a primeira situação, os estudantes puderam começar gerando uma tabela de valores. Se C for o custo em centavos de enviar uma carta e P for o peso da carta em onças, então a função $C = 33 + 22(P - 1)$ descreve C em função de P para valores inteiros positivos de P até 13. Os estudantes devem compreender que esta situação tem algumas propriedades lineares. Para valores reais de P, os pontos no gráfico de $C = 33 + 22(P - 1)$ situam-se numa linha e a taxa de variação é constante a 22 cêntimos por onça. Contudo, o custo real do porte postal e a função linear só concordam em valores inteiros positivos de P. Os estudantes devem entender que o gráfico do custo postal como função do peso é uma função em escada, como se vê na figura 7.5.

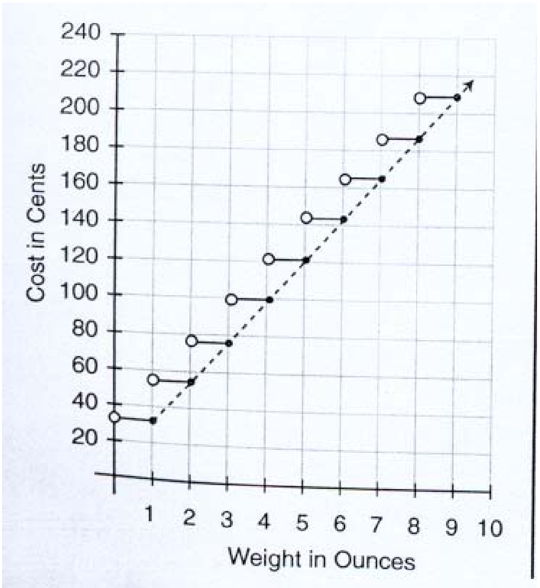


Figura 7.5 – Uma comparação das funções em escada e linear

Para a segunda situação descrita na figura 7.4, os professores poderiam incentivar os estudantes a encontrar uma expressão geral para a função e notar como a sua forma difere da função em escada que descreve o custo postal. Alguns estudantes podem gerar uma definição iterativa ou recursiva para a função, usando a população de um dado ano (AGORA) determinar a população do ano seguinte (SEGUINTE):

SEGUINTE = (1,02) * AGORA, começo em 6 bilhões

(Ver a discussão de equações AGORA-SEGUINTE na secção "Representação" do capítulo 6) Além disso, os estudantes devem ser capazes de reconhecer que esta situação pode ser representada explicitamente pela função exponencial $f(n) = 6(1.02)^n$, onde $f(n)$ é a população em bilhões e n é o número de anos desde 1999. Uma discussão sobre se esta fórmula é indefinidamente um bom modelo ajudaria os estudantes ver as limitações de modelos matemáticos.

Para a terceira situação, os estudantes podem começar por representar graficamente os dados fornecidos. Ajudá-los-á saber que em toda parte na Terra excepto no Equador, o período da luz solar durante o dia aumenta seis meses do ano e diminui nos outros seis. A partir do gráfico, devem poder ver que o aumento diário na luz do dia não é constante na primeira metade do ano e que a diminuição na segunda metade do ano também não é constante. Poderia pedir-se aos estudantes para encontrar uma função que modelasse bem os dados. O professor poderia dizer-lhes que a duração da luz do dia pode certamente ser modelada por uma função da forma $T(t) = T_{\text{ave}} + T_A\,(\theta)\text{sen}(\omega t + \varphi)$, onde t é medido em meses, T_{ave} = o tempo médio de luz do dia = 12 horas; $T_A(\theta)$ = amplitude, dependendo da latitude θ (mudança de sinal no equador); ω = frequência = $2\pi/12$, e φ = fase (dependendo da escolha do tempo inicial t_0). Os estudantes verão tais fórmulas na disciplina de Física e precisam de compreender que elas expressam modelos de fenómenos físicos. É também importante notar que os parâmetros nas equações físicas têm unidades.

Após ter explorado e modelado as três situações, uma por uma, os estudantes poderiam ser chamados a comparar as situações. Por exemplo, poderia ser-lhes pedido para encontrar as características comuns a duas ou mais das funções. Alguns estudantes podem notar que, nos intervalos dados, a primeira função não decresce, a segunda cresce estritamente e a terceira aumenta e diminui. Os estudantes necessitam ser sensíveis aos factos de que funções que são crescentes num certo intervalo não permanecem necessariamente crescentes em todo o lado e que funções crescentes podem ter diferentes taxas de crescimento, como ilustram estes três exemplos.

Poderia pedir-se aos estudantes para considerarem as vantagens e as desvantagens das diferentes maneiras de representar as três funções. O professor deve ajudar os estudantes a compreender que, dependendo do que se quer saber, diferentes representações destas funções podem ser mais ou mais menos úteis. Por exemplo, no primeiro caso, uma tabela pode ser a maneira mais conveniente de representar inicialmente a função do porte postal. O mesmo pode acontecer no terceiro exemplo se o objectivo for determinar rapidamente quanta luz solar haverá num dado dia. Apesar da comodidade de se poder ler um valor directamente, contudo, a tabela pode obscurecer a periodicidade do fenómeno. A periodicidade torna-se visível quando a função é representada gráfica ou simbolicamente. De modo semelhante, embora os estudantes possam primeiro criar tabelas quando lhes for apresentada a segunda situação, as representações gráficas e simbólicas da função exponencial podem ajudar os estudantes a desenvolver uma melhor compreensão da natureza do crescimento exponencial.

Os estudantes da escola secundária devem ter uma substancial experiência na exploração das propriedades das diferentes classes de funções. Por exemplo, devem aprender que a função $f(x) = x^2 - 2x - 3$ é quadrática, ou seja, que o seu gráfico é uma parábola e que este gráfico abre para "cima" porque o coeficiente principal é positivo. Devem também aprender que algumas equações quadráticas não têm raízes reais e que esta propriedade corresponde ao facto que os seus gráficos não atravessam o eixo dos *xx*. E devem ser capazes de identificar as raízes complexas dessas funções quadráticas.

Além disso, os estudantes devem aprender reconhecer como os valores dos parâmetros definem a forma dos gráficos das funções de uma classe. Com acesso a sistemas de álgebra simbólica (CAS) – *software* num computador ou calculadora que realiza manipulação de expressões e equações simbólicas e que pode calcular ou aproximar valores de funções ou soluções de equações e pode representar graficamente funções e as relações – os estudantes podem facilmente explorar os efeitos das mudanças em parâmetros como meio de compreender melhor as classes funções. Por exemplo, explorações com funções da forma $y = ax^2 + bx + c$ conduz a alguns resultados interessantes. As consequências das mudanças nos parâmetros a e c nos gráficos das funções são relativamente fáceis de observar. As mudanças em b não são tão óbvias: mudando b resulta numa translação da parábola ao longo de uma linha não vertical. Além disso, o traço dos vértices das parábolas que se formam à medida que b varia forma igualmente uma parábola. Explorando funções na forma

$$f(x) = a(x - b)^2 + b(x - h) + c$$

e ver como seus gráficos mudam à medida que h varia também fornece uma base para compreender transformações e mudanças de coordenadas.

Enquanto os estudantes da escola secundária estudam diversas classes das funções e se tornam familiares com as propriedades de cada uma, devem começar a ver que classificar funções como linear, quadrática ou exponencial faz sentido porque as funções em cada uma destas classes partilham atributos importantes. Muitos destes atributos são propriedades globais das funções. Considere-se, por exemplo, os gráficos das três funções exponenciais na forma $f(x) = a\,b^x + c$, com $a > 0$ e $b > 1$, dado na figura 7.6.

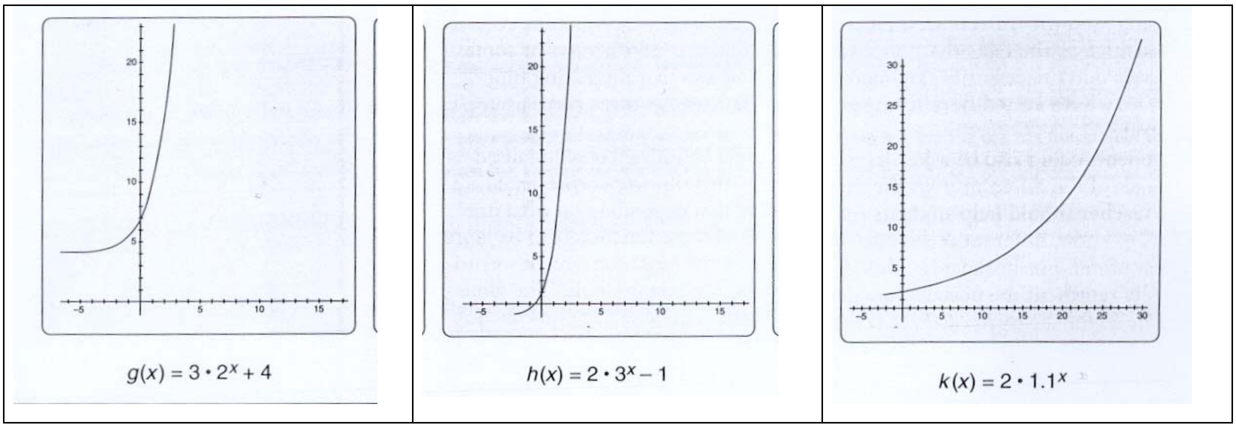


Figura 7.6. Gráficos de funções exponenciais na forma $f(x) = a\, b^x + c$

Para ajudar a estudantes observar e descrever características destas três funções, os professores podem perguntar, “O que acontece a cada uma destas funções para valores positivos grandes de *x*? Para valores negativos grandes de *x*? Onde cruzam o eixo dos *yy*?” Um estudante pode notar que os valores de cada função aumentam rapidamente para valores positivos grandes de *x*. Um outro estudante pode indicar que intersecção com o eixo dos *yy* de cada gráfico parece ser $a + c$. O professor deve então encorajar os estudantes explorar o que acontece nos casos onde $a < 0$ ou $0 < b < 1$. Os estudantes devem perceber que mudar o sinal de *a* fará reflectir o gráfico por uma linha horizontal, enquanto que mudar *b* e $1/b$ reflectirá o gráfico sobre o eixo dos *yy*. Os gráficos terão sempre a mesma forma. Este tipo de exploração para ajudar os estudantes ver que todas as funções da forma $f(x) = a\, b^x + c$ partilham certas propriedades. Através do trabalho analítico e exploratório, os estudantes podem aprender as propriedades destas e de outras classes de funções.

Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos

Fluência no simbolismo algébrico ajuda os estudantes a representar e resolver problemas em muitas áreas do currículo. Por exemplo, provar que o quadrado de qualquer inteiro impar é um múltiplo de 8 mais 1 (veja a discussão na secção “Número” deste capítulo[5]) pode envolver representar números impares e operar algebricamente nessa representação. Do mesmo modo, as equações na figura 7.7 sugerem uma justificação algébrica de um argumento visual para o teorema de Pitágoras. E muitas conjecturas

[5] Refere-se ao capítulo dos *Standards* sobre o ensino secundário, de que o presente texto constitui uma das secções.

geométricas – por exemplo, que as medianas de um triângulo se cruzam num ponto – podem ser provadas representando a situação por coordenadas e manipulando as formas simbólicas resultantes (veja a secção "Geometria" deste capítulo[6]). Argumentos algébricos directos podem ser usados para mostrar como a média e o desvio padrão de um conjunto de dados mudam se as medidas da amostra forem convertidas de metros quadrados para pés quadrados (veja secção "Raciocínio e demonstração" deste capítulo[7]).

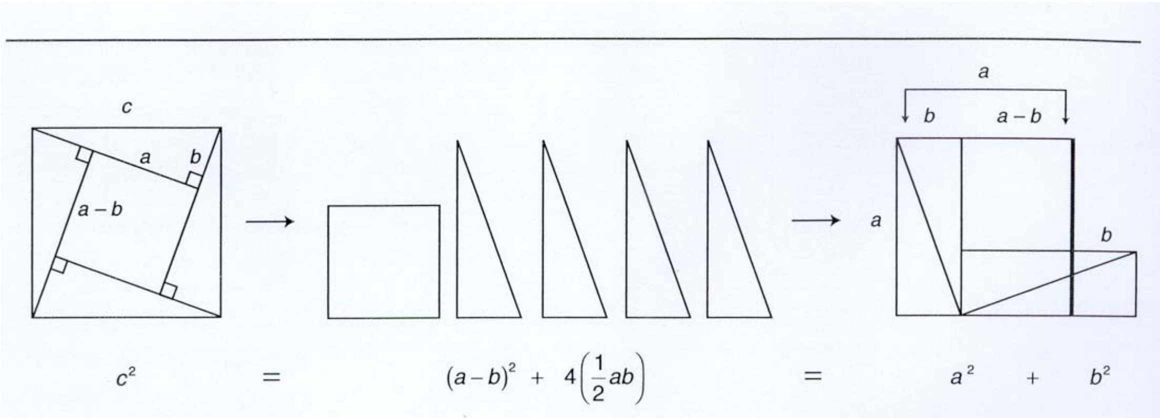


Figura 7.7 – Uma explicação algébrica de uma prova visual do Teorema de Pitágoras

Os estudantes devem poder operar fluentemente com expressões algébricas, combinando-as e reexpressando-as em formas alternativas. Estas capacidades estão na base da capacidade de encontrar soluções exactas de equações, um objectivo que tem estado sempre no coração do currículo de álgebra. Até mesmo resolver equações como

$$(x + 1)^2 + (x - 2) + 7 = 3(x - 3)^2 + 4(x + 5) + 1$$

requerem algum grau de fluência. Encontrar e compreender o significado da solução de uma equação como

$$e^{4x} = 4e^{2x} + 3$$

requer que a equação possa ser escrita como uma equação quadrática fazendo a substituição $u = e^{2x}$. (Tal equação merece atenção cuidadosa porque uma das raízes da equação quadrática é negativa.) Se resolvem equações mentalmente, à mão ou usando CAS, os estudantes devem adquirir facilidade no uso de símbolos que lhes permita representar situações simbolicamente, seleccionar métodos apropriados da solução e julgar se os resultados são plausíveis.

[6] Idem à nota anterior.
[7] Idem à nota anterior.

Ser capaz de operar com símbolos algébricos é também importante porque a habilidade de reescrever expressões algébricas permite aos estudantes reexpressar funções de modos que revelam tipos diferentes de informação sobre elas. Por exemplo, dada a função quadrática $f(x) = x^2 - 2x - 3$, de que já discutimos anteriormente algumas propriedades gráficas, os estudantes devem poder reexpressá-la como $f(x) = (x - 1)^2 - 4$, uma forma onde eles podem facilmente identificar o vértice da parábola. E devem também poder expressar a função na forma $f(x) = (x - 3)(x + 1)$ e assim identificar as suas raízes como $x = 3$ e $x = -1$.

O seguinte exemplo como as capacidades da manipulação simbólica e de interpretação de gráficos podem trabalhar em apoiando-se mutuamente é um composição hipotética de actividades exploratórias da sala de aula, inspirado em Waits e Demana (1998):

Um professor pede que lhe os estudantes analisem a função

$$f(x) = \frac{2x^2 + 11x + 6}{x - 2}$$

e façam tantas observações sobre ela quanto possível. Alguns estudantes começam tentando representar graficamente a função, marcando pontos à mão. Alguns estudantes usam um CAS e outros executam o algoritmo da divisão à mão, produzindo a forma equivalente

$$f(x) = 2x + 15 + \frac{36}{(x - 2)}$$

Alguns estudantes representam graficamente a função original ou na forma equivalente num computador ou numa calculadora gráfica; a função *zoom* permite-lhes ver o gráfico de várias formas, como se vê na figura 7.8.

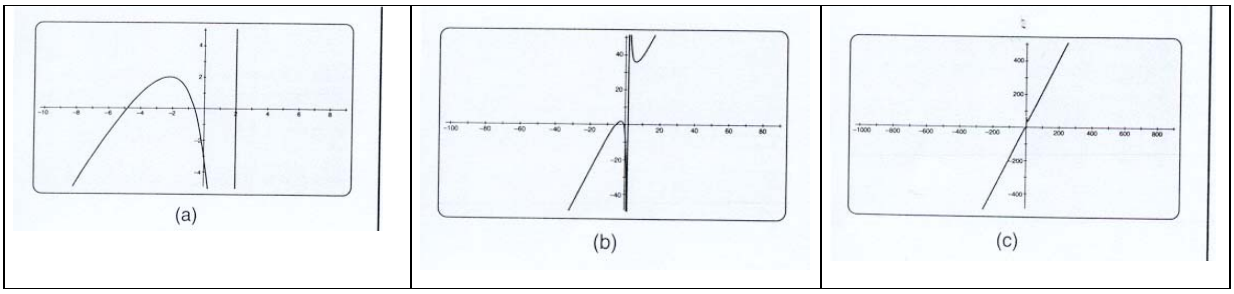


Figura 7.8 – Diferentes perspectivas da função $f(x) = \dfrac{2x^2 + 11x + 6}{x - 2}$

É difícil interpretar alguns dos gráficos perto de $x = 2$, uma matéria que a classe retoma mais tarde. Focalizando um gráfico onde o *zoom* foi usado várias vezes (ver a figura 7.8c), alguns estudantes observam, “o gráfico parece uma linha recta”. O professor pede à turma para decidir-se se é uma linha recta e, se sim, o qual será a equação dessa recta. Para investigar a questão, o professor sugere que determinem diversos valores de $f(x)$ para valores positivos e negativos grandes de x e usam o *software* de ajustamento de curvas para encontrar a equação da linha recta que passa através daqueles pontos. Diferentes grupos escolhem valores de x diferentes e, em consequência, obtêm valores ligeiramente diferentes para a inclinação e intersecção no eixo dos *yy*. Contudo, quando a turma discute seus resultados, alguns alunos descobrem que as rectas que se ajustam aqueles pontos pareceram "próximas" da recta $y = 2x + 15$. Alguns estudantes indicam que esta função é parte do resultado que obtiveram após ter executado a divisão.

A turma conclui que a recta $y = 2x + 15$ é uma boa *aproximação* de $f(x)$ para valores de x grandes mas não é um ajuste perfeito. Esta conclusão conduz à questão como os estudantes puderam combinar os gráficos de $g(x) = 2x + 15$ e $h(x) = 36/(x – 2)$ para deduzir a forma do gráfico de $f(x)$. Marcações à mão e com o computador ajudam os estudantes a explorar como o gráfico da função "contribui para" o gráfico da soma. Examinando o comportamento de

$$h(x) = \frac{36}{x-2}$$

conduz a uma discussão do que "realmente" acontece perto de $x = 2$, porque a função parece ser linear para valores grandes de x, e da necessidade de desenvolver um sentido como as representações algébricas e gráficas das funções são relacionadas, mesmo quando *software* gráfico ou calculadoras estejam disponíveis.

Os estudantes do 9º ao 12º ano devem desenvolver uma compreensão dos conceitos algébricos e capacidade na manipulação de símbolos que lhes servirão nas situações que requerem ambos. Êxito em lidar com o exemplo mostrado na figura 7.9, por exemplo, requer mais do que manipulação de símbolos. Há diversas maneiras de abordar este problema, cada uma das quais requer a compreensão de conceitos algébricos *e* facilidade com símbolos algébricos. Por exemplo, para completar a primeira linha da tabela, os estudantes necessitam apenas de saber calcular $f(x)$ e $g(x)$ para um valor dado de x. Contudo, para completar a segunda linha, os estudantes deve saber o que significa compor funções, incluindo o papel da "primeira" e "segunda" função[8] os números em que elas actuam numa composição. Devem também compreender como ler os símbolos $f(g(x)$ e $g(f(x))$. Os estudantes podem raciocinar, usando uma compreensão intuitiva da inversa de uma função, que sendo $g(x) = 4$, x deve ser 1 ou –3. Podem então determinar que x não pode ser 1, porque $g(f(1))$ não é 81.

[8] Em inglês, "*inner*" e "*outer*".

x	$f(x)$	$g(x)$	$f(g(x)$	$g(f(x))$
2			80	16
		4		81

Figura 7.9 – Se $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = (x + 1)^2$, completa a tabela acima.

Uso de modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas

Modelar envolve identificar e seleccionar características relevantes de uma situação real, representar essas características simbolicamente, analisar e raciocinar sobre o modelo e as características da situação e considerar a precisão e as limitações do modelo. No programa aqui proposto, os estudantes do 3º ciclo terão usado funções lineares para modelar uma variedade de fenómenos e terão explorado alguns fenómenos não-lineares. Os estudantes do ensino secundário devem estudar modelação numa profundidade maior, gerar ou usar dados e explorá–los verificando que tipos de funções se ajustam melhor ou modelam aqueles dados.

Os professores podem achar que se os estudantes gerarem dados os ajuda a ter interesse em criar modelos matemáticos. Por exemplo, os estudantes podem conduzir uma experiência para estudar a relação entre o tempo que toma uma prancha (*skateboard*) a descer uma rampa de comprimento fixo e a altura da rampa (Zbiek e Heid, 1990). Equipas de estudantes podem colocar rampas em alturas diferentes e repetidamente rolar pranchas pelas rampas abaixo e medir o tempo. Uma vez que os estudantes recolham e marquem os dados, podem analisar as características físicas da situação para criar modelos matemáticos apropriados. O seu conhecimento das características de várias classes de funções deve ajudá-los a seleccionar modelos potenciais. Nesta situação, quando a altura da rampa aumenta, menos tempo é necessário, sugerindo que a função é decrescente. Os estudantes podem discutir a adequação de funções lineares, quadráticas, exponenciais e racionais discutindo com base nos seus dados ou nos aspectos físicos da situação. *Software* de ajustamento de curvas permite aos estudantes gerar modelos possíveis, cuja adequação podem examinar com base nos dados e na situação.

Ao escolher os tipos de situações que os estudantes irão modelar, os professores devem incluir exemplos em que os modelos possam ser expressados em forma iterativa ou recursiva. Considere o seguinte exemplo, adaptado do National Research Council (1998, p. 80), de eliminação de um medicamento do sistema circulatório.

> Uma estudante distendeu o seu joelho em um jogo de voleibol, e seu médico receitou um anti-inflamatório para reduzir o inchamento. Ela deve fazer tomar duas cápsulas de 220 miligramas cada 8 horas durante 10 dias. Se seus rins filtrarem 60% deste remédio no seu corpo em cada 8 horas, que quantidade de estava em seu sistema após 10 dias? Que quantidade de remédio estaria no seu sistema se tomasse o remédio durante um ano?

Os professores podem pedir que os estudantes conjecturem sobre a quantidade de remédio que estaria no sistema da jogadora de voleibol ao fim de 10 dias. Podem também perguntar se a droga continua a acumular-se visivelmente no sistema da atleta. Os estudantes tenderão a predizer que sim e pode-se-lhes pedir para examinar a acumulação na sua análise.

Os estudantes podem começar por calcular alguns valores da quantidade de remédio no sistema da jogadora e procurar uma regularidade. Podem prosseguir modelando directamente a situação, representando-a informalmente como

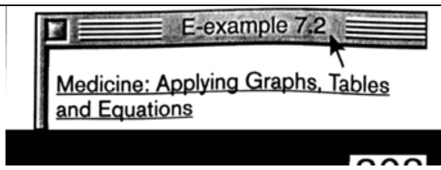
EM SEGUIDA = 0.4(NOW) + 440, começa em 440

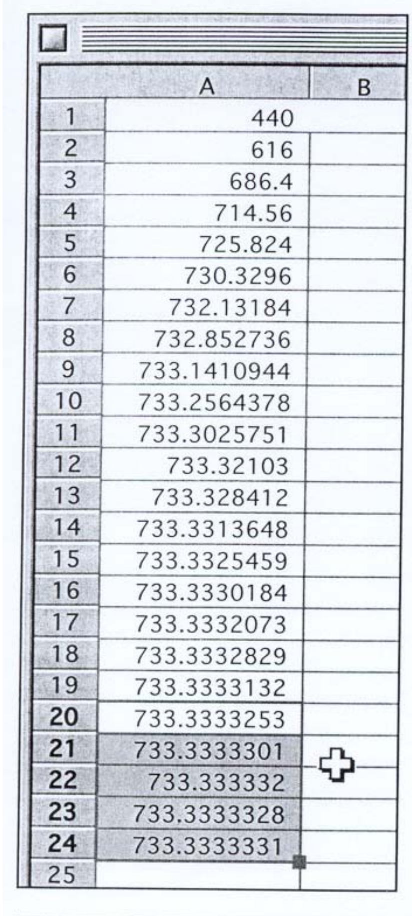
ou mais formalmente como

$$a_1 = 440 \text{ e } a_{n+1} = 0.a_n + 440 \text{ para } 1 \leq n \leq 31,$$

onde n representa o número de doses (a dose 31 seria tomada às 240 horas, ou aos 10 dias) e a_n representa a quantidade da droga no sistema imediatamente *depois* da *n-ésima* dose. Usando a calculadora ou o computador para efectuar cálculos como os da figura 7.10, os estudantes devem ser capazes de ver que a quantidade da droga no sistema circulatório alcança um "equilíbrio" após tomar o remédio, no valor aproximado de 733 1/3 miligramas. Os estudantes devem aprender expressar a relação numa das formas iterativas dadas acima. Então, a Matemática neste exemplo pode ser prosseguida de várias maneiras. No nível mais elementar, os estudantes podem simplesmente verificar o valor de equilíbrio mostrando que 0.4(733 1/3) + 440 = 733 1/3 miligramas. Pode-se-lhes pedir para predizer o que aconteceria se a dose inicial de anti-inflamatório fosse diferente, fazer funcionar a simulação e explicar o resultado que se obtém.

Esta investigação abre a porta à exploração de sucessões finitas e séries e à consideração informal de limites. (Por exemplo, impressões da folha de cálculo para "*n* grande" para várias dosagens sugere fortemente que a sequência $\{a_n\}$ de níveis após administração do remédio converge.) Expandindo os primeiros termos, vemos que esta é uma sucessão geométrica finita:





	A	B
1	440	
2	616	
3	686.4	
4	714.56	
5	725.824	
6	730.3296	
7	732.13184	
8	732.852736	
9	733.1410944	
10	733.2564378	
11	733.3025751	
12	733.32103	
13	733.328412	
14	733.3313648	
15	733.3325459	
16	733.3330184	
17	733.3332073	
18	733.3332829	
19	733.3333132	
20	733.3333253	
21	733.3333301	
22	733.333332	
23	733.3333328	
24	733.3333331	
25		

Figura 7.10 – Um cálculo do problema da dosagem do remédio na folha de cálculo

$a1 = 440 = 440(1)$

$a2 = 440 + 0.41(440) = 440(1 + 0.4)$

$a3 = 440 + 0.4(440) + (0.4)^2(440) = 440(1 + 0.4+(0.4)^2)$

$a4 = 440 + 0.4(440) + (0.4)^2(440) + (0,4)^3(440)$

$= 440\big(1 + 0.4+(0.4)^2 +(0.4)^3\big)$

Os estudantes podem achar interessante estudar o comportamento desta sucessão.

Para investigar outros aspectos da situação modelada, pode-se pedir aos estudantes para pensar em perguntas como as seguintes:

- Se a atleta parar de tomar o remédio após 10 dias, quanto tempo levará para que seu sistema elimine a maioria do remédio?
- Como se poderia determinar uma dosagem que resultasse num nível alvejado de equilíbrio depois de tomar o remédio, tal como 500 miligramas?

Os estudantes devem também estar cientes que problemas tais como este descrevem somente uma parte do regime de tratamento e a que os médicos devem estar alerta para a possibilidade e implicações de vários factores de complicação.

No 9º ao 12º ano, os estudantes devem encontrar uma grande variedades de situações que podem ser modeladas recursivamente, como problemas de juros ou situações que envolvem a equação logística do crescimento. O estudo de regularidades recursivas deve realizar-se do 9º até ao 12º ano. Os estudantes vêem frequentemente tendências nos dados observando a mudança na forma de diferenças ou de relações (quanto mais ou menos? Quantas vezes mais ou menos?). As funções definidas recursivamente oferecem aos estudantes uma maneira natural de expressar estas relações e de ver como algumas funções podem ser definidas recursivamente bem como explicitamente.

Análise da mudança em vários contextos

Cada vez mais, discussões sobre mudança se encontram na imprensa popular e em notícias. Os estudantes devem poder interpretar afirmações tais como "a taxa de inflação está a diminuir". O estudo da mudança no 9º ao 12º ano tem por finalidade dar aos estudantes uma compreensão mais profunda das formas que as mudanças nas quantidades podem ser representadas matematicamente e do conceito de taxa de variação.

A secção "Funções e álgebra" deste capítulo começou com exemplos de três diferentes contextos de realidade em que ocorreram tipos muito diferentes da mudança. Uma situação foi modelada por uma função em escada, uma por uma função exponencial e outra por uma função periódica. Cada uma destas funções muda de maneira diferentes num dado intervalo. Tal como discutimos anteriormente, os estudantes devem reconhecer que a função em escada é não-linear mas tem algumas qualidades lineares. Para muitos estudantes, o tipo de mudança descrito na segunda situação parece linear: "a população na Terra aumenta 2 por cento ao ano". Contudo, a mudança é 2 por cento da população de ano anterior; à medida que a população cresce, o aumento cresce também. Os estudantes devem perceber que as funções deste tipo crescem *muito* rapidamente. No terceiro exemplo, os estudantes podem ver que não só que a função é periódica mas que, porque o é, a sua taxa de mudança é periódica também.

O capítulo 6 dá um exemplo em que se pede aos estudantes do 3º ciclo para comparar os custos de dois esquemas de chamadas de telefone: (i) uma taxa fixa de 0,45€ por minuto contra (ii) uma taxa de 0,50€ para o primeiro minuto e 0,10€ por minuto para cada minuto depois do primeiro. Nos exemplos deste tipo, a variável dependente muda tipicamente (sobre algum intervalo) uma quantidade fixa para cada mudança de unidade na variável independente. Na escola secundária, os estudantes devem analisar as situações em que as quantidades mudam de uma maneira muito mais complexa e nas quais as relações entre quantidades e suas taxas de variação são mais subtis. Considere, para o exemplo, a situação (adaptada de Carlson, 1998, p. 147) na figura 7.11.

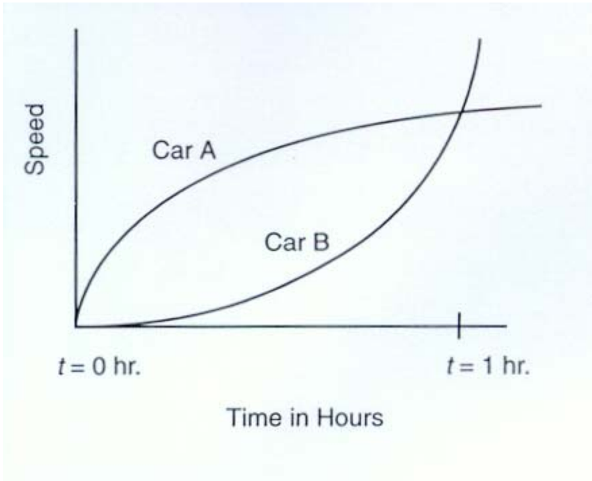
O gráfico dado representa a velocidade e a hora para dois carros. Suponha que os carros partem da mesma posição e estão viajando na mesma direcção (a) indica a relação entre a posição do carro A e do carro B em $t = 1$ hora. Explica. (b) indica a relação entre a velocidade do carro A e do carro B em $t = 1$ hora. (c) indica a relação entre a aceleração do carro A e do carro B em $t = 1$ hora. (d) Qual é a posição dos dois carros ao longo do tempo no intervalo entre $t = 0{,}75$ horas e $t = 1$ hora?	

Figura 7.11 – Um problema requerendo uma compreensão sofisticada da mudança

O trabalho em problemas deste tipo apoia-se na compreensão da mudança desenvolvida no 3º ciclo e forneces a base para o estudo da análise infinitesimal. Porque os estudantes tendem a confundir velocidade e posição, os professores devem ajudá-los a pensar com cuidado sobre que variáveis são representadas no diagrama e sobre como mudam. Primeiro, por exemplo, os estudantes devem perceber que a variável eixo vertical é a velocidade e não a posição. Para responder à parte *a* da pergunta, necessitam de raciocinar que, sendo a velocidade do carro A é maior que a do carro B em cada ponto no intervalo $0 < t < 1$, o carro A deslocou-se necessariamente a uma distância maior do que o carro B. Podem ler a resposta para parte *b* directamente do gráfico: em $t = 1$ hora, ambos os carros estão-se deslocando à mesma velocidade. A resposta à parte *c* requer pelo menos uma compreensão intuitiva da taxa de variação instantânea. A aceleração é a taxa de variação da velocidade. Em $t = 1$ hora, a velocidade do carro B aumenta mais rapidamente do que a do carro A, por isso o carro B está acelerando mais rapidamente do que o carro A em $t = 1$ hora. A parte *d* é particularmente contra-intuitiva para os estudantes (Carlson, 1998). Uma vez que o carro B está acelerando mais rapidamente do que o carro A perto $t = 1$ hora, os estudantes tendem a pensar que o carro B "apanhando" o carro A, e está, embora esteja ainda muito atrás. Alguns interpretarão a intersecção dos gráficos como significando que os carros se encontram. Os professores necessitam de ajudar a estudantes a focalizar-se nas velocidades relativas dos dois carros. Perguntas tais como "Qual dos carros se move mais rápido no intervalo $t = 0{,}75$ horas a t = 1 hora?" podem ajudar os estudantes a perceber que o carro A está somente à frente do carro B mas está a mover mais rapidamente e portanto afastando-se do carro B. O carro B começa alcançar o carro A somente após $t = 1$ hora.

Referências

Carlson, M. P. (1998). A cross sectional investigation of the development of the function concept. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (eds.), *Research in collegiate mathematics education 3* (pp. 114-162). Washington, DC: Conference Board of the Mathematical Sciences.

National Research Council (1998). *High school mathematics at work: Essays and examples for the education of all students.* Washington, DC: The National Academy of Sciences.

Waits, B., & Demana, F. (1998, Junho). The role of hand-held computer symbolic algebra in mathematics education in the twenty-first century: A call for action. Comunicação apresentada no encontro Technology and NCTM Standards, Arlington, VA, EUA.

Zbiek, R. M., & Heid, K. (1990). The skateboard experiment: Mathematical modeling for beginning algebra. *Computing Teacher*, *18*(2), 32-36.