Configuraciones puntuales. Sistema de representación idóneo para las sucesiones de números naturales

Encarnación Castro Martínez

Dep. de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, España
encastro@ugr.es

Introducción

Las ideas que se van a exponer en este documento proceden de las reflexiones realizadas en el trabajo que venimos desarrollando en Pensamiento Numérico, campo éste que forma parte de la Educación Matemática y a cuyo desarrollo contribuye con una aportación importante. La siguiente definición de Pensamiento Numérico explica, en cierto modo, el trabajo que se lleva a cabo en el seno del mismo: "El Pensamiento Numérico estudia los diferentes sistemas cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significado utilizando diferentes estructuras numéricas" (Castro, 1995).

De entre los objetivos generales que nos proponemos en nuestro trabajo, destacamos aquel que se refiere al "estudio y elaboración de sistemas simbólicos de codificación válidos para la expresión y comunicación de los conceptos y relaciones dentro de las estructuras numéricas y los modos de abordar, interpretar y, en su caso, responder a una variedad de fenómenos cuestiones y problemas que admiten ser analizados mediante conceptos y procedimientos que forman parte de una estructura numérica".

Partiendo de este objetivo vamos a tratar de justificar tres ideas generales: por una parte, el interés que tiene la introducción en las aulas de Educación Secundaria temas en los que esté presente la Matemática Discreta; por otra, la consideración de que las sucesiones de números naturales es un tema apropiado para el trabajo que indicamos con Matemática Discreta y por otra, la importancia de utilizar varios sistemas de representación en el trabajo con sucesiones de números naturales. En cada uno de los casos aparecerán consideraciones sobre algunos aspectos directamente ligados a los anteriores, que también se tratarán. Por último, presentaremos como ejemplo un trabajo, sobre este tema, llevado a cabo en un aula de educación secundaria.

Interés por la Matemática Discreta

En las últimas décadas se está produciendo un cambio de enfoque en cuanto a la importancia que se les da en la enseñanza a algunas partes de la matemática. Nos referimos al interés que se le está reconocimiento a la Matemática Discreta "como una rama activa de la matemática contemporánea, ampliamente utilizada en los negocios y en le industria y dado que sus temas se encuentran en otras ramas de la matemática debería constituir una parte integral del currículo" (N.C.T.M 2000). En Currículo and Evaluation Sstándrs for Scholl Mathematics (1989) del N.C.T.M. se introdujo un estándar sobre Matemática Discreta para la etapa 9–12, entre sus objetivos figura "representar situaciones de problemas por medio de estructuras discretas tales como grafos finitos, matrices, sucesiones y relaciones de recurrencia" (N.C.T.M, p. 183). Posteriormente, en *Principles and Standards for school mathematics* (2000) se incluyen de forma transversal, en los distintos estándares y niveles, elementos importantes de esta rama de la matemática. Se observa la presencia de la matemática discreta, tanto en los contenidos propuestos como en los ejemplos presentados. Aparecen, así mismo, sugerencias para integrar la matemática discreta en cada uno de las sub-áreas de la matemática que integran el currículo. Se proponen ejemplos, relacionados con la matemática discreta, incluidos en el contenido algebraico, geométrico, de probabilidad, de matrices, de teoría de grafos. Aparecen también ejemplos de tipo estratégico sobre pensamiento algorítmico, pensamiento crítico, técnicas para contar, iteración y recursión para el estudio de regularidades o patrones.

El término discreto es sinónimo de discontinuo, separado. Con la expresión Matemática Discreta se hace referencia al estudio de objetos y conceptos que pueden aparecer en partes separadas o discontinuas. Se pueden considerar los métodos de la Matemática Discretas como alternativos a los de la Matemática Continua los cuales proceden de un planteamiento más clásico. No obstante los dos se complementan en su aplicación a los problemas cotidianos.

Otra publicación del N.C.T.M del mismo año 1991. Discrete mathematics across the Currculum pone de manifiesto la utilidad de la matemática discreta y la necesidad de realizar cambios en el currículo que permitan la introducción de la misma.

Los argumentos que se señalan para ello son entre otros:

◊ La matemática discreta favorece el desarrollo del pensamiento crítico y refuerza el razonamiento matemático ya que son propios de ella los procesos de inducción, los tratamientos recursivos, la formulación de conjeturas por generalización de casos particulares.
◊ La matemática discreta da sentido a la resolución de un cierto tipo de problemas de aplicación de la vida diaria que no pueden ser resueltos por rutinas conocidas de cálculo, esto puede impulsar a los resolutotes de dichos problemas a explorar las situaciones propuestas e intentar nuevas vías de solución "Los estudiantes a menudo tienden a visualizar la situación desarrollando un modelo o cualquier otra forma de representación" (Dossey, 1991; p.8).
◊ La matemática discreta es una herramienta tecnológicamente potente; la utilización del ordenador, que permite el trabajo con matemática discreta,

ha hecho posible el desarrollo de nuevas aplicaciones de la matemática, ha centrado la atención en nuevos tipos de problemas y ha abierto nuevas vías a la matemática.

Hay que considerar que cuando se dice introducir la matemática discreta en el currículo no debe de entenderse que se trata de una nueva rama de la matemática a añadir a las que ya conforman el mismo, sino que se trata de añadir matemática discreta en todo lo que sea posible, fomentando aquellos tópicos relacionados con ella. "Estos tópicos incluyen técnicas de contar, razonamiento lógico, uso de patrones (iteración, recursión), algoritmos, probabilidad y redes" (Zalewski, 1991; p.18)

Los Números Naturales constituyen un campo de trabajo privilegiado en Matemática Discreta, son uno de los modelos fundamentales en este tipo de matemática. Un mayor dominio y profundización en los sistemas de representación de los números naturales, enfatizando el análisis de la estructura de los números, el descubrimiento de patrones y la búsqueda de regularidades, pone en marcha algunos de los procedimientos y estrategias básicos de la matemática discreta.

Representación

El concepto de representación ha sido tratado por filósofos de todos los tiempos. El significado de dicho concepto ha evolucionado y se ha modificado adecuándose a las teorías del conocimiento de cada época. No tratamos de hacer una revisión histórico-filosófica, sino situarnos en relación a dicho concepto, para darle sentido a nuestro trabajo.

En los años sesenta, época de gran auge de la Psicología Cognitiva, adquiere gran protagonismo el carácter representacional del conocimiento. "La idea de que operamos estructuralmente en el proceso de clasificación de los objetos del mundo, según esquemas conceptuales — o sus correlatos analógicos — está suficientemente aceptada" (Ibarra 2000, p. 23).

La Educación matemática no es ajena a este hecho y diversos autores han reflexionado sobre el mismo ya sea para precisar el concepto desde un punto de vista epistemológico o para realizar estudios sobre distintos tipos de representación que admite algún concepto matemático concreto o para ver cómo influyen los distintos sistemas de representación, que admiten los contenidos matemáticos, en la comprensión de los escolares que los estudian. Así, destacamos a Fischbein (1987) que establece: "un sistema B representa un modelo del sistema A si, sobre la base de cierto isomorfismo, una descripción o una solución producida en términos de A puede reflejarse consistentemente en términos de B y viceversa" (Fischbein, 1987, p. 202). Según Ibarra (2000) la teoría representacionalista no requiere concebir la entidad representante como una copia o doble de lo representado y considera que esta era ya la idea fundamental de la teoría platónica del conocimiento; establece este autor que la característica funcional esencial de la representación es la realización del razonamiento subrogatorio, que faculta la aplicación de la teoría o las ideas de un sistema B en otro sistema A, para poder utilizar el aparato teórico o conceptual de B como instrumento de análisis de A.

En una representación matemática, hay que distinguir dos elementos: el contenido de la misma que es la idea, el concepto, lo descrito o representado y el medio, que es la imagen externa. No debe de confundirse la representación con la idea y la denominación *representación* debe darse únicamente al medio, nunca al contenido.

Otro autor que destacamos es Kaput, (1987). Considera, este autor, que se puede hablar de representación cuando hay algo que representar. Distingue dos entes relacionados aunque funcionalmente separados, uno es el objeto representante (representación, símbolo o modelo) y el otro es el objeto representado (contenido) existiendo cierta correspondencia entre el mundo de los objetos representantes y el de los objetos representados, indica que cualquier especificación particular de la noción de representación debiera describir, al menos, cinco entidades:

- ◊ los objetos representados,
- ◊ los objetos representantes,
- ◊ qué aspectos del mundo representado se representan,
- ◊ qué aspectos del mundo representante realizan la representación,
- ◊ la correspondencia entre ambos mundos o conjuntos.

En buena parte de los casos uno o ambos de los mundos pueden ser entidades hipotéticas e, incluso, abstracciones. De aquí que se hable de representaciones internas (en referencia a dichas abstracciones) y representaciones externas.

Hay acuerdo en que para pensar y razonar sobre ideas matemáticas es necesario hacerse una representación interna de las mismas de forma que la mente tenga posibilidad de operar con ellas y para comunicar estas ideas es preciso representarlas externamente para que sea posible dicha comunicación.

Los signos exteriores de representación tienen un *equivalente* en la mente del sujeto que los utiliza, lo que hace necesaria la distinción entre representaciones externas y representaciones internas. La relación existente entre estas dos modalidades de representación la expresa Duval (1995) en los siguientes términos: desde un punto de vista genético, las representaciones mentales y las representaciones externas no pueden verse como dos dominios diferentes. El desarrollo de las representaciones mentales se efectúa como una interiorización de la representaciones externas y la diversificación de representaciones de un mismo objeto aumenta la capacidad cognitiva de los sujetos y por consiguiente sus representaciones mentales. De manera recíproca, las representaciones externas como enunciados en el lenguaje natural, fórmulas algebraicas, gráficas, figuras geométricas etc. son el medio por el que los individuos exteriorizan sus representaciones mentales y las hacen accesibles a los demás. La representación externa juega, desde este punto de vista, una doble función: a) actúan como estímulo de los sentidos en los procesos de construcción de nuevas estructuras mentales, b) como expresión de conceptos e ideas que poseen los sujetos que las utilizan.

Desde una aproximación semiótica-cultural Radfort (2004) considera que el saber se genera en el curso de la actividad humana y la forma que toma ese saber depende de la dimensión histórico-económica y de una superestructura simbólica. Se refiere a *objetivación* del saber como una idea íntimamente ligada a la naturaleza de los conceptos y con la relación epistémica entre sujeto y objeto conceptual. (…) "dada la idealidad de dichos objetos, la única manera de llegar a ellos es a través de signos" (Radfort 2004, p. 12)

Generalmente, los conceptos matemáticos, vienen expresados mediante uno o varios sistemas de representación específicos y un mismo objeto matemático puede ser dado mediante representaciones muy diferentes, Janvier (1987) las denominan representaciones sinónimas. Cada uno de estos modos de representación proporciona una caracterización distinta del concepto matemático que hemos considerado y no hay un sistema único que sea capaz de agotar en su totalidad la complejidad de relaciones que cada concepto matemático encierra. Cada uno de los sistemas de representación destaca algunas propiedades importantes del concepto representado y dificulta la expresión de otras.

Lesh y col. (1987), a partir de sus trabajos en este campo identifican cinco tipos distintos de sistemas de representación que se utilizan en el aprendizaje matemático y en la resolución de problemas, y describen, a su vez, los procesos mentales a que da lugar cada uno de ellos:

- ◊ Experiencias básicas, donde el conocimiento está organizado sobre hechos reales, sucesos que sirven como contexto general para resolver situaciones problemáticas.
- ◊ Modelos manipulativos (números en color, bloques lógicos, bloques multibase …) elaborados con una estructura o relación matemática determinada sirviendo de ayudan en la construcción de las mismas estructuras.
- ◊ Dibujos o diagramas, como figuras estáticas, que pueden ser interiorizadas como imágenes.
- ◊ Lenguaje hablado, se pude considerar aquí lenguajes específicos relativos a un dominio concreto, como por ejemplo, el lenguaje de la Lógica.
- ◊ Símbolos escritos (semejantes el lenguaje hablado) puede entrañar sentencias especiales como $x + 3 = 7$, sentencias en lenguaje natural y frases.

Para estos autores es de fundamental importancia, en el aprendizaje de las matemáticas, tanto el conocimiento y uso de estos tipos de representación, como los procesos de traducción y transformación de unos en otros.

Una de las conclusiones a las que llegan algunos investigadores Wittrok (1974), Zimmermann y Cunningham (1991) relacionada con el uso de representaciones es la afirmación de que la visualización que se produce a través de una representación ayuda al estudiante en su proceso de comprensión de los conceptos matemáticos. Están de acuerdo en que hay que ayudar al estudiante a enriquecer el mundo de sus representaciones internas para que puedan relacionar, de forma eficaz, el significado correspondiente a objetos mentales y como consecuencia controlar mejor su manejo de las representaciones externas. No creen, por otra parte, que los estudiantes puedan crear o interpretar representaciones por sí mismos, sino que han de ser instruidos y educados en su uso y comprensión.

Representación de números naturales

En el análisis estructural que realiza Guitel (1975) sobre los números naturales establece tres tipos de numeraciones: numeraciones figuradas, numeraciones habladas y numeraciones escritas, dando a las primeras un sentido amplio que incluye a las representaciones puntuales. Esta consideración de un triple sistema de representación para los números naturales y que considera como sistema alternativo la representación mediante figuras para los términos de una secuencia numérica es reconocida igualmente por distintos historiadores; en particular, destacan el interés del sistema simbólico de representación de números que denominamos números figurados. Así Heath (1981) argumenta que el origen de los números figurados se encuentra en los primeros pitagóricos y señala distintos autores griegos que trabajaron sobre estos conceptos. Dhombres (1987) indica que la corriente pitagórica ha influido en la enseñanza hasta el Renacimiento, a través de la introducción de la Aritmética del neopitagórico Nicómaco de Gerasa. Eves (1976) señala que hay un acuerdo general sobre que los números figurados tuvieron su origen en los primeros pitagóricos y afirman que *la representación mediante puntos según ciertas configuraciones geométricas, representan un enlace entre la geometría y la aritmética*. Croosly (1987) interpreta con detalle algunos de los primeros documentos históricos en los que aparecen los números figurados.

Números figurados

Para llegar a hacer una descripción de lo que se conoce como número figurado vamos a establecer la noción de configuración puntual en la cual se basa.

Configuración puntual. Es una representación gráfica de una colección finita de puntos que responde a un propósito o a cierta intencionalidad.

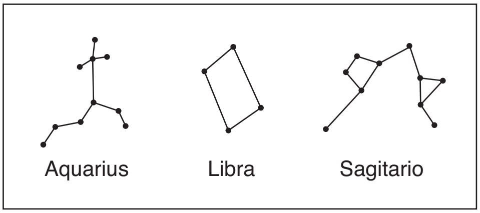

Figura 1

En la figura 1 se muestran grupos de puntos (Silvermann, 1990) dispuestos de la misma forma que la constelación que se indica.

Cuando se trata de representar números, una configuración puntual ofrece una imagen visual de la cantidad, es un modelo gráfico de representación de los mismos (Hogben, 1966). Normalmente, en esta representación gráfica de los números se sigue algún criterio de estructuración como puede ser considerar algún tipo de simetría o simular alguna figura geométrica.

Números figurados. Se trata de una configuración puntual que representa un cardinal, en donde el criterio de estructuración de los puntos se asemeja a una figura geométrica reconocible.

Figura 2

Números poligonales. Los números que se pueden organizar mediante configuraciones que son polígonos se les denominan números poligonales. Dependiendo del tipo de polígono serán números triangulares, números cuadrados o cuadrangulares, números pentagonales… Cada uno de estos tipos forman una secuencia de números que comparten una estructura, siguen el mismo patrón.

Números triangulares

Los números triangulares son aquellos que su configuración puntual tiene forma de triángulo, figura 3. Forman la secuencia 1, 3, 6, 10, 15, 21 …

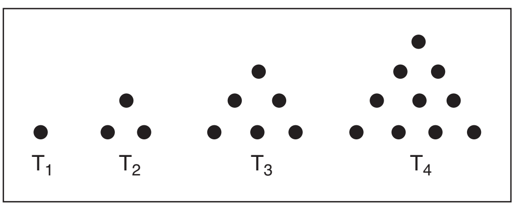

Figura 3

A partir de T_1, todas las representaciones se obtienen desde la anterior, poniendo una nueva fila con un punto más. Esto en la expresión numérica equivale a sumar el número natural consecutivo. Se obtiene así el patrón que aparece en la tabla 1.

$1 = T_1 = 1$
$3 = T_2 = 1 + 2$
$6 = T_3 = 1 + 2 + 3$
$10 = T_4 = 1 + 2 + 3 + 4$
$15 = T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$
………………………………

Tabla 1

Números cuadrangulares

Los números cuadrados o cuadrangulares son aquellos que pueden dar lugar a una configuración en forma de cuadrado, figura 4. Forman la secuencia 1, 4, 9, 16, 25…

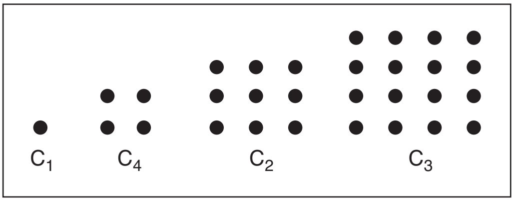

Figura 4

A partir de C_1, cada nuevo cuadrado se obtiene por agregación de una nueva fila y columna al anterior. En términos numéricos consiste en sumar en cada caso el número impar siguiente, dando lugar al patrón que se recoge en la tabla 2.

$$1 = C_1 = 1$$
$$4 = C_2 = 1 + 3$$
$$9 = C_3 = 1 + 3 + 5$$
$$16 = C_4 = 1 + 3 + 5 + 7$$
$$25 = C_5 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Tabla2

El mismo tratamiento se puede hacer para los números pentagonales, hexagonales etc.

La tabla 3 recoge las secuencias de los números poligonales hasta el orden cinco. Cada una de estas secuencias es una sucesión de números naturales, en la última columna de la tabla se recoge el término general de estas sucesiones y en la última fila el término general de las sucesiones que se forman en cada una de las columnas. Se puede observar que las sucesiones de números naturales que se forman en las filas son sucesiones cuadráticas y las formadas en las columnas son sucesiones lineales.

Orden Nombre	1º	2º	3º	4º	5º	...	Termino general
Triangular	1	3	6	10	15	...	$1/2r(r+1)$
Cuadrangular	1	4	9	16	25	...	$1/2r(2r–0)=r^2$
Pentagonal	1	5	12	22	35	...	$1/2r(3r–1)$
Hexagonal	1	6	15	28	45	...	$1/2r(4r–2)$
Heptagonal	1	7	18	34	55	...	$1/2r(5r–3)$
Octogonal	1	8	21	40	65	...	$1/2r(6r–4)$
Nonagonal	1	9	24	46	75	...	$1/2r(7r–5)$
Decagonal	1	10	27	52	85	...	$1/2r(8r–6)$
...		...	...	...	...	...	...
Enegonal		n	$3(n–1)$	$2(3n–4)$	$5(2n–3)$		$1/2r[(r–1)n–2(r–2)]$

Tabla 3

Patrones

El término patrón, utilizado en algunos apartados anteriores, es la traducción de la expresión inglesa pattern. Se podría haber traducido por otros vocablos sinónimos como pauta, original, molde, muestra. La idea que se asocia a patrón es "*algo*" que se repite con regularidad. Los números poligonales, según se desprende de las figuras son un ejemplo importante de patrones puntuales, también se les suele considerar patrones geométricos. Las tablas 1 y 2 recogen, por otra parte, patrones aritméticos.

Nuestro interés por el reconocimiento y uso de patrones en el sistema escolar se debe a que un cierto punto de vista considera que las matemáticas, tal como se trabaja con ellas en la actualidad y lo que tienen en común sus distintas ramas, es el estudio de patrones. Así lo explica Devlin (1994). Para dar respuesta a la pregunta ¿Qué es la matemática? hace un recorrido histórico en el que a grandes rasgos da cuenta de qué ha sido la matemática a lo largo de grandes periodos de tiempo. Señala periodos en los que la matemática ha presentado alguna característica especial que la definiese. Comienza con las civilizaciones egipcia y babilónica (alrededor de 500 años antes de Cristo) en este periodo la matemática consistía, fundamentalmente, en el estudio de *números*.

Desde los 500 años antes de Cristo hasta los 300 años después de Cristo, que coincide con la era de la Matemática Griega. Los griegos se interesan por la matemática no solo como una herramienta sino que le asocian interés intelectual al contemplar en ella elementos estéticos y religiosos. La matemática durante esta época estará más relacionada con la geometría, es indudable que no se olvidan los números y se tratan a la vez que la geometría por lo que se puede decir de esta época que la matemática es la ciencia que se ocupa de números *y figuras*.

Hasta mediados del siglo diecisiete no se aprecian cambios significativos. A partir de que Newton y Leibniz independientemente inventasen el cálculo, las matemáticas (que hasta entones habían estado restringidas a situaciones estáticas de contar, medir o describir figuras) se podrán dedicar a estudiar los números, las figuras, *el cambio el movimiento y el espacio*.

El siglo y medio que abarca desde la mitad del siglo dieciocho hasta final del siglo diecinueve, se caracteriza por el interés en las aplicaciones que pueden tener la matemática en otras ciencias como la física y otras relacionadas con el desarrollo de la vida humana. Se llega así a que la matemática trata del estudio de los números, las figuras, el movimiento cambio, espacio y de *las herramientas necesarias y usadas para el estudio de problemas surgidos en otras ciencias*.

Durante el siglo veinte, la matemática no ha sido ajena al avance espectacular que ha tenido la ciencia. Su crecimiento no ha estado sólo en ampliar los conocimientos existentes sino también en la aparición de diversas ramas de la matemática con contenido específico y diferenciado. En esta situación, la respuesta a ¿que es actualmente la matemática? no es sencilla y se habla de una determinada forma de trabajar. Hay una expresión emergente y que muchos matemáticos aceptan, se dice que *la Matemática es la ciencia de los patrones*. Lo que la matemática hace es examinar patrones abstractos, patrones numéricos, patrones de figura, patrones de movimiento etc. Estos patrones pueden ser reales o imaginados, visuales o mentales, estáticos o dinámicos, cualitativos a cuantitativos, con interés utilitario, o puramente recreativos.

Estudio de sucesiones de números naturales en el currículo de secundaria

En los párrafos anteriores hemos tratado de poner de manifiesto la relevancia que consideramos tiene el trabajo con Matemática Discreta, el estudio de patrones y la utilización de diferentes sistemas de representación. En el párrafo dedicado a los números figurados se evidencia que las sucesiones que forman dichos números cumplen estos tres requisitos. Tratamos ahora de reivindicar que en el currículo de secundaria se contemple y en las aulas se trabajen sucesiones de números naturales, en la misma medida que se trabajan las funciones (consideramos las sucesiones son el contenido de matemática discreta *equiparable* a las funciones, en matemática continua). Se constata que en el currículo de educación secundaria español hay predominio de matemática continua frente a la matemática discreta. El caso de las funciones y las sucesiones es un ejemplo de ello. El tratamiento que se da a cada uno de estos contenidos en el currículo es desigual como se aprecia en la tabla 4. Para comparar dicho tratamiento se han recogido el contenido que se trabaja, los tipos de representación con que se hace y cómo es el tratamiento en cada uno de los casos. Para ello nos centramos en las recomendaciones curriculares oficiales.

	Funciones	Sucesiones
Contenido	Estudio de: ◊ función lineal ◊ función afín ◊ función de proporcionalidad inversa. ◊ funciones cuadráticas ◊ función exponencial ◊ función logarítmica ◊ funciones trigonométricas ◊ función parte entera, valor absoluto	Estudio de: ◊ sucesiones de números naturales ◊ sucesiones de pares e impares ◊ sucesiones de múltiplos de un número ◊ sucesiones de números primos ◊ progresión aritmética ◊ progresión geométrica
Representaciones utilizadas	◊ expresiones verbales que precisan dependencia funcional ◊ tablas numéricas ◊ representación gráfica ◊ notación simbólica (algebraica, generalmente)	◊ expresiones verbales que precisan dependencia de variable natural ◊ tablas numéricas, o primeros términos de la sucesión ◊ notación simbólica o término general de la sucesión.
Momento en el currículo	Estudio sistemático de las funciones en Educación Secundaria	◊ Inicio en Educación Primaria con la sucesión de Números Naturales ◊ Estudio de las progresiones aritméticas en Educación Secundaria, después del estudio de las funciones

Tabla 4

Un análisis de la tabla 4 pone de manifiesto que el tratamiento curricular de los dos contenidos no es equiparable. Se aprecian diferencias de tratamiento curricular en estos dos contenidos.

Para las funciones se hace un planteamiento sistemático, ordenado tanto de contenido como de sistemas de representación. Por el contrario, las primeras nociones sobre sucesiones numéricas se adquieren mediante el trabajo con las sucesiones de números naturales, de pares, impares. Estos casos se tratan de forma intuitiva. Un tratamiento explícito y formal de las sucesiones comienza con el estudio de las progresiones aritméticas, se continúa con las progresiones geométricas, no se hace un estudio de las sucesiones cuadráticas o de segundas finitas constantes.

En cuento al uso de representaciones, en el trabajo con funciones se consideran las recomendaciones emanadas de las trabajos de Bell, Costello y Küchemann (1983); Janvier (1987); Romberg, Fennema y Carpenter (1993) los cuales ponen de manifiesto que la noción de función se manifiesta por el dominio y coordinación de un sistema de símbolos y representaciones que incluye, al menos, cuatro componentes:

◊ expresiones verbales
◊ tablas numéricas
◊ representación gráfica
◊ notación simbólica

En el caso de las sucesiones, la representación gráfica no está contemplada como una componente en el estudio de las mismas, por lo que en este caso no se utilizan cuatro tipos de representaciones, sino tres.

Por lo que se refiere situación temporal en la que se incluyen, al hacerse el estudio de las sucesiones al finalizar la Educación Secundaria, no tiene un tratamiento continuo y equilibrado.

Como conclusión, nuestra visión del tratamiento curricular que se le da en educación secundaria al contenido *sucesiones de números naturales* no es el adecuado (sobre todo si se compara con el tratamiento que se da a las funciones) por las siguientes razones: no se sigue una organización tan establecida como se ve en las funciones, se da un salto entre las sucesiones lineales y afines (progresiones aritméticas) a las exponenciales (progresiones geométricas) rompiendo la secuencia progresiva que se da en la funciones, falta un sistema de representación gráfica para el trabajo con las mismas.

Los trabajos que hemos realizado tratando de clarificar cómo entienden los alumnos de educación secundaria los conceptos vinculados a las sucesiones de números naturales, nos permiten asegurar que es posible el trabajo sistemático gradual, usando las representaciones apropiadas y el paso de unos sistemas de representación a otros. Todo ello permite a los escolares trabajar la matemática discreta, visualizar patrones numéricos, ver la estructura común que tienen los números que forman una sucesión numérica y hacer generalización de dicha estructura para escribir el término general de la sucesión. De esta forma se entraría en la iniciación al Álgebra como generalización de propiedades aritméticas.

Funciones cognitivas asociadas a los números naturales

Tratando de reforzar nuestra reivindicación de que se incluya en el currículo de matemáticas el estudio sistemático de las sucesiones de números naturales, introducimos en este apartado un nuevo argumento centrado en la necesidad del estudio de la estructura que presentan los números naturales.

Las funciones cognitivas que se asignan a los números naturales se organizan en relación a tres tipos de actividades que surgen de tres cuestiones fundamentales, a cuya respuesta contribuyen dichos números:

- ◊ Contar y cardinal, como respuesta a la pregunta ¿cuántos hay?;
- ◊ Secuenciar y ordenar, como respuesta a la pregunta ¿qué posición ocupa?
- ◊ Representar y analizar, como respuesta a la pregunta ¿cómo es la cantidad? ¿qué estructura tiene?

Al estudio sobre iniciación y desarrollo de estas funciones se han ocupado una parte considerable de las investigaciones llevadas a cabo por psicólogos que se han interesado por estos conceptos matemáticos. Los estudios realizados sobre conteo, cardinación, secuenciación y ordenación, han ocupado un lugar predominante en estas investigaciones

Las funciones indicadas toman significado en una gran variedad de contextos que se pueden denominar con carácter general: *contexto cardinal*, *contexto ordinal y con-*

texto figurativo. El uso de los números naturales en contextos cardinal y ordinal forman parte de la actividad cotidiana de las personas pues se presentan en multitud de fenómenos y situaciones (Cokroft, 1985); en nuestra sociedad actual es mucho menos frecuente la presencia de contextos figurativos.

El interés sobre la competencia numérica de las personas es considerable en la sociedad actual, por ello el sistema escolar dedica gran cantidad de tiempo y esfuerzo en proporcionar a los escolares aprendizajes sobre la estructura de los números naturales.

Consideramos que el dominio de la estructura de los naturales requiere de un dominio de diferentes sistemas de representación, que activen diferentes funciones cognitivas y se combinen ante contextos y situaciones en los que intervienen diferentes niveles de complejidad. Desconocer uno de los sistemas de representación aunque se dominen los otros, supone un conocimiento deficiente de los números naturales, ya que hay relaciones estructurales entre números y cuestiones significativas que no se podrán abordar si se desconoce el sistema apropiado para ello.

Los contextos, ordinales y cardinales son frecuentes en el medio extraescolar y se le da importancia, por ello, en el medio escolar. Los término *cardinalidad* y *ordinalidad* son familiares en el mundo de la enseñanza. Sin embargo, el contexto figurativo del número, sólo se emplea durante un breve segmento temporal del aprendizaje en la etapa Infantil y se abandona un trabajo sistemático en estos contextos cuanto se introduce el sistema decimal de numeración, tomándolo de forma esporádica, para el trabajo con algún concepto numérico aislado.

Tratamos de poner de manifiesto, en estas reflexiones, el interés que tiene el contexto figurativo y la potencialidad que encierra para un trabajo matemático diferente.

Trabajo realizado

Tomamos como referencia el marco general que hemos descrito. Nos proponemos como el objetivo poner de manifiesto la comprensión que manifiesta un grupo de escolares de 14 años de edad de las nociones de estructura de un número, patrones y relaciones numéricas, sucesiones y término general de una sucesión cuando se incorpora un sistema ampliado de simbolización para los números naturales. Dicho sistema de representación destaca por su carácter figurativo y proporciona un notable apoyo visual.

Tratamos de analizar el uso de la representación figurativa de números en el aprendizaje de sucesiones de números naturales. Todo ello a través del estudio de producciones de los sujetos en tareas especialmente programadas. Con este fin incorporamos un factor visual, utilizando configuraciones puntuales y desarrollos aritméticos para expresar los términos de las sucesiones.

Sobre la investigación

Método. El método empleado para lograr nuestros fines ha seguido una estrategia de Investigación-Acción, que proporciona comprensión de todo el proceso, tanto de preparación de material curricular, su implementación el aula (mostrando la interrelación entre profesor, investigador, alumno y contenido matemático) y la comprensión de los estudiantes de los contenidos tratados.

Sujetos. Los sujetos que participaron en el estudio fueron 36 escolares de 14 años en el sistema de la Educación Obligatoria. Formaban grupo natural, es decir, un conjunto de alumnos agrupados en una misma clase de un mismo centro. El nivel socio-cultural de centro es medio-alto. Los géneros masculino y femenino están presentes, aproximadamente, en igual número.

Elementos de estudio. Aunque en una Investigación-Acción se estudia todo el proceso realizado, como hemos apuntado anteriormente, nos vamos a referir aquí a aquellos elementos relacionados con el contenido matemático trabajado. Se consideraron tres elementos de estudio: uno relacionado con el tipo de sucesión, otro con procedimientos ligados al trabajo con las sucesiones y otro relacionado con los sistemas de representación.

Utilizamos para los términos *secuencia* y *sucesión* las siguientes definiciones:

◊ *Secuencia:* Ordenación lineal de las unidades constituyentes de un conjunto o colección.
◊ *Sucesión:* Aplicación cuyo dominio es el conjunto de los números naturales.

Se consideran, para este estudio, sucesiones de números naturales lineales, también llamadas progresiones aritméticas y sucesiones de números naturales cuadráticas, cuyas leyes vienen dadas, respectivamente, por los polinomios:

$$a_n = an + b$$

$$a_n = an^2 + bn + c\,.$$

A efectos de dominio no consideramos incluido el 0. Los coeficientes a, b, y c toman valores enteros de manera que los distintos valores de la sucesión a_n sean números naturales.

Por otra parte, se han tomado cuatro procedimientos que se trabajan al comienzo del aprendizaje de las sucesiones:

i) dados los primeros términos de una sucesión, continuar con otros inmediatos;
ii) dados los primeros términos de una sucesión, interpolar un término próximo;
iii) dados los primeros términos de una sucesión, describir la expresión del patrón que hace posible la sucesión;
iv) dado el término general de una sucesión, obtener los primeros términos.

Las sucesiones, tanto lineales como cuadráticas, se presentaron a los escolares mediante tres sistemas de representación: sistema numérico usual, desarrollo aritmético y representaciones puntuales. Ejemplos de estos tres tipos de representaciones, se pueden apreciar en la sucesión de números impares que aparece en la figura 5.

Numérico usual	1	3	5	7
Desarrollo aritmético	1	1+2	2+3	3+4
Representación puntual	•	• • •	• • • • •	• • • • • • •

Figura 5: Secuencia de los números impares presentada en tres tipos de representación

Las progresiones aritméticas (primeras diferencias constantes) admiten una representación estructurada compartida por medio de configuraciones puntuales rectangulares, (o alguna variación de la misma), de base o altura constantes; de este modo sus términos pueden analizarse mediante una composición de líneas de puntos y el paso de un término a otro superior se hace por agregación de una nueva línea (fila o columna), que expresa la diferencia constante entre dos términos consecutivos de la sucesión. Las sucesiones de números tanto pares como impares, son ejemplos de ellas (figura 5).

Para las sucesiones cuadráticas (de diferencias segundas constantes) la representación por medio de configuraciones puntuales, sistemas de representación que estamos tomando, conlleva que las dos dimensiones de la figura sean variables; el paso de un término al siguiente requiere del aumento en las dos dimensiones de la figura estructurada y compartida que se esté considerando. Estos números, al satisfacer una *ley cuadrática*, responden a una estructura *multiplicativa de dos dimensiones*. El paso de un término de la sucesión al siguiente no es constante sino que es variable siendo esa variación lineal. Ejemplos de sucesiones cuadráticas son las sucesiones de números poligonales; números triangulares (figura 3), números cuadrados (figura 4).

Tipos de Tareas. Las tareas preparadas y en las que los alumnos han de trabajar giran en torno a los diferentes procedimientos que se han enunciado: continuar una sucesión, interpolar términos en una sucesión, buscar el patrón que siguen los términos de una sucesión, realizar cambios de representación y expresión del término general de una sucesión, hallar primeros términos a partir del término general. Ejemplos de tareas:

Tarea A

1º	2º	3º	4º	...	8º
•	• • •	• • • • •	• • • • • • •		

Para esta secuencia puntual:

- ◊ *Dibuja el término siguiente*
- ◊ *Dibuja el término que ocupa el lugar 8º*
- ◊ *Escribe debajo de cada dibujo el número que representa*
- ◊ *Escribe debajo de cada número su desarrollo aritmético, de acuerdo con la figura.*

Tarea B

En la tabla aparecen los tres primeros términos de una secuencia numérica.

1º	2º	3º
1+2+3+4	2+3+4+5	3+4+5+6

◊ Copia esta secuencia y escribe el término siguiente
◊ Escribe el término 10º
◊ Representa de forma puntual esta secuencia de números

Datos

Los datos recogidos son de tipo cualitativo y su procedencia es variada, entre ellos destacamos:

- ◊ documentos escritos por el investigador que recogen la preparación del desarrollo de las sesiones en clase;
- ◊ documentos escritos que contienen las reflexiones del grupo investigador realizadas en las reuniones mantenidas para puestas en común y toma de decisiones;
- ◊ notas de campo tomadas por el investigador y/o por el profesor del curso en el transcurso de las sesiones;
- ◊ documentos escritos por los alumnos con los resultados de las tareas propuestas;
- ◊ documentos filmados de todas las sesiones desarrolladas en clase.

Análisis de los datos

Para analizar e interpretar la información recogida es necesario codificarla, para lo que se utilizó un sistema de categorías que hacen posible un proceso básico de sistematización de la información, de acuerdo con unos criterios prefijados. Dado que los datos tenían procedencia diversa fue necesario elaborar un sistema de categorías compuesto de tres subsistemas, cada uno de estos subsistemas es adecuado para el análisis de una parte específica de los datos.

Análisis de una tarea

Entre las tareas trabajadas se encontraba la siguiente:

Analiza la siguiente secuencia y realiza las tareas que se indican a continuación

1º	2º	3º	4º	...	nº
• • •	• • • • • • • •	• • • • • • • • • • • • • • •	• •		

◊ *Indica como será el término de la casilla nº*
◊ *Escribe debajo de cada figura el número que representa*
◊ *Debajo de estos números escribe el desarrollo aritmético que se corresponde con la figura.*

Aunque en la tarea no se hable de ello, en los tres apartados hay que escribir en la casilla nº el término general de la sucesión, en cada caso en un sistema de representación distinto. El análisis de los resultados muestra que:

En el primer apartado de la tarea, se trata de indicar cómo es la figura que ocupa la casilla de lugar n. Ya se había hablado, al resolver otra tarea anterior, de la imposibilidad de dibujar la figura en casos similares a este, y se había comentado el *truco* de dibujar unos puntos suspensivos en los que se indica la cantidad que se quiere y no se puede materialmente poner. Aún así, sólo nueve alumnos rellenan el cuadro reservado a nº, 5 alumnos indican que el lado del cuadrado hay que poner n puntos y 4 alumnos indican que hay que poner $n+1$ puntos. En estas respuestas se observa que ya algunos alumnos, con más o menos acierto, han obtenido una generalización del patrón que sigue la secuencia.

En respuesta al segundo apartado, todos los alumnos (36) escriben la secuencia 3, 8, 15, 24. Para el último término de esa fila, en donde hay que escribir el término general, los estudiantes escriben expresiones muy diferentes, algunas de dichas expresiones se recogen en la tabla 5.

Término nº	$n(n+1)+n$	n^2+2n	$(n+1)^2-1$	n^2-1	n	nada
Frecuencia	1	2	1	1	19	9

Tabla 5: Expresiones del término general a partir de la secuencia numérica usual

En el tercer apartado, hay que escribir los desarrollos de los números de acuerdo con la figura, se obtienen, entre otros, los siguientes resultados:

◊ 12 alumnos dan como secuencia de desarrollos: $2^2–1$, $3^2–1$, $4^2–1$, $5^2–1$ al peguntarles porqué escriben esto indican que la figura es un cuadrado al que le falta un punto en el vértice (caso 1, figura 6).
◊ 11 alumnos han dado la secuencia desarrollada así: $1+2$, $2+3+3$, $3+4+4+4$, $4+5+5+5+5$. Estos alumnos ven la representación como una agregación de filas o columnas de puntos (caso 2, figura 6).
◊ 12 alumnos han dado la secuencia: $1+(2\times1)$, $2+(2\times3)$, $3+(3\times4)$, $4+(4\times5)$; esto se corresponde como si la figura fuese un rectángulo, en el que los lados se diferencian en un punto, al que se le une una línea igual al lado menor (caso 3, figura 6).
◊ 4 alumnos dan le secuencia de desarrollos así: $2^2+(2\times2)$, $3^2+(2\times3)$, $4^2+(2\times4)$, $5^2+(2\times5)$ esto corresponde a ver la figura como un cuadrado de lado una unidad menor al que se le unen una fila y una columna igual al lado (caso 4, figura 6)

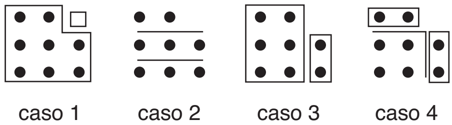

Figura 6

Cuando escriben el lugar nº de esta secuencia de desarrollos hacen, entre otras, lo que se recoge en la tabla 6

Término nº	$n(n+1)+n$	n^2+2n	$(n+1)^2-1$	n^2-1	n	nada
Frecuencia	6	4	1	9	2	0

Tabla 6: Expresiones del término general a partir de los desarrollos aritméticos de los números

La comparación de las frecuencias que aparecen en las tablas 5 y 6 es de gran interes por las enseñanzas que nos proporcionan. Colocamos juntas dichas frecuencias para que la comparación se pueda hacer con más facilidad.

Término nº	$n(n+1)+n$	n^2+2n	$(n+1)^2-1$	n^2-1	n	nada
Frecuencia (5)	1	2	1	1	19	9
Frecuencia (6)	6	4	1	9	2	0

Tabla 7: unión de las tablas 5 y 6

Destacan varios hechos:

- ◊ La diferencia de alumnos que dejan la casilla en blanco en el caso de seguir la secuencia escrita de forma usual, son nueve, en el caso de seguir la secuencia en forma de desarrollo numérico, ningún alumno lo deja en blanco.
- ◊ Pasan de 19 a 2 los alumnos que indican que el término n-simo es n cuando se cambia de sistema de representación, de numérica usual a desarrollo aritmético. El término general se expresa en el mismo sistema de representación que tiene la secuencia. Si la secuencia está representada en forma numérica usual se identifica con n, si la secuencia está escrita en forma de desarrollo aritmético, el termino de lugar nº tiene *otra* expresión.
- ◊ En la tabla 7 se aprecian en la columna encabezada por n^2-1 un aumento de ocho respuestas, un análisis de su procedencia muestra que uno viene de *nada* en la situación anterior y siete de n.
- ◊ Aparecen tres expresiones diferentes y correctas para el termino general, al ser equivalentes dichas expresiones permiten trabajar pasando de unas a otras con lo que se introduce y favorece las operaciones dentro de las expresiones algebraicas.

Conclusión

Las acciones de abstraer y generalizar son propias del pensamiento humano, el trabajo matemático exige de la abstracción y la generalización, se puede decir que estas son acciones genuinas del trabajo matemático. Para el estudio sucesiones de números naturales, obtener el término general de la sucesión requiere percibir el patrón común que tienen los términos de la sucesión, abstraer dicho patrón, describirlo y representar el mismo en forma algebraica (forma abstracta). Además, la sucesión viene dada mediante un sistema de representación (numérico usual) y la expresión del término general, en un lenguaje algebraico (representación en desarrollo aritmético) está dentro de un sistema de representación distinto, esto hace que el procedimiento de hallar dicho término general presente un obstáculo, a veces, insuperable, para los escolares. La representación de la sucesión mediante los tres sistemas que hemos utilizado se muestra adecuada (la representación puntual juega de enlace entre las otras dos) para iniciar el estudio de las situaciones. Con posterioridad se proseguirá con un estudio más sistemático del tema.

Referencias

Castro, E, 1995. *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Comares. Granada.

Bell, A. Costello, J. Küchemann, D. 1983. *Research on Learning and Teaching. A review of Research in Mathematical Education.* NFER-NELSON. Windsor. England.

Cockcroft, W. 1985. *Las Matemáticas sí cuentan*. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid.

Croosly, J.1987. *The emergente of Number*. World Scientific. Singapore.

Devlin, K.1994. *Mathematics: The Science of Patterns.* Scientific American Library. New York.

Dhombres, J. 1987. *Mathématiques au fil des Ages*. Gauthier-Villar. París.

Duval, R. 1995. *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales.* Traducido por la Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Educación Matemática. México

Dossey, J. 1991. Discrete Mathematics: The Math for Our Time. En: *Discrete Mathematics across the Curriculum k-12*. NCTM. Reston Virginia.

Eves, H. 1976. *An introduction to History of Mathematics*. Saunders College P. New York.

Fischbein, 1987. *Intuition in Science and Mathematics*. Reidel Publishing Company. Dordrecht.

Guitel, G. 1975. *Histoire Comparée des Numérations Écrites*. Flammarion Éditeur. París VI e. París.

Heath, T. 1981. *A History of Greek Mthematics*. Dover. New York.

Hogben, L. 1966. *El Universo de los Números*. Destino Barcelona.

Ibarra, A; Mormann, T. 2000. *Variedades de la representación en la ciencia y la filosofía*. Ariel. Barcelona.

Janvier, C. 1987. Traslation Proceses in mathematics Education. En Janvier (ed.). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. LEA, Hisllsdale. New Jersey.

Lesh, R. Post, T. Behr, M. 1987. Representation and Translation among Representation in Mathematics. En Janvier (ed.). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics.* LEA, Hisllsdale. New Jersey.

National Council of Teacher of Mathematics. 1989. *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática.* Traducción a la lengua castellana por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Sevilla.

National Council of Teacher of Mathematics. 2000. *Principios y estándares para la Educación Matemática.* Traducción a la lengua castellana por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Sevilla.

Kaput, J. 1987. Representation Systems and Mathematics. En Janvier (ed.). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics.* LEA, Hisllsdale. New Jersey.

Radfort, L. 2004. *Semiótica cultural y cognición*. Conferencia plenaria dada en la Decimoctava Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Universidad Autónoma de Chiapas, Tuxtla Gutiérrez, México. http://www.laurentian.ca/educ/lradford/

Romberg, T. Fennema, E. Carperter, T. 1993. *Integrating Research on the Graphical Representation of Function.* LEA. Hillsdale. New Jersey.

Silvermann, E. (ed.) 1990. Group de Star Patterns. Ideas, *Arithmetics Teacher*, nº 9,

Wittrok, M. 1974. A Generative Model of Mathematics Learning. *Journal for Research in Mathematics Education*. November; pp. 181–196.

Zalewski, C. 1991. Strengthening a k-8 Mathematics Program with Dicrete Mathematics. En *Discrete Mathematics across the Curriculum k-12*. NCTM. Reston Virginia.

Zimmermann, W. Cunningham, S. 1991. Visualization and the Nature of Mathematics. En Zimmermann, y Cunningham (eds.). Visualitation in Theaching and Learning Mathematics. MAA NOTES NUMBER 19.