Raciocínio Proporcional[1]

Richard Lesh, *WICAT Systems*
Thomas Post, *University of Minnesota*
Merlyn Behr, *Northern Illinois University*

Resumo. Neste capítulo, tentámos desenvolver uma estrutura coerente que salientasse os principais conhecimentos produzidos em pesquisas anteriores e que tenham envolvido o raciocínio proporcional. Também tentámos focar a nossa atenção sobre algumas categorias de tarefas negligenciadas e sugerir novas a serem investigadas e desenvolvidas em futuras investigações. Foi dada atenção às dificuldades de clarificação da linguagem porque, no domínio do raciocínio proporcional, a terminologia confusa e inconsistente é um sério impedimento à investigação e avanços futuros.

Quer olhemos o raciocínio proporcional como o culminar da matemática elementar ou como alicerce da matemática avançada, questões semelhantes se colocam. Esta invariância está relacionada com as transformações, as equivalências e as traduções em e entre os vários sistemas de medida e sistemas de representação. Embora os psicólogos do desenvolvimento tenham tendência a falar sobre o raciocínio proporcional como se ele fosse uma aptidão global relacionada com parte da estrutura cognitiva global, a investigação em educação matemática mostra claramente que a evolução do raciocínio proporcional é caracterizada por um desenvolvimento conceptual local que proporcionará conhecimentos incontornáveis sobre os mecanismos pelos quais as crianças evoluem até raciocínios de ordem superior. O raciocínio proporcional parece constituir uma área de investigação especialmente fértil para estudar este fenómeno.

O raciocínio proporcional é uma forma de raciocínio matemático que envolve o sentido de co-variância e múltiplas comparações, assim como a aptidão para reunir e processar mentalmente diversos conjuntos de informação. O raciocínio proporcional está relacionado com inferência e predição e envolve o pensamento qualitativo e quantitativo.

Na nossa investigação considerámos que as principais características do raciocínio proporcional envolvem o raciocínio sobre as relações holísticas entre duas expressões racionais, tais como, taxa, razão, quociente e fracção. Isto abrange invariavelmente a apropriação e a síntese mentais dos vários complementos destas expressões e uma aptidão para inferir sobre a igualdade ou desigualdade de pares ou séries dessas expressões, baseada na análise e na síntese. Também envolve a habilidade

[1] Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportinal reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.) *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 93-118). Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics.
Tradução de Ana Isabel Silvestre, Escola EB 2,3 de Fernão Lopes e Revisão da tradução, Fátima Álvares, Escola EB 2,3 de Fernão Lopes.

de produzir com sucesso as componentes omissas, independentemente dos aspectos numéricos do problema. Esta perspectiva não tem sido geralmente utilizada pela comunidade de investigadores.

Todas as pessoas que resolvem um problema sobre proporções não usam necessariamente o raciocínio proporcional. De facto, podem observar-se relações numéricas simples (se A é três vezes B, X deve ser três vezes D) ou usar um algoritmo como o do produto cruzado. Para resolver proporções do tipo $\frac{A}{B} = \frac{x}{D}$, ensina-se frequentemente aos alunos o uso do método do produto cruzado $A \times D = x \times B$ onde $x = \frac{A \times D}{B}$; contudo a investigação e a experiência mostraram consistentemente que este método é (a) mal compreendido pelos alunos (Post, Behr & Lesh, 1988), (b) raramente "gerou naturalmente" um método de resolução (Hart, 1984) e é (c) frequentemente usado pelos alunos mais para evitar o raciocínio proporcional do que para o facilitar. Nós sugerimos neste documento que o uso deste procedimento impossibilita o uso do raciocínio proporcional e não envolve só por si o raciocínio proporcional. Portanto nós preferimos falar de problemas sobre proporcionalidade em vez de problemas sobre raciocínio proporcional.

Consideramos o raciocínio proporcional com um conceito pivot. Por um lado, é o *culminar* dos alunos da escola primária e por outro lado, é o *alicerce* de tudo o que segue. Este capítulo discute esta construção a partir das duas perspectivas indicando aquilo que acreditamos serem os mecanismos de transição e o comportamento dos alunos. Exploramos depois os requisitos para a base de um modelo computacional de soluções de problemas sobre proporções e discutimos as condições, sob as quais este modelo pode produzir soluções aceitáveis. Finalmente, colocamos questões sobre as implicações que este modelo poderá desencadear em futuras investigações com alunos.

Tentativas anteriores para avaliar a aptidão ao nível do raciocínio proporcional (Karplus, Pulos & Stage, 1983a, 1983b; Noelting, 1980a, 1980b) focaram-se quase sempre em respostas individuais a problemas de valor omisso. Os alunos que foram capazes de responder com sucesso a questões numéricas "difíceis", com múltiplos de números não inteiros dentro e entre os pares da razão foram considerados de nível elevado, e as suas respostas foram consideradas com resultantes de um raciocínio proporcional. Acreditamos que esta é uma perspectiva limitada, condição necessária mas não suficiente, especialmente quando os problemas fornecem soluções puramente algorítmicas. Este capítulo pretende ampliar este ponto de vista e sugerir que o raciocínio proporcional abrange um espectro mais amplo e complexo das aptidões cognitivas que incluem tanto uma dimensão matemática como uma dimensão psicológica.

Contudo, de acordo com Piaget (Piaget & Inhelder, 1975), a principal característica do raciocínio proporcional é a que envolve mais a relação entre duas relações (i.e., a relação de "segunda - ordem") mais do que a simples relação entre dois objectos concretos (ou duas grandezas directamente perceptíveis). Por exemplo, os seguidores de Piaget, consideraram as questões *balance-beam* como protótipo de questões sobre raciocínio proporcional, embora o raciocínio envolvido não seja adequado à equação $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ antes se adequa à equação $A \times B = C \times D$. De facto, os seguidores de Piaget argumentam que numa fase inicial, as capacidades de raciocínio proporcional das crianças envolvem frequentemente "raciocínio aditivo" na forma $A - B = C - D$. Acreditamos que é desejável restringir a expressão " raciocínio proporcional" a vários aspectos das relações multiplicativas entre expressões racionais.

Nas ciências da educação, Karplus et al. (1983a, 1983b) representam ainda uma terceira perspectiva, afirmando que o raciocínio proporcional deve envolver a relação linear entre duas variáveis. Assim as questões caracterizadas por relações do tipo $y = mx$ são consideradas como tarefas sobre proporções (que na verdade são), mesmo que os dois lados da equação não sejam simétricos. As tarefas do tipo $y = \frac{a}{b}x + n$ devem ser diferenciadas das situações em que existe uma relação proporcional.

O principal objectivo deste capítulo será classificar e clarificar aspectos do raciocínio que preservam o significado matemático desta expressão e qual a investigação que se tem mostrado significativa dos pontos de vista matemático e psicológico. Outro objectivo será identificar áreas negligenciadas pela investigação sobre o raciocínio proporcional.

Alguns tipos importantes de tarefas sobre raciocínio proporcional

Considerações subjacentes a muitos dos mais elementares conceitos usados em ciência, na matemática e à resolução de problemas do quotidiano consistem muitas vezes em reconhecer modelos similares ou similaridades estruturais em duas situações diferentes. Porque o raciocínio proporcional lida com uma das mais comuns formas de semelhança estrutural, é frequentemente associado a alguns dos conceitos mais importantes e elementares mas profundos ao nível da formação conceptual em muitos campos da ciência ou da matemática. Como dissemos anteriormente, acreditamos que o raciocínio proporcional é o culminar da aritmética elementar e o alicerce de tudo o que se segue. Consequentemente ocupa uma posição pivot nos programas escolares de Matemática (e das Ciências).

Como cada domínio do conhecimento usa este paradigma básico de raciocínio, ele tende a ser modificado subtilmente de forma a responder ás necessidades específicas da disciplina. Por exemplo, no currículo de aritmética da *middle school*[2], formas ligeiramente diferentes de raciocínio proporcional estão relacionadas com alguns dos principais *trouble spots* conceptuais no currículo:

- (equivalência) fracções:	5/3 = n/m
- divisão longa:	805/23 = n/1
- valor de posição e percentagem	n% = 75/100
- conversão métrica	n dólar = (2/3) m dólar canadiano
- razão e taxa:	15 pés / 2 segundos = n milhas por hora

Nos tipos precedentes de áreas (tópicos) centrais, surgem naturalmente sete tipos de problemas sobre proporções. Todavia, os problemas do tipo 3 até ao 7 têm sido negligenciados na instrução centrada no manual e na investigação.

1. Problemas de valor omisso

   $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ no qual três valores são conhecidos (incluindo um par completo) e o objectivo é encontrar a parte omissa da segunda (e equivalente) razão.

2. Problemas de comparação

   $\frac{A}{B}$ <= ? => $\frac{C}{D}$, em que são dados os quatro valores e o objectivo é avaliar qual das situações é verdadeira: $\frac{A}{B} < \frac{C}{D}$ ou $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ ou $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$.

[2] Escolas dos EUA que têm usualmente alunos do 6º ao 8º ano de escolaridade.

3. Problemas de transformação

   (a) Alteração de raciocínio: É dada uma equivalência forma $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

   Depois aumenta-se ou diminui-se uma certa quantidade de um ou dois dos quatro valores A, B, C ou D e o objectivo é decidir qual a relação (<, > ou =) que é agora verdadeira.

   (b) Transformações para obter uma igualdade: É dada uma desigualdade sob a forma $\frac{A}{B} < \frac{C}{D}$. Depois, para um dos quatro valores A, B, C ou D, um valor x deve ser determinado, de modo a que, por exemplo $\frac{(A+x)}{B} = \frac{C}{D}$.

4. Problemas do valor médio

   São dados dois valores e o objectivo é encontrar um terceiro:

   (a) Média geométrica: $\frac{A}{x} = \frac{x}{B}$;

   (b) Média harmónica: $\frac{A}{B} = \frac{(A-x)}{(x-B)}$.

5. Proporções que envolvem a conversão entre razão, taxa e fracções

   A razão entre rapazes e raparigas na turma é de 15 para 12. Qual é a fracção de rapazes na turma?

6. Proporções que envolvem unidades de medida assim como números

   $\frac{3 pés}{2 segundos} = \frac{x milhas}{1 hora}$ ou $\frac{5 pés}{1 segundo} = \frac{x milhas}{1 hora}$.

7. Problemas de conversão entre sistemas de representação

   A razão (fracção, taxa ou quociente) é dada num sistema de representação e o objectivo é representar essa mesma relação noutro sistema de representação.

Os problemas sobre raciocínio proporcional baseados na vida real envolvem frequentemente comparações entre sistemas de representação. Descobrimos que estas tendem a ser surpreendentemente difíceis para a maioria dos alunos (Lesh, Behr & Post, 1987).

Mesmo quando os dois lados de uma proporção envolvem o mesmo sistema de representação, as soluções apresentadas pelos alunos envolvem frequentemente a tradução entre vários sistemas de representação. Por exemplo, consideremos o problema apresentado em texto (figura 1). Encontrámos uma taxa de sucesso de cerca de 9,2% para alunos do quarto ano e de 46,2% para alunos do oitavo ano.

Um aluno pode pensar sobre o problema da figura 1:

(a) Parafraseando (isto é, traduzindo em linguagem mais simples): quinze está para cinco como…está para... .

(b) Desenhando um diagrama (isto é, traduzindo numa imagem ou diagrama):

1ªHORA	2ªHORA	3ª HORA	4ª HORA	5ª HORA
MMMMM	MMMMM	MMMMM	MMMMM	MMMMM

(c) Escrevendo uma equação (isto é, traduzindo em linguagem simbólica): $\frac{15}{5} = \frac{m}{h}$.

Assim, mesmo quando um problema parece estar representado apenas num sistema de representação, a sua solução pode envolver várias conversões entre sistemas.

A Susana pode andar 15 milhas em 5 horas.

A razão entre milhas por hora é de:

a) 5 para 15

b) 10 para 5

c) 3 para 1

d) nenhuma das alíneas anteriores

Fig. 1 – Problema típico em texto sobre proporções

O raciocínio proporcional é um conceito fundamental

no desenvolvimento matemático dos alunos

Para determinar quais os aspectos do raciocínio proporcional que devem ser futuramente enfatizados, é importante reconhecer o seu papel de "conceito *watersherd*[3]", enquanto fronteira que separa os conceitos elementares dos conceitos mais complexos. Isto é, constitui (1) um dos mais elementares conhecimentos de alto nível e (2) um dos conhecimentos elementares de nível mais elevado. Por exemplo, para a psicologia da aprendizagem humana, o raciocínio proporcional é amplamente conhecido como uma capacidade que conduz ao deslocamento conceptual significativo dos níveis operacionais do pensamento concreto para os níveis operacionais formais do pensamento (Piaget & Beth, 1966).

As duas próximas secções deste capítulo analisam o raciocínio proporcional através de duas diferentes perspectivas:

(1) O raciocínio proporcional como alicerce da álgebra e de outras áreas avançadas da matemática.
(2) O raciocínio proporcional como culminar dos conceitos de aritmética elementar, de número e de medida.

O raciocínio proporcional como charneira da matemática do ensino secundário

No problema anterior (ver Figura 1), suponhamos que queríamos saber a distância que a Sue andaria em 3 horas. Este problema pode ser resolvido em três etapas:

(a) Escrever uma equação que descreva o problema, por exemplo, $\frac{15}{5} = \frac{m}{3}$.

(b) Transformar a forma "descritiva" da equação numa forma "computacional" equivalente, por exemplo, $m = 3 \times \frac{15}{5}$.

(c) Calcular, realizando as operações indicadas: $m = 3 \times 3 = 9$.

[3] *watershed = important historical change of course or one on which important developments depend* (in British Encyclopaedia *online*).

O procedimento descrição-transformação-cálculo é uma das características que diferencia a álgebra da aritmética. Note-se que não é necessário que a equação que descreve ou modela o problema especifique imediatamente uma série de cálculos para apresentar uma resposta. Na álgebra, as fases de descrição e de apresentação da solução na resolução de um problema podem ser separadas. Na aritmética, os alunos geralmente realizam uma série de procedimentos de cálculo para produzir uma resposta.

Inerentemente o raciocínio proporcional envolve alguns dos mais importantes conhecimentos algébricos relacionados com equivalência, variáveis e transformações. Discutiremos cada um em separado:

Níveis de equivalência. Os seguintes tipos de equivalência ocorrem frequentemente em situações relacionadas com proporção:

(a) Números equivalentes ou razões equivalentes, por exemplo, $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{3}{9}$.

(b) Expressões equivalentes que apresentam números e unidades de medida, por ex., $\frac{quilometro}{metro}=\frac{1000}{1} \Leftrightarrow$ 1 quilometro = 1000 metros.

(c) Expressões equivalentes que envolvem relações e/ou operações assim como números e unidades de medida, por ex., $\frac{6pés}{2segundos}=3$ pés por segundo = 2, 0455 milhas por hora.

(d) Equações equivalentes, p. ex., $\frac{2}{x}=\frac{x}{18} \Leftrightarrow x^2 = 2\times 18 \Leftrightarrow x = 6$ nas quais as transformações preservam propriedades importantes e modificam outras.

Na aritmética, o símbolo igual (=) geralmente significa “resultado de “ ou “dá” (por exemplo, quando a equação 5-3=2 é lida como “cinco menos três dá dois). Na álgebra, contudo, o símbolo “=” significa frequentemente um tipo mais geral de equivalências. Por exemplo, duas expressões podem ser tratadas como equivalentes por algumas das seguintes razões:

(a) São redutíveis ao mesmo valor, p. ex.: 6/2 = 4 -1.

(b) São estruturalmente similares; isto é: envolvem o mesmo padrão de relações e operações, p. ex.: $\frac{(y-b)}{(x-a)}=\frac{(d-b)}{(c-a)}$.

(Naturalmente isto é verdadeiro apenas para certos valores das variáveis.)

(c) Têm gráficos idênticos em conjuntos de medida não nula, p. ex.: $f(x) = 2 \times \frac{2}{3} x$ e $g(x) = \frac{2x}{3}$.

(d) Os seus gráficos cortam o eixo x nos mesmos pontos.

(e) Uma expressão pode ser substituída por outra sem ganhar (ou perder) informação relevante.

Uma compreensão do raciocínio proporcional deve ir além da simples noção de que dois lados de uma equação são iguais (no sentido de serem redutíveis ao mesmo valor). Por exemplo, a nossa intuição diz-nos que uma equação como "$\frac{6}{2} = 4 - 1$" não devia ser chamada uma proporção (mesmo que os seus dois lados sejam iguais) porque os dois lados da equação não são estruturalmente similares; isto é, não envolvem o mesmo padrão de relações ou de operações e as suas componentes não estão multiplicativamente relacionadas.

O reconhecimento de uma similaridade estrutural parece ser uma componente essencial para que ocorra o raciocínio proporcional. Contudo, se exigirmos que o reconhecimento de uma estrutura similar seja uma condição necessária para que o processo de raciocínio seja designado como raciocínio proporcional, então, globalmente, as tarefas modeladas pela equação $y = \frac{a}{b} x$ mas que não são modeladas pela equação $\frac{y}{x} = \frac{a}{b}$ não devem ser interpretadas como envolvendo raciocínio proporcional, mesmo que $y = \frac{a}{b} x$ e $\frac{y}{x} = \frac{a}{b}$ sejam parcialmente, mas não globalmente, equivalentes.

Níveis de variáveis. Adicionalmente ao envolvimento de vários níveis de equivalência, as simples situações de raciocínio proporcional podem envolver vários níveis de variáveis. Não é simplesmente a aptitude para variar que torna algo numa variável. Por exemplo:

(a) Em muitas proporções simples, como $\frac{3}{x} = \frac{x}{27}$, o valor de x não pode variar; contudo isto não significa que x não seja uma variável. Aqui, o que é importante saber é que x é uma incógnita que pode ser manipulada usando regras similares às que se aplicam aos números.

(b) Por vezes, mesmo às constantes, como por exemplo Pi, pode ser atribuído uma escala de valores (p.ex.: $\frac{22}{7}$ 22/7 ou 3,14 ou 3,14159265356) dependendo do nível de precisão escolhido como apropriado a uma determinada situação. Contudo, isto não significa que Pi seja uma variável.

Assim o valor de um símbolo pode ser fixo, contudo o símbolo é uma variável; ou o valor do símbolo pode variar, embora o símbolo seja uma constante. Explicações demasiadamente simplistas, tais como tratar as variáveis como se elas fossem coisas que simplesmente podem variar trarão certamente confusão para as crianças.

Transformações e invariância. Para gerar um par de razões equivalentes a $\frac{3}{9}$, usa-se uma série de transformações como caminho de expressão para outra: $\frac{1}{3} \rightarrow \frac{3}{9} \rightarrow \frac{9}{27} \rightarrow \ldots$ .Ou para encontrar valor de x numa proporção como $\frac{3}{x} = \frac{x}{27}$, uma série de transformações são usadas como um caminho entre uma equação e outra: $\frac{3}{x} = \frac{x}{27} \rightarrow x = 27 \times \frac{3}{x} \rightarrow x^2 = 81 \rightarrow x = 9$. E, para alguns tipos de procedimentos levantam-se questões sobre o tipo de equivalência. Cada vez que um objecto é transformado, perde-se ou ganha-se alguma informação, a questão é saber se a informação alterada é de interesse. Que propriedades permanecem invariantes e quais não? Por exemplo, duas equações podem ser consideradas equivalentes por algumas das seguintes razões. (Lembremos que na secção anterior uma lista semelhante foi construída para as expressões.)

(a) Têm o mesmo valor lógico (p. ex., são ambos verdadeiros ou falsos).
(b) Têm o mesmo par solução (p. ex., o mesmo valor os satisfaz).
(c) Uma é a forma simplificada da outra.
(d) Podem ser transformadas uma na outra através de operações específicas.

Quando os professores tratam as transformações como “tudo está CERTO enquanto se faz a mesma coisa em ambos os lados da equação”, não deverá constituir qualquer surpresa que esta visão simplista conduza frequentemente a erros no raciocínio proporcional das crianças. Por exemplo, num dos nossos recentes estudos clínicos (Behr, Wachsmuth, Post & Lesh, 19?4), foi mostrado aos alunos um conjunto de igualdades como $\frac{3}{4}=\frac{6}{x}$. Foi então subtraído um dado número a um dos quatro números e foi pedido aos alunos para mudar um dos outros três números de modo a repor a igualdade (p.ex., $\frac{3-1}{4}=\frac{6-?}{8}$). Era usual o alunos simplesmente aumentar ou diminuíram ao número correspondente pela mesma quantidade em ambos os lados. De facto, um aluno até "provou" que $\frac{3-1}{4}=\frac{6-1}{8}$; ele apagou o número 1 em ambos os lados, explicando "Está certo, porque eu fiz o mesmo em ambos os lados!!"

A compreensão de que uma equação (como um todo) representa um "objecto" algébrico, que pode ser transformado em formas específicas que tornam invariantes certas propriedades interessantes (como o par solução) é a cerne do raciocínio algébrico. Isto também é essencial, de modo simplista, na resolução de proporções simples.

A equação $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ pode ser vista como um sistema estático (=) entre dois sistemas matemáticos simples que são descritos independentemente pelos valores das razões $\frac{A}{B}$ e $\frac{C}{D}$. Contudo, também pode ser vista como uma transformação dinâmica que guia um sistema matemático simples (descrito pela relação entre os valores da razão $\frac{A}{B}$) para outro sistema "equivalente" (descrito pela relação entre os valores da razão $\frac{C}{D}$). Parece-nos que o reconhecimento de uma semelhança estrutural é uma componente essencial do raciocínio proporcional. Deste modo as questões relacionadas com a transformação estrutural e a invariância deviam ser os assuntos importantes para o raciocínio proporcional, mesmo nos níveis mais elementares.

Apesar do que foi dito, as tarefas relacionadas com transformação e invariância têm sido negligenciadas na literatura de investigação sobre raciocínio proporcional, ainda que Piaget (Piaget & Inhelder, 1956) e outros tenham enfatizado a sua importância em certos tipos de tarefas sobre conservação.

Um dos motivos pelos quais as tarefas sobre transformação têm sido negligenciadas é a sua tendência para envolver acções dinâmicas que são difíceis de descrever nos manuais escolares e nos testes com formato de papel e lápis. A segunda razão é a sobrevalorização artificial da "determinação do x" no currículo da matemática do pré-secundário e no secundário. Esta ideia errada de que a essência da matemática é "ir à procura do x incógnito" é partilhada por muitos. Todavia, para compreender a essência do raciocínio proporcional é importante compreender que a matemática é essencialmente o estudo da estrutura e da invariância, da equivalência e da não equivalência sob a variedade das diferentes transformações. Na passagem dos alunos para níveis mais complexos da matemática, muito menos actividades de resolução de problemas se encaixam no estereótipo "determinação do x". Muitas mais se enquadram na categoria do estudo da estrutura-transformação-invariância.

Raciocínio proporcional como alicerce da Matemática da escola elementar

Muitos dos principais blocos conceptuais que levantam dificuldades no currículo da escola primária são críticos no contexto do raciocínio proporcional. Os exemplos incluem (1) relações parte-todo descritas por Kieren (1976) e Behr, Lesh, Post & Silver (1983); (2) unidades compostas (isto é, unidades construídas a partir de outras unidades) enfatizadas por Steffe (Steffe & von Glasersfeld, 1983; Steffe, neste volume), Cobb (1987) e Post *et al.* (1988); (3) aptidão para relacionar representações, enfatizada por Kaput (1987a; 1987b) e Lesh, Post e Behr (1987); e (4) aptidão para relacionar medidas, enfatizado por Vergnaud (1983), Streefland (1984, 1985), Post *et al.* (1988) e Kaput (1985). (Estas áreas foram identificadas por investigadores como conceitos subjacentes aos problemas anteriormente mencionados, parecendo estar todas relacionadas com a proporcionalidade e, em última instância, com o raciocínio proporcional.)

Raciocínio pré-proporcional. Se a característica mais crítica do raciocínio proporcional é reconhecer "a invariância de um sistema matemático simples", então é necessário que este sistema matemático seja sempre descrito como razão $\frac{A}{B}$? Ou os sistemas ser caracterizados por $A-B$ (ou $A \times B$ ou $A+B$) também qualificariam? Os sistemas matemáticos caracterizados por $\frac{A}{B}$ estão entre os mais simples que podem existir; eles envolvem relações entre as duas quantidades A e B. Deste modo, uma equação como $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ pode ser interpretada como uma relação "n vezes mais" aplicada em ambos os lados.

A relação "n vezes mais" pode ser interpretada de dois modos distintos: (1) como relação aditiva $A = n \times B$ (isto é, $n = A - B$) ou (2) como uma relação multiplicativa $A = n \times B$ (isto é, $n = \frac{A}{B}$). Nesta última situação, é geralmente referido como "n vezes como". Em ambos os casos, raciocinar sobre estas situações é uma das mais simples situações em que as crianças vão além das comparações entre quantidade perceptíveis para pensarem sobre a semelhança estrutural entre sistemas matemáticos como um todo.

Por razões semelhantes às descritas anteriormente, tarefas como *balance-beam*, modeladas pela equação $A \times B = C \times D$ (melhor do que pela equação $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$), são por vezes referenciadas como tarefas sobre "raciocínio proporcional multiplicativo" e tarefas caracterizadas pela equação $A + B = C + D$ são usualmente consideradas como envolvendo raciocínio aditivo.

Questões caracterizadas por $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ ou $A \times B = C \times D$ tendem a envolver relações multiplicativas, mas será que envolvem raciocínio proporcional? Por regra respondemos que se não houver evidência que a criança reconhece a semelhança estrutural representada pelos dois lados da equação, então não há evidências de raciocínio proporcional. Por exemplo, se $A \times B$ corresponde a uma quantidade directamente perceptível (em vez da relação entre duas grandezas), então uma tarefa que podia ter sido aliás caracterizada como $A \times B = C \times D$, pode realmente ser reduzida (na mente da criança) a uma tarefa caracterizada por $P = C \times x$, em que P é um "novo" elemento do sistema. Neste caso, não é reconhecida a semelhança estrutural e o raciocínio proporcional não é requerido. Consequentemente a simples aptidão para responder correctamente a problemas com a forma $A \times B = C \times D$ não garante que esteja a se usado o raciocínio proporcional. O mesmo se aplica a problemas da forma $\frac{A}{B}=\frac{x}{D}$ (onde a posição de x põe variar).

Levantam-se preocupações semelhantes no que respeita a tarefas aditivas caracterizadas pelas equações $A + B = C + x$ ou $A - B = x - D$. Isto é, as tarefas em que estas equações são descritas tendem naturalmente a ser redutíveis às formas não proporcionais $P = C + x$ ou $P = x - D$, em que P é uma quantidade directamente perceptível.

Se o facto de as crianças tenderem a usar a adição para resolver problemas caracterizados por $\frac{A}{B} = \frac{x}{D}$ não é um indicador fiável do raciocínio proporcional, então porque é que os investigadores (especialmente psicólogos do desenvolvimento) referem o "raciocínio proporcional aditivo" na literatura de investigação? A resposta reside no facto de durante os primeiros estádios do desenvolvimento da compreensão do raciocínio proporcional, as estratégias aditivas serem frequentemente usadas para responder a tarefas em que deveriam ser usadas relações multiplicativas (Hart, 1984; Noelting, 1980a, 1980b; Vergnaud, 1983). Por exemplo, o seguinte excerto de uma entrevista mostra como o raciocínio aditivo emerge naturalmente (mas incorrectamente) durante uma das nossas investigações sobre tarefas multiplicativas.

Deu-se a um aluno do sétimo ano um rectângulo 2x3 (ver Figura 2) e pedindo-se-lhe para "o aumentar". O aluno respondeu (correctamente) dobrando o comprimento de cada lado para obter um rectângulo 4x6. Pediu-se-lhe depois: "amplia-o novamente de modo que a base seja 9". Desta vez o aluno respondeu desenhando um rectângulo 7x9, explicando: " se eu dobrasse, seria 12, por isso eu adicionei 3 e assim o outro lado é 9". Existe um conjunto de factos interessantes sobre esta situação. Primeiro, o raciocínio aditivo aparece frequentemente de modo "natural" como um estádio inicial do desenvolvimento do raciocínio proporcional. Segundo, o paradigma do raciocínio que a criança usa varia muitas vezes em função da tarefa dada (como no exemplo anterior) ou de uma tarefa para outra, dependendo em particular das características da tarefa tais como: complexidade das relações numéricas (Karplus *et al.*, 1983a, 1983b), distracção percentual (Berh *et al.*, 1983) e a localização da quantidade "desconhecida" (Bezuk, 1986), por exemplo $\frac{x}{B} = \frac{C}{D}$ *versus* $\frac{A}{x} = \frac{C}{D}$ *versus* $\frac{A}{B} = \frac{x}{D}$ *versus* $\frac{A}{B} = \frac{C}{x}$.

Geralmente, as tarefas caracterizadas por equações aditivas (isto é, $A - B = C - D$ ou $A + B = C + D$) não deveriam ser referidas como tarefas sobre raciocínio proporcional e mesmo as tarefas multiplicativas (como as tarefas de *balance-beam* ou tarefas anteriormente citadas sobre áreas) caracterizadas pela equação $A \times B = C \times D$ podem ser fracos indicadores do verdadeiro raciocínio proporcional, especialmente quando essas tarefas são relegadas para uma solução algorítmica. Assim, globalmente, “o raciocínio proporcional” é um termo reservado para a resolução de tarefas caracterizadas pela relação entre duas expressões racionais: isto é, $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$. Acreditamos, contudo, que esta é uma condição necessária mas não suficiente. Outros tipos de situações reflectem também uma verdadeira habilidade de raciocínio proporcional.

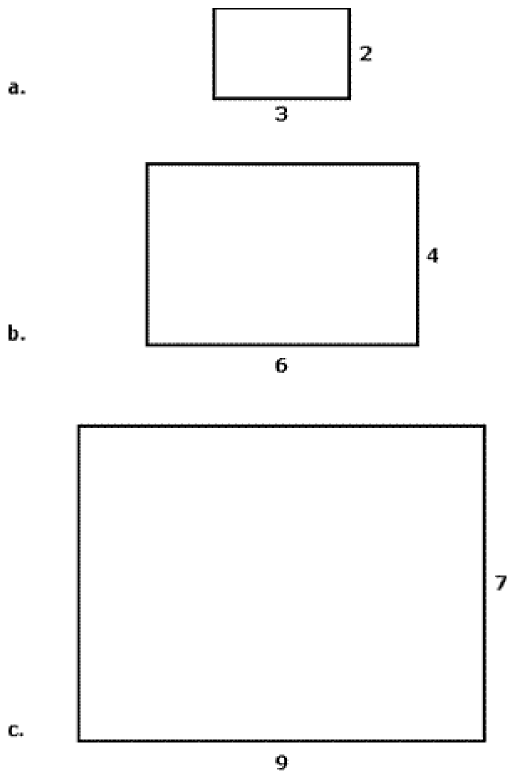

Figura 2 - Ampliação do rectângulo

Transição do raciocínio pré-proporcional para o raciocínio proporcional. Embora que Piaget e outros psicólogos do desenvolvimento falem frequentemente do raciocínio proporcional como se fosse uma aptidão global ou uma manifestação de uma estrutura cognitiva geral, parece que a evolução do raciocínio proporcional é caracterizado por um gradual aumento de competência local (isto é, Lesh, Post e Berh, 1987; Tourniaire & Pulos, 1985; Karplus e tal. 1983a, 1983b). A proporcionalidade é inicialmente dominada em pequenas e restritas classes de problemas. A competência é então gradualmente ampliada a classes maiores de problemas.

Nesta secção sugerimos que o a precedente “visão da progressão gradual da competência local” do desenvolvimento cognitivo tem importantes implicações para a investigação e instrução que envolvem raciocínio proporcional. Esta visão também proporciona uma orientação para a investigação e investigação relacionadas com a resolução de problemas.

O exemplo que discutimos ilustra alguns dos mais importantes mecanismos que permitem aos alunos desenvolver desde o raciocínio pré-proporcional (aditivo) até formas globais de raciocínio proporcional multiplicativo. O problema ilustrado na Figura 3 foi usado por Lesh mas suas investigações sobre o uso da matemática em contextos do quotidiano. O problema é particularmente interessante porque:

(a) as suas soluções validaram sequências de desenvolvimento do raciocínio proporcional, que foram supostas por Piaget (Inhelder & Piaget, 1958; Piaget, Grize, Szeminska, & Bang, 1968), Noelting (1980a, 1980b), Karplus et al. (1983a, 1983b), Karplus and Peterson (1970), Hart (1981) e muitos outros.

(b) As soluções mostraram como as estruturas que foram apresentadas para facilitar a evolução conceptual global podem também representar um papel importante na resolução de problemas.

Antes de considerarmos uma solução "típica" para este problema, será útil em primeiro lugar esboçar alguns dos mais importantes estádios que os psicólogos do desenvolvimento observaram na evolução do desenvolvimento global das capacidades de raciocínio proporcional nas crianças.

(a) Nas suas respostas mais elementares, os alunos tendem a ignorar parte dos dados, talvez, por exemplo, porque comparam os numeradores apenas na equação $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

(b) Num nível mais sofisticado, os alunos podem observar relações entre os quatro factores de uma proporção $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ mas podem relacioná-los apenas qualitativamente.

(c) Tentativas iniciais de quantificação quase sempre envolvem mais diferenças aditivas constantes (isto é, $A - B = C - D$) mais que relacionamentos multiplicativos.

(d) Inicialmente o uso do raciocínio multiplicativo é frequentemente baseado num tipo de estratégia "modelo de reconhecimento e replicação" , que alguns designaram como estratégia de "acumulação[4]" (Hart, 1984; Karplus & Peterson, 1970; Piaget et al., 1968). Por exemplo: Uma confeitaria vende 2 rebuçados por 8 cêntimos. Quanto custam 6 rebuçados? A solução pode ser registada como:

–2 rebuçados por 8 cêntimos

–4 rebuçados por 16 cêntimos

–6 rebuçados por 24 cêntimos

Dada uma tabela de valores, as crianças podem observar um padrão e aplicá-lo para determinar um valor desconhecido. Contudo, como indicámos no início do capítulo, o sucesso no uso desta estratégia é relativamente fraco enquanto indicador de raciocínio proporcional.

Piaget *et al.* (1968) referiram este estádio como "pré-proporcional" porque as crianças têm a intuição de que as diferenças mudam com o tamanho dos números e que a mudança pode ser de natureza multiplicativa, mas elas não constatam necessariamente que precisam de considerar um aumento constante entre os termos de cada par de taxa, isto é da razão. Segundo Piaget, a pré-proporcionalidade acontece por meio de funções de coordenação, enquanto que a proporcionalidade é baseada em operações reversíveis. A principal diferença entre pensamento baseado na função e pensamento ligado à operação é que o primeiro é essencialmente não reversível, isto é, dada uma alteração num dos quatro termos de uma proporção, a criança não é capaz de compensar alterando uma das restantes variáveis.

(e) As "proporções lógicas" de Piaget, indicam um nível de pensamento em que as relações multiplicativas entre os dois termos são identificadas, sendo a relação então aplicada aos outros dois termos.

Materiais: calculadora, catálogo Sears de há 10 anos, catálogo Sears actual, jornal de há 10 anos, jornal actual.
Alunos: Este problema foi resolvido individualmente pelos alunos ou em grupos de três, desde a escola media até à idade adulta. O grupo descrito nesta secção era constituído por alunos médio do 7ºano.
Problema: Fred Finley começou a leccionar há 10 anos em Centerville. Ele e a

4 Tradução de *build-up*.

noiva arrendaram um apartamento em 3188 Main Street por 250 dólares por mês. Ele também comprou um VW novo por 4500 dólares. O seu salário inicial era 14000 dólares. Este ano, o seu irmão Tom também começou a leccionar em Centerville. Ele a a sua noiva arrendaram um apartamento semelhante aquele que o Fred tinha alugado há 10 anos por 430 dólares por mês. Também compro VW novo; o preço foi 8900 dólares. Outras diferenças de preços podem ser encontradas no catálogo Sears e nos jornais que te foram fornecidos. Qual deverá ser o actual salário do Tom, será equivalente ao salário do Fred de há dez anos ?

Figura 3 – O problema da inflação

Geralmente, de acordo com Piaget, o raciocínio proporcional desenvolve-se a partir (1) desde uma estratégia compensatória global (frequentemente de natureza aditiva) passando por (2) uma estratégia multiplicativa sem generalização a todos os casos, até (3) à estruturação final da lei das proporções. Contudo, nas tentativas para verificar a teoria de Piaget, constatou-se que o nível de raciocínio usado pelas crianças não é sempre consistente para todas as tarefas ou análogo dentro de uma dada tarefa. (p. ex., quando o número de relações ou distracções perceptivas ou variáveis contextuais são ligeiramente alterados). Mesmo que os estádios descritos por Piaget provassem ser suficientemente fortes para descrever o comportamento da criança numa dada tarefa, a variabilidades entre tarefas é quase sempre elevada. Esta situação foi descrita como "*decalage* horizontal". O desenvolvimento conceptual no domínio do raciocínio proporcional parece ser caracterizado mais por um gradual aumento da competência local do que pela aquisição de alguma estratégia global e multifacetada do raciocínio. As interacções com o meio desempenham obviamente um papel importante neste desenvolvimento.

As soluções como a que é descrita abaixo levaram entre 20 a 40 minutos a ser desenvolvidos pelos alunos. A solução aqui descrita é representativa das que são produzidas pelos nossos alunos, que variavam entre alunos médios da escola média e os alunos adultos. Os alunos, globalmente, atravessaram os cinco ciclos distintos de reconceitualização[5] durante os 40 minutos da sessão. Note-se a semelhança entre os estádios nas suas soluções e os estádios identificados por Piaget e outros.

Conceptualização 1: Na primeira conceitualização dos alunos sobre um problema foi usado o raciocínio aditivo baseado apenas num subconjunto distorcido da informação dada. O grupo subtraiu para encontrar a diferença de preço entre pares

[5] *Reconceptualization*.

provavelmente comparando artigos velhos e novos. Mas foram considerados, apenas alguns artigos provavelmente os que foram observados em primeiro lugar, tais como o carro e um ou dois artigos do catálogo. Além disso, nada foi explicitamente dito que indicassem como é que estas diferenças permitiriam a determinação de um novo salário.

Conceptualização 2: Porque que é que ao alunos passaram para a segunda conceitualização do problema? São sugeridas duas possíveis explicações: (1) Como trabalharam outros detalhes relacionados com a primeira conceitualização, reconheceram dificuldades que inicialmente tinham ignorado (p. ex., “Que artigos devemos considerar?” ou “O que é que vamos fazer com esta informação?”), (2) Porque era aborrecido realizar os processos associados à primeira conceitualizações, consideraram outros processos de pensamento sobre o problema foram considerados.

A segunda conceitualização dos alunos sobre o problema foi baseada numa relação multiplicativa extremamente elementar envolvendo um subconjunto ainda mais distorcido de informação. Visto que a primeira conceitualização tinha perdido de vista o objectivo global quando a atenção se focou em detalhes (diferenças subtractivas individuais), a segunda conceitualização ignorou detalhes quando a atenção foi focalizada na relação entre os dois salários. Porque tenham passado 10 anos, talvez os alunos tenham suposto que o salário do Tom fosse 10 vezes maior do que o do Fred!

Embora, este “*brainstorm*” tenha sido rapidamente reconhecido como uma tolice, teve uma função positiva, pois introduziu o modo multiplicativo de pensar sobre as relações entre salários e preços no passado e no presente.

Conceptualização 3: A terceira conceitualização dos alunos sobre o problema usou um padrão de raciocínio do tipo reconhecimento e replicação do raciocínio pré-proporcional. Os alunos observaram um padrão nos artigos cujo aumento de preço era (aproximadamente) uma simples razão inteira (isto é, aproximadamente um factor 2). Deste modo, supuseram que o salário do Tom seria aproximadamente duas vezes o antigo salário do Fred. Esta suposição mostrava uma promessa real, contudo a clarificação do pensamento que ela possibilitou permitiu que aos alunos observassem que, por exemplo, o preço real de alguns artigos diminuíra, mesmo que a maioria deles tivesse aumentado de preço.

Conceptualização 4: A quarta conceitualização dos alunos usou a verdadeira proporção multiplicativa, ainda que baseada apenas num subconjunto distorcido de informação., isto é, os alunos começaram por falar sobre “percentagem de aumento” (mas na realidade as razões calculadas basearam-se em simples factores inteiros). Foram calculados os aumentos percentuais de diversos artigos e calculou-se de seguida o seu valor médio.

Conceptualização 5: A quinta conceitualização dos alunos usou uma proporção multiplicativa baseado num procedimento claro e explícito. Pela primeira vez, os alunos escreveram realmente uma (não sofisticada) expressão matemática na forma “A está para B como C está para D”. Os valores de A e B foram baseados no somatório dos preços para um número “simbólico” de artigos e os alunos observaram que após a inclusão de um número suficiente de artigos na soma, a razão não era muito afectada pela introdução de mais artigos.

A solução anterior não foi atípica. Os nossos alunos geralmente progrediram através de 2 a 10 ciclos distintos de reconceitualização durante os 40 minutos das sessões de resolução de problemas; estes ciclos assemelharam-se muitas vezes a versões compactas das sequências de desenvolvimento de Piaget. Recorde-se que estas sequências descrevem a evolução gradual das capacidades gerais de raciocínio proporcional das crianças ao longo de vários anos. Consequentemente, por causa destas impressionantes semelhanças, começámos a referir as nossas sessões de resolução de problemas como “sessões de desenvolvimento conceptual local”.

Do ponto de vista teórico, a ideia de interpretar a resolução de problemas como desenvolvimento conceptual local tem enormes implicações. Os mecanismos que se figuraram importantes nas sessões de desenvolvimento conceptual local podem ser usados para ajudar a explicar o desenvolvimento conceptual global desde o modo inicial aditivo de raciocínio até ao raciocínio proporcional e outros níveis superiores de compreensão.

Pensar o raciocínio proporcional como um gradual aumento de competência local, mais do que uma manifestação de uma estrutura cognitiva pode resultar em mais e não menos importância para as teorias do desenvolvimento e para o raciocínio proporcional como um campo de investigação bastante rico. A importância derradeira do raciocínio proporcional é uma consequência do poder facilitador para as capacidades de resolução de problemas. Uma das mais importantes razões para fazer da resolução de problemas um elemento central do currículo da matemática escolar é o contributo que estas experiências dão para a compreensão das crianças de outros conceitos centrais, muitos dos quais estão, por sua vez, relacionados com e envolvendo o raciocínio proporcional.

Conceitos de proporcionalidade, raciocínio e número racional

Nas secções anteriores, sugerimos que a investigação sobre o raciocínio proporcional deveria dar mais atenção a tarefas que envolvem (1) transformações dinâmicas, (2) mais do que um sistema de representação única, (3) unidades de medida assim como números e (4) mais de que um único tipo de expressão racional (taxa, razão, quociente, fracção). Por outro lado, acreditamos que o termo "raciocínio proporcional" deveria ser restringido a situações caracterizadas pela equivalência entre duas expressões racionais ($\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$). Contudo, mesmo com esta limitação, permanecem ambiguidades:

(a) Mesmo que um matemático (ou educador ou psicólogo) caracterize uma tarefa usando a proporção A/B=C/D, não significa necessariamente que esta equação descreva os processos e as relações que uma criança usa para interpretar e resolver a tarefa.

(b) Entre os principais investigadores na área dos números racionais (ou expressões racionais), não existe entendimento sobre as características essenciais que distinguem, por exemplo, taxa de razão (Freudenthal, 1983; Kaput, 1985; Karplus *et al*. 1983a, 1983b; Streefland, 1984; Noelting, 1980a, 1980b; Tourniaire & Pulos, 1985; Vergnaud, 1983). De facto, é comum encontrar um dado autor que muda a terminologia de uma publicação para outra, talvez para ajustá-la à terminologia em uso, a qual é em si própria inconsistente.

Um modelo por computador

Esta secção descreve as características definidoras, que nós julgamos serem as mais úteis para distinguir os vários tipos de expressões racionais. O poder e a consistência interna das nossas definições foram testados por um modelo baseado no cálculo; este modelo foi usado para investigar uma série de situações em que as regras e as definições que dirigiram o nosso modelo produziram resultados apropriados e, mais importante, ajudaram a identificar variáveis e perspectivas adequadas à investigação com crianças.

Algumas perspectivas alternativas sobre a natureza das “taxas”. Entre os participantes nesta conferência, Vergnaud e Schwartz são dois intervenientes que apresentam pontos de vistas consideravelmente diferentes sobre as características essenciais que permitem distinguir taxas e razões.

Vergnaud (1983, neste volume) segue uma tradição estabelecida pelos gregos antigos: as taxas são definidas como tendo de lidar com quantidades em dois espaços de medida diferentes (p. ex., 30 milhas/5horas), enquanto a razão é definida como envolvendo quantidades apenas de um espaço e medida (p. ex., 15 bolachas/10 bolachas). Os Gregos preferiram esta perspectiva porque estavam particularmente interessados na forma como os antigos conceitos de medida baseados em números inteiros fluíram para o domínio dos números racionais e expressões racionais. Vergnaud, sendo um psicólogo do desenvolvimento, não duvidou desta perspectiva por razões semelhantes.

Kaput, Luke, Poholsky e Sayer (1986) e Schwartz (1983, neste volume) seguem uma ideia semelhante à de Gauss. Esta posição é actualmente alvo de reflexão por Freudenthal (1973), Lebesque (1966), Whitney (1968a, 1968b) e outros matemáticos menos preocupados sobre a reconciliação dos conceitos dos números racionais com os conceitos elementares baseados nos números inteiros, e mais preocupados em encontrar ligações a tópicos de níveis superiores relacionados com os vários tipos de funções e espaços de medida mais complexos. Neles se baseou a matemática da quantidade em contraste com a usual matemática numérica. Kaput e Schwartz começaram por distinguir dois tipos essenciais de grandezas:

(a) Grandezas extensivas incluem exemplos como 5 milhas, 5 graus (temperatura), 5 graus (ângulos) ou 5 serviços (refeições). Grandezas extensivas dizem “quanto” (isto é, a “extensão”) de uma quantidade está associada a um dado objecto.
(b) Grandezas intensivas (ou “por” quantidades) incluem exemplos como 30 milhas por hora ou 30 dólares por artigo. Grandezas intensivas não dizem, “quanto” de uma dada grandeza em termos absolutos; em vez disso, expressam relações entre uma grandeza e uma unidade de outra grandeza.

Note-se que as grandezas escalares são tratadas como tipos especiais de grandezas intensivas em que as duas grandezas relacionadas envolvem o mesmo tipo de unidade: por exemplo, 30 dólares por dólar (dinheiro ganho/dinheiro poupado). De acordo com Schwartz e Kaput, uma taxa é uma única grandeza (intensiva), enquanto uma razão é uma relação entre duas grandezas.

Os pontos de vista de Vergnaud e Schwartz clarificam adequadamente os assuntos das suas primeiras áreas de interesse mas ambos conduzem a ambiguidades quando se aplicam a outras áreas de interesse. Por exemplo, de acordo com Schwartz e Kaput, "30 milhas/5horas" devem ser consideradas como taxa (grandeza intensiva única) ou como razão (relação entre duas grandezas) ou como quociente (operação envolvendo duas grandezas)? De acordo com Vergnaud, "3 dólares canadianos/ 2 dólares US" envolvem duas unidades com uma única grandeza (razão) ou duas unidades de medida (taxa)? E "4 quartos/1 dólar"?

Uma dificuldade associada à perspectiva grega é a necessidade de determinar quando é que duas unidades de medida são o mesmo. O que acontece se uma grandeza única é usada para medir dois tipos diferentes de quantidades? Por exemplo, na costura, uma medida de comprimento (p. ex., 3 jardas de pano) descreve uma área; situações semelhantes acontecem na culinária, em carpintaria, na agricultura, etc.. De facto, estes tipos de situações são especialmente comuns em ciências, onde a medição indirecta de quantidades básicas é usada com frequência, de modo a que a unidade de um tipo de grandeza seja usada para medir um segundo tipo de grandeza.

Uma dificuldade fundamental para psicólogos e educadores é que os matemáticos raramente se preocupam com o problema de fornecer definições rigorosas que destacariam muitas características das tarefas que são significativas do ponto de vista educacional e psicológico; isto porque o objectivo de um matemático se focaliza geralmente mais na semelhança estrutural entre as tarefas do que entre as distinções psicológicas dessas tarefas. Deste modo, para muitas características das tarefas que são psicologicamente significativas, não existe uma correspondente definição "correcta". A necessidade de grande concordância e consistência é clara na investigação em educação matemática e na instrução. O objectivo da próxima secção é descrever semelhanças e diferenças entre taxa, razão, fracção e quociente usando uma linguagem que seja suficientemente poderosa e consistente, de modo a que:

(a) O nosso modelo de cálculo, PAT (conhecido "Transformador do Problema"), possa produzir resultados apropriados para um conjunto razoavelmente grande de problemas sobre raciocínio proporcional.
(b) As principais distinções indicadas por investigadores como Freudenthal (1983), Kaput (1985), Karplus *et al.* (1983a, 1983b), Noelting (1980a, 198( )h),

Steefland (1985), Tourniaire & Pulos (1985) e Vergnaud (1983), sejam tidas em consideração.

Para atingir esses objectivos, iremos (1) ampliar a perspectiva de Vergnaud clarificando quando é que duas unidades de medida são o mesmo ou são diferentes e (2) ampliar a perspectiva de Schwartz, definindo fracção, taxa, razão e quociente de forma a retirar ambiguidades na classe de problemas sobre raciocínio proporcional dos manuais escolares de Matemática e Ciências.

Uma breve descrição da utilidade do PAT (Transformador do Problema). Tendo em vista as finalidades deste capítulo, o ponto principal para compreender o PAT é que ele foi projectado para permitir que os alunos "escrevam" (isto é, construam um dicionário *online*, que possa ser gradualmente enriquecido) problemas em linguagem comum como aqueles que existem nos manuais que o PAT então transforma quando o aluno escreve um comando como (1) UNDERLINE, destacando as palavras-chave e os dados, (2) PARAPHRASE, usando frases simplificadas e informação irrelevante, (3) OUTLINE, usando uma lista de "entradas" e de "objectivos", (4) SIMPLIFY, apresentando o mesmo problema com números simplificados, (5) GIVE NA ANALOGY com a mesma estrutura num contexto diferente, (6) SUB-STEP, identificando uma questão intermédia baseada num trabalho da frente para trás partindo dos objectivos para os dados, (8) MODELO, usando versões electrónicas de conhecimento de manipulação concreta, e (9) ABSTRACT, escrevendo uma equação algébrica, função ou expressão para descrever o problema. Pensamos que as capacidades relacionadas com a transformação requeridas pelo PAT constituem também importantes indicadores da aptidão de raciocínio proporcional das crianças.

As compreensões mais críticas necessárias à criação de uma ferramenta como o PAT são aquelas que permitiam aos investigadores descrever semelhanças subjacentes à estrutura dos problemas (num domínio conceptual rico suficientemente simples).

Uma segunda característica relevante do PAT é que as suas habilidades computacionais são semelhantes às do SEMCALC de Schwartz (1983); isto é, PAT não permite que os alunos escrevam expressões que não tenham etiquetas de medida. Por exemplo, se um estudante escrever "3" (ou 3x ou 3ax), PAT responde perguntando "3 quê?!!" alertando o aluno para a necessidade de escrever (1) quantidade, (2) unidade de medida e (3) o tipo de grandeza subjacente, por exemplo, "3 milhas (distância) ou "3 milhas por hora (velocidade) ".

Se um aluno escrever “3maçãs + 2 laranjas” então (1) se o conhecimento de que maçãs e laranjas são frutos já existia antes na biblioteca *online* do PAT, o programa simplificará a afirmação em “5 frutos”, ou (2) se não existir essa informação, o PAT responde perguntando “Qual é a relação entre maçãs e laranjas?” (escolha múltipla): Todas as maçãs são laranjas? Todas as laranjas são maçãs? Todas as maçãs e laranjas são {preencher o espaço em branco}. A biblioteca do PAT é então modificado, incluindo a nova informação fornecida pela resposta do aluno.

Quando o PAT está no “*computation mode*”, manipula expressões matemáticas, que incluem (1) unidades de medida (p. ex., pé, milhas por hora), (2) tipos de grandeza (p. ex., distância, velocidade), (3) variáveis (p.ex., x ou y), (4) constantes literais (p. ex. a, b, m) e (5) números “puros”.

Fracção, taxa, razão e quociente. Para os nossos objectivos, duas unidades de medida serão consideradas diferentes sempre que envolvam (1) diferentes conjuntos de objectos, (2) um tipo diferente de grandeza subjacente (p. ex., distância, peso, tempo, etc.), (3) uma diferente unidade de medida ou (4) um esquema diferente de registo dos números (isto é, medidas) para os objectos no espaço. Por exemplo, se as alturas dos alunos são medidas em polegadas e em pés então essas medidas serão considerados em dois espaços distintos, e a conversão de uma unidade para outra será considerada como direcção (ou transformação ou translação) de uma unidade de medida de espaço para outra.

Tendo em mente a compreensão precedente, pode-se distinguir fracção, taxa, razão e quociente segundo aquilo que eles representam (1) única grandeza (extensiva ou intensiva); (2) relação entre pares de grandeza, ou (3) operação realizada entre os pares da grandeza. Estas distinções são críticas para um aluno ingénuo como o PAT, porque as regras para combinar (ou ligar ou adicionar) são por vezes um pouco diferentes dependendo de os “objectos” operados serem quantidade, relações ou operações. É importante que as definições que se seguem tenham exigidas para evitar que o PAT produzisse incoerências. O nosso objectivo é levantar a questão se os requisitos do PAT têm implicações em futuras implicações com crianças. As definições que se seguem têm consistência necessária para o PAT, mas não necessariamente as que nós defendemos para o uso geral.

(a) As fracções são formas especiais de grandezas extensivas; informam sobre o tamanho de um único objecto, por exemplo $\frac{3}{4}$ de piza.

Nota: (1) O PAT interpreta efectivamente "$\frac{3}{4}$ piza" como "3 quartos de piza" em que "quartos de piza" é a unidade de medida e 3 unidades a parte do objecto que está a ser medido. Assim "3 quartos – piza" é tratado como "3 centímetros".

(2) Matematicamente, uma quantidade como "3 quartos de piza" pode ser representado como um ponto numa recta numérica, identificado com unidades de "quartos de piza" (ver Figura 4).

(b) As taxas são grandezas intensivas; podem ser reconhecidas pelo termo "por" nas unidades que as identificam, por exemplo, 3 milhas por hora. Taxas fraccionárias como "$\frac{3}{4}$ milha por hora" podem ser interpretadas simplesmente como "3 quartos de milha por hora".

Nota: (1) Alguns autores referem "taxas unitárias" e "taxas não unitárias". Contudo, de acordo com a terminologia aqui usada (e nos requisitos do PAT), apenas taxas unitárias podem ser designadas por taxas. Recorde-se que qualquer divisão de duas grandezas extensivas produz uma taxa unitária, por exemplo, $\frac{4 hambúrgueres}{2 pessoas} = \frac{2 habúrgueres}{1 pessoa}$, ou $\frac{30 milhas}{10 horas} = \frac{3 milhas}{1 hora}$.

Assim, qualquer comparação indicada ($\frac{A}{B}$) de duas grandezas pode ser convertida numa taxa unitária expressa num modo mais usual "tantos A's por 1 B" simplesmente procedendo à divisão indicada. PAT, contudo, está mais ajustado com a interpretação de taxa seja restrita à taxa unitária.

(2) Matematicamente, uma quantidade como "3 milhas por hora" pode também ser representada como um ponto numa recta numérica, identificada pelas unidades "milhas por hora" (ver Figura 5).

(c) Razões são relações binárias que envolvem pares ordenados de grandezas (quer sejam extensivas, intensivas ou do tipo escalar).

Nota: Matematicamente, a relação entre duas unidades de medida, P e B, é usualmente representada usando pares ordenados (ou classes equivalentes de pares ordenados) numa unidade de medida formada pelo produto – cruzado PxB (ver Figura 6).

(d) Quocientes são operações binárias que combinam duas grandezas (extensivas, intensivas ou escalar) registando-as numa grandeza de uma terceira unidade de medida.

Nota: (1) Se duas grandezas extensivas são orientadas para uma grandeza intensiva, então a operação é frequentemente designada por divisão "partitiva" (p.ex., $\frac{3 pizas}{4 rapazes} \rightarrow \frac{3}{4}$ piza por rapaz).

(2) Se uma grandeza extensiva e uma grandeza intensiva são orientadas para uma grandeza extensiva, a operação é frequentemente designada por divisão "por quotas" (p. ex., 3 pizas /(3/4 piza por rapaz) $\rightarrow$ 4 rapazes).

(3) Matematicamente, uma operação binária com duas unidades de medida P e B numa terceira unidade de medida S é usualmente representada como $P \times B$ em S.

Os quatro tipos de expressões racionais podem ser observadas nas diferentes zonas dos diagramas, tal como na Figura 7. Por exemplo: (1) porque fracções e taxas são ambas quantidades, aparecem como eixos relacionados com P, B ou S; (2) porque razões são relações, aparecem como pontos em PxB; e (3) porque quocientes são operações, aparecem as "representações" de P e B em S.

Fig. 4 - .Recta numérica com unidades de quartos de piza

Fig. 5 – Recta numérica com unidade de milhas por hora

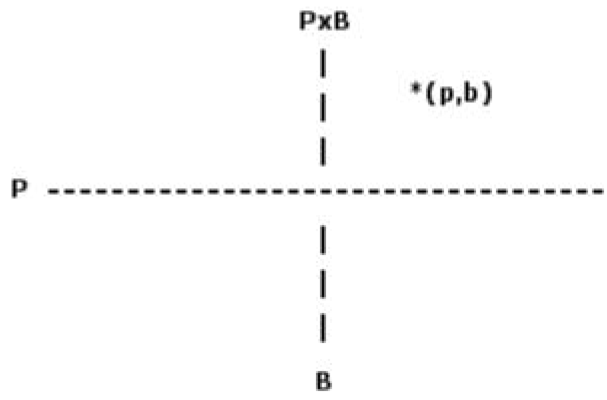

Fig. 6 – Grandeza formada pelo produto cruzado P$\times$B

Fig. 7 – Representação das grandezas P e B numa terceira grandeza S

A um nível mais elevado de abstracção, todos os quatro tipos básicos de expressões racionais (fracção, taxa, razão e quociente) podem ser representadas usando um único modelo matemático, um espaço homogéneo que consiste numa matriz 3x3. Objectos, relações, operações e transformações podem ser todos representados como matrizes dentro de um único espaço vectorial. De um ponto de vista intuitivo, isto não é surpreendente porque, por exemplo, embora as fracções e as taxas se refiram a grandezas únicas, ambas podem implicitamente envolver comparações entre duas quantidades. Para fracções (p. ex., $\frac{3}{4}$ de piza), a comparação está escondida dentro de um "número parcial" de uma expressão (p. ex., $\frac{3}{4}$), enquanto que para as taxas, a relação está escondida nas "unidades parciais" da expressão (p. ex., pizas por rapaz). A relação escondida em 3 quartos de piza existe entre o tamanho da unidade (isto é, um quarto de piza) e o tamanho do objecto a ser medido (isto é, 3).

Sob uma perspectiva psicológica, existem perigos nos tipos precedentes de generalização matemática. Não nos devemos iludir e acreditar que por causa de a taxa, a razão, o quociente e a fracção serem interpretados como tipos de objectos equivalentes (num espaço vectorial 3x3), eles sejam vistos como equivalentes pelos alunos. Por exemplo, é só a um nível bastante sofisticado de compreensão que uma taxa como "três quartos de milha por hora" é considerada equivalente à razão "três milhas por quatro horas".

Operações com fracções, taxas, razões e quocientes. De acordo com as definições de fracção, taxa, razão e quociente que aqui enunciámos, regras um tanto diferentes se aplicam aos quatro tipos básicos de expressões racionais quando as somamos, multiplicando e escrevemos outras que lhe são equivalentes. Assim, para terminar este capítulo, serão dados exemplos para mostrar como o PAT trata algumas destas diferenças numa fase computacional.

Porque fracções e taxas são quantidades, podem ser adicionadas e multiplicadas usando regras habituais que se aplicam a formas mais simples de grandezas. Por exemplo:

(1) Apenas quantidades que têm a mesma unidade de medida podem ser somadas.

 3 maçãs + 2 maçãs = 5 maçãs

 3 milhas por hora + 2 milhas por hora = 5 milhas por hora

(2) Se duas quantidades têm diferentes unidades de medida que se podem relacionar, então devem ser traduzidas para a mesma unidade de medida antes de serem somadas.

3 quartos de piza		2 terços de piza
↓		↓
9 doze avos de piza	+	8 doze avos de piza

Note: A aptidão de transformação entre unidades de medida "relacionadas" é uma capacidade indispensável nas operações anteriores.

(3) As regras para a adição não têm sentido para a razão (isto é, pares ordenados das quantidades). Por exemplo, o que significaria "adicionar" a razão um $\frac{2}{3}$ rapaz por piza a uma razão $\frac{3}{4}$ rapaz por piza? Dezassete para doze não é uma resposta aceitável.

(4) Quantidades com diferentes unidades de medida podem ser multiplicadas pela regra da multiplicação (embora os resultados possam ou não ter interpretações “aceitáveis”).

5 homens x 3 horas de trabalho = 15 homens por horas de trabalho

5 milhas por hora x 3 horas = 15 milhas

5 pés x 3 pés = 15 pés x pés = 15 pés^2 = 15 pés quadrados

Nota: Uma grandeza extensiva vezes uma outra grandeza extensiva corresponde à interpretação multiplicativa “produto cruzado” e uma grandeza extensiva vezes uma grandeza intensiva corresponde à “adição sucessiva”.

Parte do objectivo do uso de um modelo por computador como o PAT é explicitar certos processos de pensamento que podem ser importantes no pensamento das crianças, mesmo que estes processos possam somente ser usados implicitamente ou sem muita reflexão.

São as unidades de medida e as transformações entre unidades e as transformações entre os vários tipos de expressões racionais verdadeiramente importantes como as soluções do PAT parecem sugerir? Globalmente, a nossa investigação sugere que a resposta seja “sim”; transferências entre os vários tipos de grandezas e as conversões entre os vários tipos de “expressões racionais” (taxa, razão, quociente e fracção) parecem ser verdadeiros factores psicológicos. A aptidão dos alunos para realizar a “aritmética da unidade de medida” e de comutá-la de modo flexível de um tipo de expressão racional para outro, é, no nosso trabalho, indicador particularmente fiável da capacidade de resolução de problemas do quotidiano. Suspeitamos que o número de passos relacionados com a conversão que o PAT dá para resolver um problema é um excelente indicador das situações de dificuldade.

As características mais importantes da tarefa requeridas pelo PAT para produzir “problemas semelhantes” são as que estão directamente relacionadas com os tipos de unidades e com os tipos de expressões racionais.

Referências

Behr. M., Lesh, R., Post, T, & Silver. E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91-126). New York: Academic Press.

Behr, M., Wachsmuth. 1., Post, T, & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15, 323-341.

Bezuk, N. (1986). *Variables affecting seventh grade student's performance and solution strategies on proportional reasoning word problems.* Unpublished doctoral dissertation, University of Minnesota.

Cobb, P (1987). A year in the life of a second grade class: Cognitive perspective. In J. C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Eds.). *Proceedings of the Eleventh International Conference of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 111, pp. 201-207). Montreal: University of Montreal.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Holland: D. Reidel.

Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. *Mathematics education library.* Boston: D. Reidel.

Hart, K. M. (Ed.). (1981). *Children's understanding of mathematics:* 11-16. London: John Murray.

Hart, K. M. (1984). *Ratio: Children's strategies & errors*. Windsor, England: NFER-NELSON Publishing Company

Inhelder, B. & Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence* New York: Basic Books.

Kaput, J. J. (1985). *Multiplicative word problems and intensive quantities: An integrated soft ware response* (Technical Report 85-190). Cambridge, MA: Harvard University, Educational Technology Center.

Kaput, J. J. (1987a). Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 19-26). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. J. (1987b). Toward a theory of symbol use in mathematics. In C. Janvier (Ed.) *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 159-196). Hills dale, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. J., Luke, C., Poholsky, J., & Sayer, A. (1986). *The role of representation in reasoning with intensive quantities: Preliminary analyses* (Technical Report 869). Cambridge, MA Harvard University, Educational Technology Center.

Karplus, R., & Peterson, R. (1970). *Intellectual development beyond elementary school 11 Ratio, a survey.* Berkeley: Lawrence Hall of Science, University of California.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. K. (1983a). Early adolescents' proportional reasoning on "rate" problems. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 219-234.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. K. (1983b). Proportional reasoning in early adolescents. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 45-90). New York: Academic Press.

Kieren, T E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers number and measurement. In R. A. Lesh (Ed.), *Number and measurement* (pp 101-144). Columbus, OH: Ohio State University, ERIC/SMEAC.

Lebesque, H. (1966). Sur la measure des grandeurs. Enseignement mathematique, 32-34. As reprinted in translation in K.O. May (Ed.), *Measure and the integral.* San Francisco: Holden Day (Original work published 1933-36).

Lesh, R., Behr, M., & Post, T (1987). Representations and translations among representations mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 41-58). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Lesh, R., Post, T & Behr, M. (1987). Rational number relations and proportions. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematic*s (pp. 40-77). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I– Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 217-253.

Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part 11– Problem-structure at successive stages: Problem-solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics.* 11, 331-363.

Piaget, J., & Beth, E. (1966). *Mathematical epistemology and psychology.* Dordrecht, Holland:

Piaget, J., Grize, Szeminska, A., & Bang, V. (1968). *Epistemologie et psychologie de la fonction*. Paris: Paris University Press.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1956). *The child's conception of space.* London: Routledge & Kegan

Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). The origin of the idea of chance in children. New York: W. W Norton.

Post, T, Behr, M., & Lesh, R. (1986). Research based observations about children's learning of rational number concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 8(1), 39-48.

Post, T, Behr, M., & Lesh, R. (1988). Proportionality and the development of pre-algebra understandings In *Algebraic concepts in the curriculum K-12* (1988 Yearbook). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Schwartz, J. L. (1983). The semantic calculator users manual. New York: Sunburst Communication.

Steffe, L. R & von Glasersfeld, E. (1983). The construction of arithmetical units. In *Proceedings of the fifth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 292-303). Montreal.

Streefland, L. (1984). Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process. (Towards . . . A theory) Part 1: Reflections on a teaching experiment. *Educational Studies in Mathematics,* 15, 327-348.

Streefland, L.. (1985). Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process. (Towards . . . A theory) Part 11: The outline of the long term learning process, *Educational Studies in Mathematics,* 16, 75-94.

Tourniaire. F & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 181-204.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). New York: Academic Press.

Whitney, H. (1968a). The mathematics of physical quantities: Part 1: Mathematical models for measurement. *American Mathematical Monthly,* 75, 115-138.

Whitney, H. (1968b). The mathematics of physical quantities: Part 11: Mathematical models for measurement. *American Mathematical Monthly*, 75, 227-256.

Agradecimentos

This research was supported in part by the National Science Foundation under grant No. DPE-847tX177. Any opinions, findings and conclusions expressed are those of the authors and do not necessarily reflect the views of the National Science Foundation.