Funcionamiento de la clase de matemáticas[1]

En este capítulo se describen los aspectos fundamentales de la dinámica del proceso de enseñanza-aprendizaje en el aula de matemáticas de enseñanza secundaria. Las orientaciones curriculares actuales de enseñanza de esta disciplina realzan la importancia de objetivos relacionados con el desenvolvimiento de capacidades como la resolución de problemas, el razonamiento, la comunicación y el pensamiento crítico; apuntan igualmente la importancia del desenvolvimiento de actitudes y valores como el gusto por la matemática, la autonomía y la cooperación. Para alcanzar estos objetivos es necesario proporcionar a los alumnos experiencias diversificadas basadas en tareas matemáticas ricas, realizadas en un ambiente de aprendizaje estimulante. Todo esto implica cambios significativos tanto en el papel del profesor como en el de los alumnos.

Existen distintos tipos de clases de matemáticas, cada una con su propia dinámica. En muchas clases los conceptos y el conocimiento matemático son introducidos por el profesor y los alumnos tienen un papel de meros receptores de la información. En otras, el saber se construye en el transcurso de la propia actividad matemática, dando a los alumnos un papel de participación activa y al profesor un papel de organizador y dinamizador del aprendizaje.

La clase de matemáticas es el resultado de muchos factores. Depende, en primer lugar, de las tareas matemáticas propuestas por el profesor; no podemos considerar del mismo modo clases en las que se proponen ejercicios para resolver, se propone la realización de una investigación, se conduce una discusión colectiva, o no se encomienda a los alumnos ninguna labor. Pero la clase está igualmente influenciada por factores que tienen que ver con los alumnos: sus concepciones y actitudes relacionadas con las matemáticas, sus conocimientos y experiencia de trabajo matemático y, de forma general, su forma de encarar la escuela. Otros factores se relacionan con el contexto escolar y social: la organización y el funcionamiento de la escuela, los recursos existentes y las expectativas de los padres y la comunidad. Finalmente, la forma de dar clase depende también, naturalmente, del propio profesor, de su conocimiento y competencia profesional; muy especialmente del modo en el que introduce las diferentes tareas y apoya a los alumnos en su realización.

La investigación sobre el aprendizaje demuestra que el alumno aprende como consecuencia de la actividad que desarrolla y de la reflexión que hace sobre ella. La actividad

[1] Capítulo 4 del libro Ponte, J. P., Boavida, A., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da matemática*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário. Traducción de Pablo Flores.

del alumno es así un elemento fundamental del proceso de enseñanza y aprendizaje. Al profesor le cabe favorecerla, planeando y conduciendo clases que tengan en cuenta las características e intereses de los alumnos y saquen partido de los recursos existentes. El profesor está llamado a crear las condiciones necesarias para el aprendizaje, utilizando medios como manuales escolares, fichas de trabajo, pizarra, retroproyector, materiales manipulables, calculadora y ordenador.

Dos retratos

Toca el timbre de entrada. Se debate sobre los deberes de casa. El profesor resuelve algunas dudas. Toca el timbre de salida.

David Johnson, 1982
Every minute counts

Es interesante destacar el interés demostrado por los alumnos en la realización de sus trabajos, debido a su protagonismo en el aula y a la participación en la organización de esta antes del toque de entrada (...) Había dos grupos trabajando en los ordenadores, mientras sus compañeros trabajaban en el aula (...) Como ni Miguel ni Dora sabían cuáles son los comandos necesarios para imprimir, Dora se volvió para otro grupo y le dijo "Sergio te necesitamos" (...) Pasado algún tiempo, la profesora apareció en la clase dando algunas orientaciones. Entre ellas envió al grupo de Dora otro tipo de trabajo. En cuanto lo hizo, el grupo de Pedro utilizó la máquina calculadora para hacer algunos cálculos. Fue interesante cuando la profesora se dirigió a Sergio y le preguntó: ¿Amanda está ahí? ¿Trabaja? Además de mostrar una cierta continuidad con el trabajo realizado fuera del aula, denota por parte de la profesora confianza en sus alumnos, poniendo de evidencia una buena relación profesor-alumno para dar un mayor grado de autonomía a éstos.

Registro de un observador, incluido en Paulo Abrantes, 1994.
O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a matemática

La comunicación matemática es un aspecto también importante del proceso de enseñanza y aprendizaje. Es a través de la comunicación oral y escrita como los alumnos dan sentido al conocimiento matemático que se está construyendo. Esta comunicación se desenvuelve basándose en la utilización de diversos tipos de materiales, así como de diferentes modos de trabajo, y en la forma en que el profesor organiza el espacio y el tiempo. Finalmente, el ambiente de aprendizaje y la cultura de la clase son elementos decisivos para el aprendizaje. En la interacción de los individuos, unos con otros, se desenvuelven las capacidades cognitivas y se promueven las actitudes y valores indicados en las orientaciones curriculares.

En este capítulo tratamos de analizar la dinámica del aula de matemáticas comenzando por atender a la diferencia entre tarea y actividad, así como entre discurso y comunicación.

Analizamos el proceso de negociación de significados matemáticos, las diferentes formas de trabajo de los alumnos, y los elementos que componen los ambientes de aprendizaje. Intentaremos además trazar un cuadro de las diversas opciones que se ofrecen al profesor que quiere reflexionar sobre su actividad docente, adaptándola de la mejor manera posible a las necesidades de sus alumnos.

1. Tarea y actividad

La naturaleza de las tareas propuestas por el profesor y de las actividades realizadas por los alumnos constituyen un factor decisivo en la dinámica del aula de matemáticas, y, de este modo, en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Los conceptos de tarea y actividad, que no deben ser confundidos entre sí, tienen así un lugar destacado en la educación matemática.

1.1 Relación entre tarea y actividad

Las tareas matemáticas que se le proponen a los alumnos (problemas, investigaciones, ejercicios, proyectos, construcciones, aplicaciones, producciones orales, relatos, ensayos escritos, etc.) proporcionan un punto de partida para el desenvolvimiento de su actividad matemática. Las tareas deben despertar curiosidad y entusiasmo, apelando a sus conocimientos previos e intuiciones.

La actividad del alumno

La naturaleza de la actividad de los alumnos en la clase de matemáticas es una cuestión central en la enseñanza de esta disciplina. El aprendizaje de Matemáticas es siempre el producto de la actividad, y si esta se reduce, por ejemplo, a la resolución repetitiva de ejercicios para aplicar ciertas fórmulas, es exactamente esto lo que se aprende y lo que va a quedar en los alumnos, fijar las fórmulas en la memoria. Es decir, esa es la imagen que van a adquirir de la matemática.

APM, 1988
Renovação do currículo da matemática

La actividad, que puede ser física o mental, es lo que hace el alumno. Se refiere a aquello que él hace en un contexto dado, pudiendo incluir la ejecución de numerosos tipos de acciones. Por su parte, la tarea constituye el objetivo de cada una de las acciones en las que la actividad se desenvuelve y es básicamente exterior al alumno (aunque pueda ser decidida por él). Las tareas son, la mayor parte de las veces, propuestas por el profesor; pero, una vez propuestas, tienen que ser interpretadas por el alumno, y pueden dar origen a actividades muy diversas (o a ninguna actividad), conforme a la disposición del alumno y el ambiente de aprendizaje del aula.

Características de las tareas

En la clase de matemática o profesor debe proponer tareas basadas en:

- matemática sólida y significativa;
- Conocimiento de las aptidones, interés y experiencias de los alumnos;
- Conocimiento de una variedad de formas pelas cuáles os diversos alumnos aprenden matemática.

E que

- apelen a la inteligencia dos alumnos;
- desarrollan la comprensión e aptitudes matemáticas dos alumnos
- estimulen los alumnos a establecer conexiones matemáticas e a desarrollar un marco coherente para las ideas matemáticas
- apelen a la formulación e resolución de problemas y a lo razonamiento matemático;
- promovam la comunicación matemática;
- mostren la matemática como una actividad human permanente
- consideren diferentes experiencias e predisposiones dos alumnos;
- promovan o desarrollo da predisposión dos alumnos para hacer matemática.

NCTM, 1994.
Normas profesionales para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

La tarea propiamente dicha puede apuntar hacia diversas estructuras o conceptos matemáticos. Pero estos, estrictamente hablando, no se encuentran en la tarea. Tienen que ser interpretados por nosotros, y en nuestra interpretación intervienen siempre factores de naturaleza psicológica, cultural y sociológica. Cuando el profesor selecciona, adapta o crea una tarea debe tener en cuenta las características de los alumnos, sus intereses y su forma de aprendizaje de las matemáticas.

Una tarea conlleva siempre una situación dada de aprendizaje y apunta a un determinado contenido matemático. La situación de aprendizaje constituye el referente de significado de la vida cotidiana o del dominio de la matemática a la que la tarea se refiere, con relación a la cultura del alumno. El contenido matemático se refiere a los aspectos matemáticos implicados (hechos, conceptos, procedimientos, ideas) del currículo correspondiente. Tanto la situación de aprendizaje como el contenido matemático deben afrontar de manera sugerente los conceptos y procedimientos y proporcionar a los alumnos una buena oportunidad para implicarse en las actividades matemáticas.

Una misma situación de aprendizaje y un mismo contenido pueden originar diferentes tipos de actividades según la tarea propuesta, el modo en que se ha presentado a los alumnos, la forma de organizar el trabajo y el ambiente de aprendizaje. El siguiente ejemplo permite ilustrar esta idea.

Petición de pantalones
Un cliente de la empresa *Confecciones del Centro SA*, le ha hecho un gran pedido de pares de pantalones de dos modelos diferentes con la condición de que se le haga una entrega diaria de 120 pares de pantalones. Las posibilidades de producción de la empresa, dado su capital disponible, están limitadas a la utilización de 300 metros de tejido y 300 horas de trabajo. La elaboración de un par de pantalones del modelo A necesita 2 metros de tejido y 3 horas de trabajo, mientras que el modelo B necesita 3 metros de tejido y 1,5 horas de trabajo. El beneficio que se obtiene de cada para de pantalones es de 1500 y 2000 ptas. para los modelos A y B, respectivamente[2].

La situación de aprendizaje se refiere a una empresa que fabrica pantalones de varios modelos. El contenido matemático nos sugiere temas del programa de 10º: funciones y gráficas, generalidades; funciones polinómicas. Para su estudio se requiere: conocimiento de la función afín; reconocimiento de la función a partir de su gráfica, trazado aproximado de gráficas y reconocimiento de algunas de las propiedades (monotonía y ceros de manera intuitiva, y empleando los conocimientos sobre ecuaciones); capacidad para resolver ecuaciones e inecuaciones de 1º grado y ecuaciones de 2º grado; conocimiento de los números reales y representación de intervalos de números reales.

Con base en esta situación de aprendizaje podemos pensar en diferentes tareas.

Tareas
T1. Determinar el beneficio obtenido por la empresa al vender 600 pares de pantalones del modelo A y 300 pares del modelo B.
T2. Aceptando que el beneficio que se obtiene de cada par es un beneficio medio (a partir de la producción máxima de cada uno de los modelos) y que por cada diez pares de pantalones que se hacen ese beneficio tiene un aumento de 0,5%, ¿Cuál es el valor exacto del beneficio de la empresa cuando se venden 53 pares de pantalones del modelo A?

[2] A situación de aprendizaje e as tareas presentadas fueran desarrolladas en colaboración por Margarida Graça e Liliana Costa.

T3. Investigar si la empresa está en condiciones de responder favorablemente al pedido que le ha hecho el cliente.
T4. Averiguar si la empresa puede ser incluida en el grupo de empresas de pequeña, media o gran dimensión. . A partir de un cierto número de unidades, la producción puede necesitar alterar los costos fijos. ¿Es por que una mayor producción origina siempre un mayor beneficio? . Intentar investigar en una empresa de su zona, la influencia de la variación de los precios de energía, el coste medio de los productos y los beneficios que la empresa va a obtener con esa producción. . ¿Qué estrategia podría intentar el empresario para que los beneficios sean superiores al nivel medio? . Elaborar una redacción que sintetice las conclusiones a las que habéis llegado sobre los aspectos anteriores.

Así T1 constituye un ejercicio simple. En él se da importancia al cálculo. Se emplean en ella procesos rutinarios y la única actividad que se demanda es encontrar una solución.

T2 constituye un problema susceptible de despertar la curiosidad de los alumnos y de motivarlos a intentar descubrir una estrategia de resolución. Será importante prestar atención a la discusión de los conceptos que aparecen en las estrategias que se utilicen, a las argumentaciones, a los intentos de prueba y de crítica de los resultados.

Por su parte, T3 es una tarea de investigación. Se trata de una cuestión abierta, de naturaleza problemática, cuya resolución puede llevar varias sesiones de clase. El alumno tiene que formular objetivos más precisos para investigar, formular conjeturas, contrastarlas y, eventualmente, demostrarlas. Este tipo de trabajo favorece el desenvolvimiento del espíritu de observación y del sentido crítico, la capacidad de sistematización de resultados parciales y de abstracción, tanto como las capacidades de argumentación y demostración.

La tarea T4 puede constituir el punto de partida para un trabajo con proyectos. Esta propuesta puede necesitar otras asignaturas, desarrollándose durante un largo periodo de tiempo. La tarea podrá realizarse en diferentes etapas que conduzcan al objetivo perseguido.

Las tareas tienen, por tanto, diferentes potencialidades. Cada una de ellas será adecuada para conseguir determinados objetivos. De este modo, se vuelve particularmente interesante el elegir tareas que propicien al alumno experiencias diversificadas e interesantes. El profesor puede encontrar varios tipos de tareas en los manuales escolares. También puede adaptar y elaborar sus propios materiales de acuerdo con las características de sus alumnos de modo que los anime a razonar sobre las ideas matemáticas y a establecer relaciones entre ellas. Así será importante llevarlos a comunicarse, a argumentar y a validar sus razonamientos.

> ***Una variedad de tareas y actividades en la clase***
>
> La variedad de tareas y actividades para el uso del profesor de matemáticas es tan amplio que resulta sorprendente que la clase típica de matemáticas sea tan rutinaria como se ha descrito frecuentemente. Esta semejanza entre las clases es debida en gran parte a la estructura de la lección. La idea de "actividad" puede ser un aporte importante para romper esta monotonía.
>
> Alan Bishop y Fred Goffree, 1986.
> *La dinámica y la organización de la clase*.

1.2 De la tarea a la actividad

Presentamos a continuación algunas tareas incluidas en un trabajo de investigación llevado por Susana Carreira, *El aprendizaje de la trigonometría en el contexto de aplicaciones y modelación de la hoja de cálculo como recurso*, analizando los aspectos más relevantes de la actividad de los alumnos. El trabajo que relatamos se llevó a cabo en las tres primeras clases de trigonometría del curso. Haremos el estudio de los aspectos introductorios de las razones trigonométricas de un ángulo agudo en triángulos rectángulos y de las razones trigonométricas de los ángulos de 30º, 45º y 60º.

Experiencia anterior de los alumnos

El grupo estudiado tiene 29 alumnos, 24 chicos y 5 chicas, con edades entre 15 y 18 años. 13 de estos alumnos obtuvieron una calificación negativa en matemáticas en los períodos 1º y 2º. No existen diferencias significativas entre las calificaciones en matemáticas y en otras asignaturas. El grupo pertenece al área profesional de informática, por lo que alguno de sus miembros sabe trabajar con hoja de cálculo.

Espacio físico y materiales de apoyo

Las clases tuvieron lugar en aulas normales y en el aula del proyecto MINERVA de la escuela, que dispone de 5 ordenadores y fue equipada con tres más cedidos por una empresa de equipamientos informáticos, expresamente para este proyecto.

Se utilizó una guía de utilización de la hoja de cálculo con un resumen de los comandos esenciales y de las opciones para la construcción de gráficos; también un modelo para la elaboración de los informes escritos de cada una de las tareas realizadas con el ordenador, conteniendo los criterios de evaluación de esos trabajos, un disquete para la grabación de los trabajos (uno por grupo), retroproyector y fichas de trabajo.

Ambiente de aprendizaje y modo de trabajo de los alumnos

El grupo es bastante participativo aunque hay diferencias en la forma en que participaron y en las calificaciones obtenidas en las pruebas de evaluación. En general, los alumnos tienen una actitud de curiosidad y están interesados por lo que pasa en el aula, y están habituados a trabajar en grupo en el aula de matemáticas. En opinión de la profesora, trabajan bien en las actividades propuestas para la realización en grupo, y funcionan de una forma natural con sus compañeros.

La tarea fue realizada en grupos heterogéneos de 2 o de 4 alumnos formados por ellos.

Contenido matemático y situación de aprendizaje

El contenido matemático trabajado en la actividad es la aplicación de los conceptos y relaciones relativas a las razones trigonométricas de un ángulo agudo, de ángulos complementarios y de los ángulos de 30º, 450 y 60º, a situaciones de la vida real, estando también presentes conceptos de geometría relativos a los sólidos y sus áreas, y a los volúmenes.

La situación de aprendizaje que sirve de base a la construcción de las tareas se refiere a los embalajes de productos de belleza.

Tarea y forma en que fue propuesta

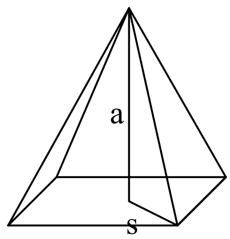
El trabajo se inició en una clase de 2 horas. Los grupos se concentraron en la lectura de la situación. Algunos alumnos hicieron preguntas sobre la fórmula del volumen de la pirámide. Como ningún alumno sabía la fórmula, la profesora se la suministró. Los alumnos recibieron cuatro pirámides cuadrangulares en cartulina que circularon por los distintos grupos durante la clase. Existían dos pirámides con la misma base y diferentes alturas y otras dos con la misma altura y bases diferentes. Los alumnos no llegaron a relacionar unas pirámides con otras. Se interesaron por sí la fórmula del volumen era la misma cuando las bases no fueran cuadrados sino otros polígonos. Cambiaron opiniones sobre algunos términos, como arista, vértice, altura y cara lateral.

Un embalaje ideal

Una fábrica de cosméticos pretende lanzar al mercado una nueva marca de sales de baño. La imagen de la marca del producto tiene como fuente de inspiración el Oriente. Así, la forma del embalaje deberá combinar el exotismo de la fragancia y el propio nombre que la identifica: EGYPTUM. La fábrica encomendó a una firma especializada un proyecto de embalaje, con los siguientes requisitos:

- El embalaje, que tiene que ser de vidrio delicado, deberá tener un formato adecuado a las características exóticas del perfume de las sales de baño.
- \- La forma del embalaje deberá permitir un empaquetamiento fácil de varias unidades en cajas, teniendo en cuenta las perspectivas de envío del producto en grandes cantidades.
- Cada embalaje deberá tener una capacidad comprendida entre 270 y 540 centímetros cúbicos.

Una de las ideas sugeridas fue un embalaje en forma de pirámide cuadrangular (observa la figura siguiente), que sugiere las pirámides de Egipto, cuya tapa estaría en la base.



El equipo diseñadores estableció los siguientes criterios de construcción del embalaje:

- La estabilidad, definida como la razón entre la altura de la pirámide y la semidiagonal de la base: $E = a/s$
- El área total de la pirámide que estaría relacionada con el costo del material: menor área significa menor costo.
- La facilidad de empaquetamiento de las pirámides en cajas, aprovechando al máximo el espacio interior de las cajas.

Tarea: Informe sobre el embalaje ideal

Elabora un breve informe en que presentes a la fábrica de cosméticos el embalaje que consideres más adecuado, de modo que convenza al cliente de las ventajas de la solución que propones con base a los estudios realizados.

Situada en estos términos, la tarea tenía las características de un trabajo en proyectos que necesitaría varias sesiones de clase para llevarla a cabo. La profesora decidió modificar la tarea, desdoblándola en diversas subtareas más específicas (T1, T2, T3, T4, T5, T6 y T7), algunas con un carácter más complejo, pero otras esencialmente de cálculo.

Subtareas

T1. Los integrantes del equipo de diseño tienen que verificar que la estabilidad de la pirámide es mayor en cuanto es mayor el valor de E. Ilustra esta conclusión por medio de un ejemplo.

T2. La razón de la estabilidad E corresponde a la tangente trigonométrica de un ángulo de la pirámide. ¿Cuál es este ángulo? ¿Qué amplitud podría tener ese ángulo? ¿Cómo varía la estabilidad a medida que aumenta ese ángulo?

T3. El equipo responsable del proyecto decide considerar los tres casos siguientes para la medida de la arista de la base de la pirámide: arista 1 = 6 cm; arista 2 = 9 cm; arista 3 = 12 cm. Teniendo en cuenta los volúmenes admitidos indica, para cada caso, los valores posibles de la altura de la pirámide.

T4. Tomando una serie de valores para la altura de la pirámide, en cada uno de los casos, averigua lo que sucede con la estabilidad obtenida. ¿Cuál sería, en cada caso, las pirámides más estables y las menos estables? Justifica la respuestas. Si lo consideras conveniente pon ejemplos ilustrativos.

T5. Determina en cada caso el volumen correspondiente a cada altura considerada.

T6. Determina también en cada caso, el área total de la pirámide correspondiente a cada altura considerada.

T7. Aceptando que una buena estabilidad corresponde a valores de E comprendidos entre 1 y 2,5 decide justificadamente en función de los criterios del equipo, cuáles serían las pirámides más ventajosas.

En la realización de las subtareas, los alumnos comenzaron por buscar referentes para aclarar el contexto real. Hablando entre sí, expresando sus ideas sobre los objetos, fenómenos y situaciones descritos. Con frecuencia estas conversaciones los llevaban a confrontar perspectivas para dar sentido a los aspectos del escenario extra-matemático. Los alumnos fueron generando imágenes mentales de la situación presentada que se plasmaron en diagramas esquemáticos que muestran aspectos esenciales del modelo real.

Así, en la subtarea T1 los alumnos trataron de interpretar la noción de estabilidad y llegaron a imaginar todas las formas de pirámides más o menos estables. La estabilidad se convirtió en un concepto de naturaleza no matemática, ligado a la idea de mayor o menos facilidad para derribar la pirámide. Esta formulación de la estabilidad fue importante para la

construcción del concepto funcional de estabilidad que tenían que emplear en sus conclusiones –la estabilidad depende de la base y de la altura-.
La representación por medio de esquemas fue importante para la interpretación de la estabilidad como función de ciertos ángulos definidos en la pirámide. Cuando los alumnos analizaron la influencia de los ángulos α y β los alumnos observaron la manera se relaciona la tangente con la variación del ángulo.

En las diferentes subtareas los alumnos tuvieron la oportunidad de realizar debates entre ellos, definir una estrategia, ayudándose mutuamente en la comprensión de las condiciones de la situación y de las estrategias a seguir, hacer preguntas a la profesora, sacar conclusiones y ejemplificarlas por medio de esquemas, emplear la hoja de cálculo para realizar cálculos, comparar resultados obtenidos con o sin ordenador, definir criterios o redactar el informe pedido. Se trata de un buen ejemplo de una tarea realizada en grupo que acabó con un informe del que presentamos un extracto en las páginas seguintes.

2. Comunicación y negociación

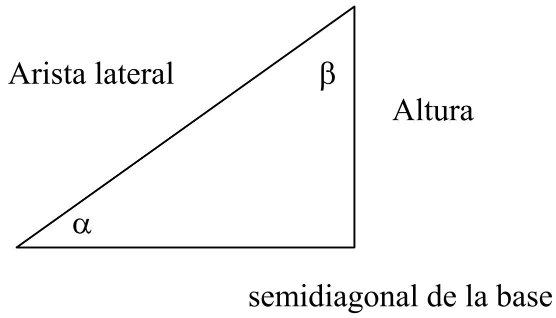
La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas exige, como hemos visto, que los alumnos interactúen entre sí y con el profesor. Dos de esas formas de interacción tienen una importancia capital, la comunicación y la negociación de significados. La comunicación se refiere a la interacción entre los diversos sujetos que hay en una clase, empleando una lengua propia, que es una mezcla de lenguaje cotidiano y de lenguaje matemático. La negociación de significados se refiere al modo en que los alumnos y profesor exponen unos a otros su forma de ver los conceptos y los procesos matemáticos, los perfeccionan y los ajustan al conocimiento matemático indicado por el currículo.

2.1 Comunicación en clase de matemáticas

La comunicación en la clase es uno de los aspectos que han recibido más atención en las orientaciones curriculares para la enseñanza de las matemáticas. Es al mismo tiempo, un indicador de la naturaleza del proceso de enseñanza y aprendizaje y una condición necesaria para que éste se lleve a cabo.

Extracto del informe de los alumnos sobre el problema de las pirámides

Es necesario emplear el triángulo rectángulo existente en la pirámide de la actividad

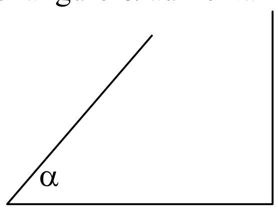


El ángulo existente en la pirámide corresponde a la tangente trigonométrica que es equivalente a la razón E:

$$tag\alpha = \frac{cateto.opuesto}{cateto.adjacente} = \frac{altura}{semidiagonal.base} = \frac{a}{s}$$

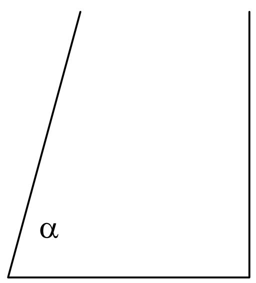
$$\text{siendo } E = \frac{a}{s} \wedge tag\alpha = \frac{a}{s} \Rightarrow E = tag\alpha$$

La amplitud del ángulo es mayor que 0º y menor que 90º, pues si es 0º la arista lateral va a coincidir con la semidiagonal de la base. Si fuera 90º la altura sería infinita.
¿Cómo será la variación de la estabilidad a medida que aumenta el ángulo?
Para explicar mejor la respuesta, pensamos que era importante hacer un dibujo que fuese mostrando lo que pasa cuando el ángulo α aumenta.
Si el ángulo α aumenta



La altura tiene necesariamente que aumentar

Si el ángulo aumenta aún más



La altura tiene aún más necesidad de aumentar

Como ya concluimos en las anteriores cuestiones, a medida que la altura aumenta, la estabilidad va disminuyendo. Así:

$$>\alpha \Rightarrow > \text{altura} \Rightarrow < \text{estabilidad}$$

Encontramos curioso el otro ángulo β. Hicimos una breve reflexión sobre éste ángulo:

$$tag\beta = \frac{cateto.opuesto}{cateto.adyacente} = \frac{semidiagonal.base}{altura} = \frac{s}{a}$$

La conclusión fue la siguiente: a medida que el ángulo β aumenta, la altura disminuye. Como vimos anteriormente, en cuanto menor es la altura es mayor la estabilidad. Entonces:

$$>\beta \Rightarrow <\text{altura} \Rightarrow >\text{estabilidad}$$

La comunicación se analiza habitualmente por medio de estudios del discurso de los participantes. En el lenguaje común, discurso significa una intervención larga de un orador, la mayoría de las veces revestida de formalidad. En el sentido lingüístico “discurso” tiene un significado muy diferente. Indica el modo en que los participantes atribuyen significados en situaciones concretas y contextualizadas. Supone tanto la forma en que se presentan las ideas como lo que se relaciona implícitamente con ellas. De este modo, el discurso puede ser oral, escrito o gestual y existe siempre, de una u otra forma, en todas las situaciones de enseñanza y aprendizaje.

En las clases de matemáticas los interlocutores son el profesor y los alumnos. De forma general el discurso es controlado por el profesor y éste puede atribuir a los alumnos una participación más o menos importante. Por su parte los alumnos no siempre aceptan el control de su discurso, sino que tratan de expresarse por sus propios medios, a veces entrando en conflicto declarado con las intenciones del profesor.

El discurso en clase

El discurso implica aspectos fundamentales del conocimiento ¿Qué es lo que le da validez o plausibilidad a algo en matemáticas? ¿Cómo se puede descubrir si una cosa tiene sentido o no? Un argumento básico de muchas clases tradicionales es que una cosa es cierta porque el libro o el profesor lo han dicho. Otra perspectiva, que es la que aquí proponemos se centra en la evidencia matemática y en el reconocimiento. Para que los alumnos puedan desarrollar su capacidad de formular problemas, de explorar, conjeturar, razonar lógicamente, evaluar si algo tiene sentido, el discurso matemático tiene que estar basado en la evidencia matemática.

NCTM, 1994.
Normas profesionales para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

La comunicación oral tiene un papel fundamental en la clase de matemáticas. Es imprescindible para que los alumnos puedan expresar sus ideas y confrontarlas con las de sus compañeros. La comunicación oral es determinante de lo que los alumnos aprenden acerca de las matemáticas, de sus contenidos, y de la propia naturaleza de las matemáticas.

Desarrollar el discurso en clase de matemáticas es una parte importante del papel del profesor. El puede hacer preguntas y proponer tareas que faciliten, promuevan o desafíen el pensamiento de cada alumno. Para ello, el profesor necesita saber abrir con atención las ideas de los alumnos y pedirles que las aclaren y justifiquen, oralmente o por escrito. Tiene que gestionar la participación de los alumnos en la discusión y decidir cuándo y cómo animar a cada uno a participar. La dirección del discurso le hace tomar al profesor decisiones importantes – lo que tiene que profundizar, cuándo hay que introducir notaciones y lenguaje matemático, cuándo tiene que suministrar información, cuándo debe dejar a los alumnos que luchen con una dificultad, etc.

La comunicación escrita proporciona también una oportunidad importante de expresar ideas matemáticas. Las anotaciones en el cuaderno y la pizarra desempeñan un papel estructurante muchas veces decisivo, en las actividades de aprendizaje. En la práctica, la producción escrita de los alumnos suele ser muy limitada, reduciéndose muchas veces a la realización de cálculos necesarios para resolver ejercicios o problemas. Sin embargo, hoy se reconoce que puede tener una importancia mayor en la enseñanza de las matemáticas. Por ello se comienza a pedir a los alumnos que redacten informes o ensayos, justificando y explicando sus razonamientos.

Informe sobre la resolución de un problema por ordenador.

Después de identificar los datos, intentamos resolver el problema. Fijamos una recta ***t*** paralela a ***r*** que pasa por el punto ***A***, y luego trazamos una recta ***p*** perpendicular a ***r*** que pasa por ***B***. Después hallamos el punto de intersección de ***t*** y ***p*** y obtuvimos el punto ***E***. Pensamos que el punto ***E*** era el centro de la circunferencia pedida, pero a ojo observamos que no, y lo intentamos de otra manera. Después de este intento fallido volvimos a errar en otro intento que consistió en hallar la mediatriz de [AB] y el punto de intersección D de esta recta con t. Entonces hicimos una circunferencia con centro en D y observamos que no era tangente, aunque por poco, con lo que vimos que estábamos cerca. Entonces se nos ocurrió intersecar la mediatriz m con la recta p y nos dio el punto C. Hicimos una circunferencia con centro en C y radio AC y nos dio la circunferencia que queríamos. Esta circunferencia i era tangente a la recta r. Para comprobarlo hicimos la intersección de la circunferencia i con la recta r y nos dio que eran tangentes.

Manuel Saraiva, 1991
El ordenador en el aprendizaje de la geometría.
Una experiencia con alumnos de 10 años

Una de las formas más importantes que tiene el profesor para orientar el discurso en clase es haciendo preguntas a los alumnos. Cuestionándolos el profesor puede detectar dificultades en el nivel de comprensión de los conceptos y de los procesos matemáticos, les ayuda a pensar, los motiva para participar y para saber si están atendiendo al trabajo de clase.

No es tan fácil como parece el hacer buenas preguntas. Preguntas que susciten respuestas del tipo "si" o "no" o que en su formulación incluyan la propia respuesta, no ayudan mucho a razonar al alumno.

Los alumnos deben explicar el significado de concepto, hacer conjeturas, proporcionar estrategias de resolución para los problemas, deben poder discutir, comprobar, aplicar y verificar sus descubrimientos. Para eso, se necesita hablar, tanto unos con otros, como con el profesor. Cuando los alumnos razonan en voz alta sobre las matemáticas, las ideas y el conocimiento se desenvuelven en cooperación. En la resolución de un problema los profesores deben explorar las sugerencias de los alumnos, ayudarles a evaluar las sugerencias de los otros, a reflexionar críticamente sobre ellas, haciendo objeciones y buscando implicaciones. La participación activa de los alumnos en el aprendizaje debe proporcionar múltiples oportunidades para discutir, hacer cuestiones y reforzar la comprensión de las matemáticas y de su relación con la vida cotidiana.

El arte de hacer preguntas

1. Intento hacer una pausa después de una pregunta (..) La pausa deja claro que la pregunta va dirigida a todos y no solamente a uno o dos que levantan la mano. Muchos alumnos ni siquiera intentan responder a una pregunta a no se que se sientan seguros de la respuesta. Una pausa mayor les deja tiempo para pensar y para ganar confianza antes de responder. (..)

3. Intento evitar responder a mis propias preguntas. Muchas veces solía responder a mis propias preguntas cuando no había voluntarios para hacerlo o cuando tenía prisa. Esto llevaba a los alumnos a pensar que no tenían que responder.

4. Intento continuar las respuestas de los alumnos preguntando ¿porqué? Esto ayudaba a los alumnos que no sabían responder la pregunta inicialmente a comprender como sus compañeros habían llegado a la respuesta. También animaba la discusión entre los alumnos y evitaba las respuestas casuales. Lanzar una pregunta corta es pocas veces útil. La pregunta ¿porqué? debería ser una de las más frecuentes en clase.

5. Intento limitar el uso de preguntas que se basen exclusivamente en la memoria. Los alumnos pueden ser perfectamente capaces de recitar, por ejemplo, la propiedad asociativa, pero eso no significa que reconozcan la propiedad o que sean capaces de aplicarla a una situación nueva.

8. Intento que la respuesta de un alumno provoque reacción del grupo o de otro alumno. Esta es una forma de animar a los alumnos a que se escuchen unos a otros.

9. Intento insistir en que atiendan a las discusiones. Con ello se pretende que todos los alumnos aprendan a oír –a mi, a oírse unos a otros, a oír a todos -.

15. Intento hacer preguntas abiertas. Podría preguntar por ejemplo, ¿Qué es mayor ***b*** o ***-b***? Los alumnos que intentaron responder a esto descubrieron rápidamente que no hay una respuesta única y directa. Una pregunta como esta puede provocar una discusión viva, llevando a los alumnos a una comprensión más profunda de las variables y de los números negativos. (..)

18. Intento sustituir exposiciones por un conjunto de preguntas apropiadas. Con algunas orientaciones los alumnos puede descubrir las mismas ideas que tenía previsto transmitirle de un modo expositivo. (..)
19. Intento evitar que las preguntas provoquen respuestas orales corales de todo el grupo. Es dudoso el interés de la información que se obtiene de este tipo de respuestas. Podría preguntar, por ejemplo ¿A qué es igual la suma de los términos 7x y 5x? Se escucharía al coro responder con una entonación de rutina “12x”. Pero ¿significa eso que todos comprenden? (..)

David Johnson, 1982.
Every minute counts

Los alumnos deben aprender a verificar, aceptar o rechazar afirmaciones por medio de razonamientos matemáticos. A través de la comunicación toman conciencia de los procesos de construcción y validación de los conocimientos matemáticos, aprenden las razones que hacen que algo tenga o no sentido y determinan si una afirmación es verdadera o no en matemáticas.

El discurso en clase de Matemáticas debe ser conducido por el profesor de modo que los alumnos escuchen, respondan, comenten y hagan preguntas unos a otros. El profesor debe procurar que los alumnos tengan la iniciativa de formular problemas y hacer preguntas, hagan conjeturas y presenten soluciones, exploren ejemplos y contraejemplos en la investigación sobre una conjetura, y que utilicen argumentos matemáticos para determinar la validez de las afirmaciones, intentando convencerse a si mismo y a los demás. Los alumnos deben habituarse a emplear una gran variedad de herramientas para razonar y para comunicar, incluyendo la pizarra, el retroproyector, la calculadora, el ordenador y otros materiales y soportes.

Realmente el trabajo con la calculadora y el ordenador, cuando se hace por medio de tareas interesantes o que suponen un reto, puede favorecer que los alumnos formulen conjeturas, estimular en ellos una actitud investigadora y enriquecer el tipo de razonamientos y de argumentos que emplean. Para ello es fundamental que los alumnos adquieran destreza en el uso de tecnología y puedan emplearla con flexibilidad cuando sea útil y pertinente. El trabajo con otros materiales (por ejemplo, en el estudio de la geometría) puede proporcionar igualmente situaciones muy ricas para el desenvolvimiento de los alumnos, de su razonamiento y de la comunicación matemática.

En cualquier clase de matemáticas, tanto en la más innovadora como en la más tradicional, existe siempre un flujo continuo de comunicación. El profesor debe garantizar que esa comunicación se establece en los dos sentidos: de él hacia los alumnos y de los alumnos hacia él. El profesor debe también provocar la comunicación entre los alumnos, estableciendo para ello unas reglas apropiadas. De la fluidez y de la naturalidad de la comunicación entre los participantes, además de la diversidad de los soportes (orales, escritos, empleando medios audiovisuales o nuevas tecnologías) depende gran parte del éxito del desarrollo de los conocimientos, capacidades y valores establecidos en el currículo.

2.2. Negociación de significados

Una negociación es una interacción entro dos o más concurrentes, con puntos de partida e intereses muchas veces diferentes, que puede dar algo los unos a los otros beneficiándose todos. En el proceso de enseñanza y aprendizaje el profesor y los alumnos tienen, de partida, experiencia y conocimientos muy diferentes. El profesor - al menos al principio – es un perito y el alumno un aprendiz. Para el profesor los conceptos matemáticos tienen un significado rico, lleno de relaciones con otros conceptos y procesos matemáticos. Para los alumnos, los conceptos matemáticos no tienen ningún significado al principio. Ambos están – al menos al principio – interesados en que haya aprendizaje. De esta manera la negociación de significados matemáticos en clase es un aspecto importante del proceso de aprendizaje. Es importante, por ello, caracterizar el papel que desempeñan en esta negociación el profesor y los alumnos.

La negociación de significados matemáticos en clase implica que cada uno de los participantes, profesor y alumnos, se formen sus propios significados visibles en el proceso. A través de intercambio de ideas, cada uno puede llegar a conocer mejor los referentes del otro y sus relaciones con el conocimiento matemático. En este proceso desempeña un papel importante la discusión sobre diferentes temas y la reflexión sobre tareas previamente realizadas por los alumnos.

Significado matemático

Al significado matemático se llega estableciendo conexiones entre la idea matemática particular de que se trate y los otros conocimientos personales del individuo. Una nueva idea es significativa en la medida en que cada individuo es capaz de relacionarla con los conocimientos que ya tiene. Las ideas matemáticas formarán conexiones, no sólo con otras ideas matemáticas sino también con otros aspectos del conocimiento personal. Profesores y alumnos llegarán a tener sus propios conjuntos de significados, únicos para cada individuo (...)
El profesor que desea promover una negociación de significados en clase debe tener en cuenta que necesita preguntas y responder a preguntas, dar razones y pedir razones, clarificar y pedir clarificaciones, dar analogías y pedir analogías, describir y pedir descripciones, explicar y pedir explicaciones, dar y recibir ejemplos. Podemos concluir que esta simetría obvia es necesaria si queremos que suceda una negociación de significados verdadera.

Alan Bishop y Fred Goffre, 1986.
Classroom organisation and dynamic

Al profesor le corresponde establecer las condiciones necesarias para el desenvolvimiento normal del proceso de negociación de significados matemáticos en clase. Así, debe estimular a os alumnos a hablar y contribuir con frecuencia. Los alumnos, por su parte, necesitan tener confianza en su participación en este proceso e interiorizar las reglas adecuadas para su desenvolvimiento. Precisa, así, comprender que tienen que darse unos a otros la posibilidad de contribuir, tratar las diferentes contribuciones con respeto, preguntar cuando no entienden los aportes de los otros, poner reparos cuando sientan que una aportación no es válida en algún sentido, presentar razones para las afirmaciones realizadas y tratar de separa la idea de la persona que la da. Está claro que todas estas normas de procedimiento son igualmente válidas para los profesores.

3. Ambiente de aprendizaje

El ambiente de aprendizaje adquiere un papel de gran importancia en la forma en que los alumnos aprenden matemáticas. Este ambiente puede tener una mayor o menor significado en el trabajo y una mayor rigidez o informalidad en las relaciones entre los participantes. Además de las tareas propuestas del tipo de comunicación y negociación de significados, el ambiente de aprendizaje depende de dos factores esenciales, la cultura de la clase, y el modo en que trabajan los alumnos.

Desarrollar la comprensión matemática

P: Vamos a formular nuestro problema: supongamos que un navío consume una cierta cantidad ***q*** de combustible por milla, digamos a una velocidad de 20 nudos, y que los tanques tienen una capacidad de ***T*** toneladas de gasoil, ¿cuántas millas puede viajar el navío sin abastecerse?
A: ¿Qué significa ***q*** y ***T***?
P: ¿Por qué? ***q*** significa la cantidad de combustible consumido por milla y ***T*** la capacidad del tanque en toneladas.
A: ¿Por qué no nos das los números? Así podríamos hacer un problema
P: ¿Por qué no resolverlo sin números?
A: Yo podría resolverlo si tuviese números.
P: Dime como.
A: Dividiría el número de toneladas del tanque por el consumo por milla.
P: ¿Por qué no indicas la división?
A: Podría, pero no se que tengo que dividir entre qué.
P: Pero tu lo sabes, tienes todo lo que necesitas. Intenta hacerlo. Usa las letras. ***T*** para el número de toneladas y ***q*** para la cantidad de gasoil consumido en una milla. ¿Cómo quieres representar la incógnita?
A: Vamos a llamarla ***A***.
P: Está bien, ¿entonces ***A*** va a ser igual a qué?
A: ***A*** es igual a ***T*** dividido por ***q***.

(..) Una intervención particular de la profesora, "Dime como", usa positivamente el poder, invitando al alumno a explicar y a aclarar públicamente sus pensamientos y conocimientos. Esto facilita a la profesora desarrollar el significado matemático que dan los alumnos al asunto. Estos momentos son críticos; el acontecimiento (y la intervención) parece relativamente insignificante, pero no lo son, pues cuando son frecuentes producen un ambiente de aprendizaje totalmente diferente del que se genera cuando el profesor lo "impone". Más aun, cuando mas tarde los alumnos aprendan acerca de los significados matemáticos y ganen confianza en el empleo de técnicas de negociación podrán entrar conjuntamente en el proceso de aprendizaje, muchas veces tomando el poder y el control del profesor.

Alan Bishop y Fred Goffre, 1986.
Classroom organisation and dynamic

3.1. Ambiente de aprendizaje y cultura de la clase.

La caracterización del ambiente de aprendizaje tiene dos componentes importantes: lo que está permitido y lo que se espera de los diferentes actores. ¿Qué está permitido que hagan los alumnos? ¿Pueden hacer preguntas en voz alta al profesor? ¿Pueden intercambiar opiniones con sus compañeros? ¿De qué modo se relaciona el profesor con los distintos alumnos? ¿Reclama su participación? ¿Trata a todos del mismo modo? ¿Qué espera del trabajo de los alumnos?

El ambiente de aprendizaje está condicionado por las características físicas del aula, como el tamaño y forma de la clase, las mesas y sillas, la luz, el aislamiento de ruidos del exterior, etc. Pero sobre todo está condicionado por la relación de poder establecida y por los papeles que se le atribuyen a los alumnos y al profesor. Es decir, subyacente al ambiente de cada clase hay una determinada cultura que regula las normas de comportamiento y de interacción y establece las expectativas de los participantes.

En realidad las clases constituyen verdaderas microculturas donde se mantienen diversas creencias y valores que se perpetúan por las prácticas cotidianas. Estas prácticas incluyen el modo de entrar en el aula, como se elabora la programación y la forma en que se corrige los deberes de casa. Incluye también, de una manera decisiva, el tipo de tareas que el profesor suele proponer, el modo en que anima (o no) a los alumnos a manifestar dudas u opiniones, las oportunidades que les da para que argumenten y justifiquen sus ideas. Todos estos aspectos encierran mensajes implícitos sobre el papel que el profesor atribuye a los alumnos en el aprendizaje y sobre sus expectativas con relación a sus capacidades. Estas creencias y valores tienen directamente que ver con la naturaleza y finalidades de la disciplina, como cuerpo de saber y como práctica social (de ahí la importancia de considerar cuestiones sobre la epistemología de las matemáticas) y también como objeto de estudio (de ahí la importancia de tomar en consideración las finalidades de la enseñanza de las matemáticas).

Además del conocimiento sobre los hechos y procedimientos matemáticos que los alumnos adquieren como resultado de la enseñanza, ellos se forman una idea acerca de que es la matemática y de cómo se resuelven las tareas matemáticas, idea que está muy influenciada por la cultura de la matemática escolar en la que aprenden esos hechos y procedimientos. Por otro lado, esa noción de lo que es realmente la matemática y como se trabaja en matemáticas determina en gran medida el modo en que los alumnos emplearan, tanto en clase como en la vida cotidiana, las matemáticas que están aprendiendo.

Ambiente de aprendizaje
El profesor de matemáticas debe crear un ambiente de aprendizaje que favorezca el desenvolvimiento del poder matemático de cada alumno: . Permitiendo y estructurando el tiempo necesario para explorar profundamente la matemática y para familiarizarse con las ideas y problemas significativos. . Usando el espacio físico y los materiales de forma que faciliten el aprendizaje matemático del alumno. . Ofreciendo un contexto que anime a desarrollar la conciencia de que se es competente en matemáticas. . Respetando y valorando las ideas de los alumnos, sus formas de pensar y sus actitudes hacia las matemáticas. Y esperando y animando constantemente a los alumnos a: . Trabajar independientemente y en colaboración, de manera que se le de sentido a las matemáticas. . Aceptar riesgos intelectuales, haciendo preguntas y formulando conjeturas. . Manifestar una forma de competencia matemática al validar y defender ideas con argumentos matemáticos. NCTM, 1994. *Normas profesionales para la enseñanza de las matemáticas*

El aprendizaje de las matemáticas requiere un ambiente en el que los alumnos puedan expresar con facilidad sus dudas y sugerencias, en el que se sientan respetados y valorados, y contribuyan a un trabajo colectivo. Esto implica la capacidad del profesor para valorar sus ideas, animar a que participen y respetar sus diferencias y dificultades.

El uso de la calculadora como del ordenador permiten desarrollar un ambiente de trabajo participativo, en el que se lleve a cabo una actividad matemática rica y estimulante. Estos materiales pueden ser usados por el profesor para reforzar su dominio del discurso. Pero también pueden emplearse para estimular en los alumnos una actitud crítica e investigativa y para enriquecer su capacidad de razonamiento y de comunicación.

El profesor debe desarrollar e integrar tareas, discurso y ambiente, de forma que se promueva el aprendizaje de los alumnos. De este modo se vuelve fundamental que los observe y escuche durante la clase, en el sentido de hacerles preguntas y proponerles tareas que desarrollen el razonamiento y la comprensión de los alumnos.

3.2 Modo de trabajo de los alumnos.

En la clase, el profesor puede elegir entre diversas formas de organizar el trabajo de los alumnos. Las formas básicas de trabajo son en gran grupo o toda la clase, en pequeño grupo, por parejas o individualmente. Cada una de ellas permite atender mejor a determinadas finalidades y es más adecuada para la realización de ciertas tareas.

Un momento de discusión en el trabajo colectivo

[Después del estudio de la función cuadrática]. La profesora dialoga con los alumnos sobre cuestiones que conducirán a situaciones distintas de las que se acaban de estudiar, suscitando expectativas y reflexiones y posibilitando la intervención de otras nociones. Este dialogo, conducido por la profesora, se construye a partir de las preguntas y de algunos retos propuestos al grupo de alumnos, a las que os alumnos han ido respondiendo.

P: En este momento, lo que podemos afirmar es que si en un punto f'(x) pasa de positiva a negativa, la función tiene un máximo relativo. La recíproca ¿será verdadera? ¿Qué dicen?

Un alumno: Yo creo que no.

P: Pon un ejemplo.

El alumno no lo consigue. Ninguno da un ejemplo.

P: Intentar descubrir una función que tengan un extremo relativo en un punto y que no tenga derivada en ese punto.

Un alumno, después de un momento: Tenemos que comenzar por ver cuando una función no tiene derivada...

P: ¿Y cuándo es?

El alumno responde correctamente.

P: ¿Un ejemplo?

Se produce un momento de espera. Una alumno sugiere algo que la profesora rechaza: demasiado complicado, quiero una cosa que se vea luego.

Poco después otro alumno sugiere valor absoluto de x, que es mucho mejor aceptado por la profesora: Bien Pablo.

Henrique Guimaraes, 1988
Ensinar matemática: Concepcoes e Prácticas

El trabajo en gran grupo o de toda la clase es fundamental en la clase de matemáticas. El profesor lo emplea habitualmente para presentar materia nueva, conducir un debate, hacer preguntas a los alumnos o en particular a un alumno al que solicita que salga a la pizarra. El trabajo en gran grupo es decisivo en la negociación de los significados matemáticos. Se trata de un modo de trabajo indispensable en la introducción de nuevos conceptos e ideas matemáticas, también para la presentación de nuevas tareas y en la discusión sobre las tareas ya terminadas. Muchas veces se emplea para realizar discusiones con los alumnos. Puede además servir para resolver problemas o para dirigir una investigación matemática, en la que el profesor pide las aportaciones de todos los alumnos. Sin embargo, empleado exageradamente, ocupando todo el tiempo de la clase, este tipo de trabajo puede llevar a muchos alumnos a distraerse y a dejar de participar, y, lo que es más grave, no permite desarrollar determinadas competencias y capacidades que exigen un esfuerzo individual o la interacción con otros compañeros. Por ello, es importante que el profesor sea capaz de dosificar convenientemente este tipo de trabajo, combinando con otras formas que faciliten la implicación de todos los alumnos.

Trabajar en pequeños grupos permite a los alumnos exponer sus ideas, abrirse a sus compañeros, hacer preguntas, discutir estrategias y soluciones, argumentar y criticar otros argumentos. En pequeño grupo es más fácil exponer sus puntos de vista, avanzar con sus descubrimientos y expresar sus pensamientos. Por eso, destinar más tiempo al trabajo en pequeño grupo en las clases de matemáticas es una de las orientaciones curriculares más destacadas. Sin embargo, no todas las tareas son adecuadas para una realización en pequeños grupos. Tareas muy estructuradas como la resolución de ejercicios, no sacan mucho partido de la interacción de los alumnos. Cada alumno acaba muchas veces por resolver los ejercicios por si mismo, sin que haya motivo claro para la actividad del grupo. Tareas que exigen un elevado grado de concentración, como resolver un problema difícil o escribir un ensayo, tampoco son propicias para el trabajo en grupo. Por otro lado, la realización de investigaciones matemáticas y la ejecución de proyectos son tareas que pueden sacar gran partido de la capacidad creativa del trabajo en grupo y de la posibilidad de que los alumnos hagan espontáneamente una subdivisión del trabajo, sacando mejor partido de las capacidades de cada uno.

El trabajo por parejas está tomando una importancia mayor cada vez en la clase de matemáticas. Este tipo de trabajo proporciona la posibilidad de que se establezca una interacción significativa entre los alumnos, que pueden intercambiar impresiones entre sí, con vistas a la resolución de la tarea propuesta. Los alumnos pueden así, participar en dos niveles de discurso en el aula: el colectivo y el que desarrollan con su compañero de aprendizaje. Se trata de una forma práctica de trabajar, que no exige en general alteraciones del espacio físico del aula y que proporciona a los alumnos un cierto margen de autonomía. Es particularmente adecuado cuando la tarea propuesta está relativamente estructurada y no exige un elevado nivel de concentración individual.

Finalmente, el trabajo individual es también necesario en el proceso de enseñanza y aprendizaje de matemáticas. El alumno tiene que ser capaz de asumir su independencia y su responsabilidad personal. El profesor tiene, también que encontrar momentos para dialogar específicamente con cada alumno, para darse cuenta de sus necesidades e intereses, dándole apoyo directo necesario para que pueda continuar. La realización de ejercicios, problemas y ensayos son tareas que se adaptan muchas veces a este modo de trabajo.

Diferentes tipos de tareas y diferentes modos de trabajo

(..) Las ideas no están aisladas en la memoria, sino que están organizadas y asociadas al lenguaje natural que se usa en las situaciones que aparecieron en el pasado. Este punto de vista constructivo del proceso de aprendizaje debe repercutir en el modo en que se enseña la mayor parte de las matemáticas. Así, la enseñanza debe ser variada e incluir oportunidades para:

. Trabajo de proyectos
. Propuestas para trabajo individual y en grupo.
. Debates entre profesor y los alumnos y entre los alumnos
. Práctica de métodos matemáticos
. Exposición por el profesor.

NCTM, 1994.
Normas profesionales para la enseñanza de las matemáticas

Cada una de estas formas de trabajo tienen su papel. Su eficacia depende del modo como son dirigidas por el profesor. Hay trabajo colectivo interesante y monótono, trabajo en grupo productivo e improductivo, así como trabajo por parejas e individual bien y mal aprovechado. Todo depende de que las tareas propuestas a los alumnos sean o no adecuadas al modo de trabajo establecido. Y todo depende, también, del modo como el profesor acompaña la realización de las tareas y como gestiona el ambiente de aprendizaje.

Conclusión

Cada profesor tiene su estilo propio de enseñanza, estructurando sus unidades didácticas. Seleccionando las situaciones de aprendizaje, organizando las tareas y articulando el proceso de enseñanza con los momentos de evaluación. Es por tanto importante que el profesor tenga en cuenta los diversos aspectos que dan estructura al proceso de enseñanza y aprendizaje, los modos de analizar si su práctica se adecua a las características de su clase y a las necesidades individuales de cada alumno.

El hecho de no tener una metodología universalmente aplicable (ni en la enseñanza secundaria ni en cualquier otro nivel de enseñanza) no significa que no existan estrategias de enseñanza más adecuadas y otras menos aconsejables para cada situación concreta. Al profesor le cabe conocer las alternativas disponibles y conocerse a sí mismo, sabiendo hasta que punto es capaz de usar con confianza y desenvolvimiento cada una de ellas. También tiene que procurar, por medio del intercambio de experiencias con sus compañeros, participar en actividades de formación en proyectos innovadores de investigación o investigación-acción, perfeccionarse y volverse cada vez más competente en el manejo de los instrumentos de análisis propias de su tarea profesional,

Referencias

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática: A experiência do projecto* MAT_{789} (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

APM (1988). *A renovação do currículo de matemática*. Lisboa: APM.

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.

Guimarães, H. M. (1988). *Ensinar matemática: Concepções e práticas* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Johnson, D. (1982). E*very minute counts*. Palo Alto, CA: Dale Seymour.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da matemática* (tradução portuguesa da APM do original em inglês de 1991). Lisboa: IIE e APM.

Saraiva, M. J. (1991). *O computador na aprendizagem da geometria: Uma experiência com alunos do 10º ano de escolaridade* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.