2 - A NATUREZA DA MATEMÁTICA[i]

A questão do que é hoje um bom ensino da Matemática não é uma questão pacífica. Tem diversas respostas dependendo das finalidades da educação privilegiadas, que variam consoante os contextos sociais, políticos e culturais onde a questão é colocada, que se relacionam com as perspectivas psicológicas e sociológicas sobre a aprendizagem em que nos situarmos. No entanto, diversos matemáticos, filósofos e educadores salientam, cada vez mais, que a concepção que se sustenta sobre a Matemática influencia profundamente o que se considera ser desejável relativamente ao seu ensino e aprendizagem. Assim sendo, como Hersh escreve num artigo publicado em 1986, a questão não é então qual a melhor maneira de a ensinar, mas o que é realmente a Matemática.

Ao pretender fazer-se um cômputo geral da Matemática que revele os seus factores essenciais e explique como é que os seres humanos são capazes de a fazer, torna-se difícil organizar os diversos aspectos num todo coerente. De facto, a simples pergunta "afinal o que é a Matemática" tem sido, ao longo dos tempos, objecto de diversas tentativas de resposta. E os problemas acentuam-se quando se pretende identificar os objectos das suas teorias. A Matemática é o conhecimento de quê? Esta questão filosófica, apesar de ser tão antiga quanto esta ciência, tem gerado, desde sempre, inúmeras controvérsias.

Constitui, pois, um desafio conceber um balanço que abarque a complexidade e o carácter multifacetado da Matemática enquanto actividade e corpo de conhecimentos. Este desafio é acrescido se se tiver em conta que ela não tem permanecido igual a si própria ao longo dos tempos. Pelo contrário, tem sofrido um processo de evolução constante no qual se detectam mudanças profundas nalguns dos seus aspectos mais essenciais. Sistema organizado, linguagem, instrumento, actividade, são diversas perspectivas segundo as quais a Matemática tem sido encarada. Axiomatização, formalização, dedução, são o essencial para alguns e apenas uma parte, nem sequer a mais importante, para outros.

---

[i] Ponte, J. P., Boavida, A., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: DES do ME.

Tradicionalmente, a epistemologia da Matemática procura responder a questões relacionadas com a lógica interna de produção do saber, adquirindo as respostas, frequentemente, um carácter prescritivo. Procura-se garantir a certeza do saber matemático e discute-se a natureza e os fundamentos desta ciência. No entanto, uma reflexão limitada a estas questões falha em localizá-la num contexto mais amplo do pensamento humano e da história.

Se a Matemática for descrita em termos dos seus conceitos, características, história e práticas, abre-se espaço para que a filosofia da Matemática, para além de reflectir sobre questões internas relativas ao conhecimento matemático, sua existência e justificação, se debruce também sobre questões externas relacionadas, nomeadamente, com a origem histórica e os contextos sociais de produção desse conhecimento. A actividade matemática poderá, assim, ser discutida como parte integrante da cultura humana em geral.

Neste capítulo reflecte-se sobre a natureza da Matemática, procurando enquadrar esta dualidade relativa a aspectos internos e externos da produção do saber. Numa primeira secção, abordam-se questões relacionadas com a natureza dos objectos matemáticos e discute-se o papel da experiência e da razão na génese e desenvolvimento da Matemática. Tendo por contexto uma perspectiva histórica, refere-se, numa segunda secção, a origem da Matemática e questiona-se a intemporalidade e o carácter absoluto atribuídos, frequentemente, à verdade, certeza e rigor matemáticos. A terceira secção incide sobre um período recente, particularmente importante para a filosofia da Matemática, caracterizado pela pesquisa de fundamentos seguros. Na quarta secção consideram-se direcções actuais da filosofia da Matemática e analisam-se aspectos da actividade matemática enquanto fenómeno social e cultural. Este capítulo termina com uma quinta secção, dedicada à experiência matemática, onde se referem algumas vertentes do processo de criação desta ciência, nomeadamente, a sua face extra-lógica e o contributo do computador para produção do saber matemático.

2.1 - Génese e natureza do saber matemático

2.1.1 - Natureza dos objectos matemáticos

Qual a natureza dos entes matemáticos, ou seja, a Matemática estuda o quê? Esta questão é abordada através de dois prismas de análise. Um, relacionado com a imaterialidade dos objectos matemáticos. Outro, que procura olhar estes objectos na sua relação com o sujeito que os conhece ou procura conhecer.

Imaterialidade dos objectos matemáticos

Os textos antigos, provenientes das primeiras civilizações orientais do Egipto e Babilónia, são demasiado fragmentários para permitir seguir, ao pormenor, o processo de constituição de uma aritmética e de uma geometria. No entanto, mostram claramente que os conceitos que aí intervêm "dizem respeito apenas a objectos *concretos:* enumeração de objectos de um amontoado, medida de grandezas susceptíveis de adição e subtracção, como comprimento, área, volume, peso, ângulo, para cada uma das quais se toma uma unidade e muitas vezes os seus múltiplos ou submúltiplos"[1].

Mais tarde, a partir do século V, surgem, com os pensadores gregos, as primeiras demonstrações e com elas a necessidade de precisar noções como figura, posição, grandeza, quantidade e medida. Platão mostra claramente que estas palavras não designam noções da experiência sensível, referindo que os matemáticos se servem de figuras visíveis para estabelecerem raciocínios, pensando, contudo, não nelas mas naquilo com que se parecem. Aristóteles não deixa de apoiar a ideia da imaterialidade dos objectos matemáticos, referindo, em particular, que as investigações dos matemáticos incidem sobre coisas atingidas por abstracção, de que são eliminadas todas as qualidades sensíveis como o peso, leveza ou dureza. Também Euclides, em quem vemos pela primeira vez desenvolvidas, segundo o método dedutivo, as propriedades dos objectos matemáticos concebidos por Platão e Aristóteles, não deixa qualquer dúvida quando ao facto de ter atribuído a ponto, recta, ângulo, círculo e polígono, o carácter de objectos de pensamento.

Constata-se assim que, pelo menos desde Platão, os matemáticos têm consciência de que os objectos sobre os quais raciocinam, embora tendo nomes idênticos aos que intervêm em cálculos práticos (números, figuras geométricas, grandezas) são seres completamente diferentes, seres imateriais obtidos por abstracção, a partir de objectos acessíveis aos sentidos, mas de que deles são apenas "imagens". Esta foi, aliás, uma das grandes ideias originais dos gregos: a atribuição às noções matemáticas do carácter de objectos de pensamento.

Até ao século XVIII, os matemáticos, apesar de reconhecerem a imaterialidade e o carácter ideal dos seres com que trabalhavam, tinham deles imagens acessíveis aos sentidos. No entanto, a partir dessa altura, para conseguirem novos progressos, necessitaram de introduzir novos objectos matemáticos que deixaram de apoiar-se em "imagens" sensíveis. Aos poucos vai-se delineando uma ideia que será aprofundada no século XX: a ideia de estrutura na base de uma teoria matemática. Esta ideia relaciona-se com a constatação de que numa teoria matemática mais importante do que a

natureza dos objectos que aí figuram, são as relações entre esses objectos, podendo acontecer que em teorias diferentes haja relações que se exprimam da mesma maneira.

A discussão da existência de objectos matemáticos no mundo físico pode proporcionar, como evidencia Sebastião e Silva (ver página seguinte), um contexto favorável ao debate, na sala de aula, de um dos aspectos fundamentais da Matemática — o das suas relações com a natureza.

Matemática: Descoberta ou invenção?

A existência de objectos matemáticos é ou não independente do sujeito que os estuda? Para responder a esta questão contrastam-se, tradicionalmente, duas concepções: concepções idealistas e concepções realistas.

O *idealismo*, enquanto perspectiva filosófica, insiste em que toda a realidade matemática é condicionada pelas construções dos matemáticos que inventam essa realidade. Neste âmbito, os objectos matemáticos são livres invenções do espírito humano, que não existem autonomamente e que possuem, apenas, as propriedades que o pensamento puder determinar.

O *realismo* supõe a realidade de um universo matemático autónomo. Os objectos têm propriedades próprias que existem independentemente do sujeito. O homem não inventa esta realidade objectiva que lhe é exterior. Limita-se a descobri-la.

O realismo, enquanto perspectiva filosófica, tem por base a doutrina de Platão, sendo frequente, no âmbito da filosofia da Matemática, considerar sinónimos os termos realismo e platonismo. Para o platonismo os objectos matemáticos são reais, embora não sejam objectos físicos ou materiais. A sua existência é um facto objectivo, totalmente independente do nosso conhecimento. Existem fora do espaço e do tempo, são imutáveis, não foram criados e não mudarão nem desaparecerão. Assim, a Matemática tem uma existência autónoma, obedecendo a uma lógica e leis internas. A actividade de fazer Matemática consiste na descrição e descoberta desses objectos, bem como das relações que os unem. Quer uns, quer outras, uma vez que são pré-existentes, podem ser descobertos pelo espírito, mas não inventados por este.

O platonismo e o idealismo, embora se situem em posições extremas quanto à questão da existência e realidade dos objectos matemáticos, estão muitas vezes presentes, em simultâneo, no pensamento dos professores de Matemática. Por um lado, a Matemática é vista como uma revelação, como uma passagem do concreto ao abstracto, mas, por outro lado, o professor espanta-se com a sua aplicabilidade à

Diálogo sobre a existência de entes geométricos no mundo físico

Pergunta dirigida aos alunos:
Afinal o que é um ponto, o que é uma recta, o que é um plano - na verdadeira acepção destes termos?
Na melhor das hipóteses obtém-se a resposta cómoda habitual (...):
Trata-se aí de termos primitivos, isto é de termos que não são definidos logicamente a partir de outros.
Mas o professor não deve de modo nenhum contentar-se com esta resposta. Deve sim voltar à carga:
Também os termos "gato", "rosa", etc. são termos primitivos, no mesmo sentido, e no entanto todos sabem reconhecer um gato, uma rosa etc. Ora quem é que já viu um ponto, uma recta ou um plano?
Os alunos terão de admitir que ninguém viu tais coisas. Mas há que lembrar-lhes:
Também ninguém viu ou espera ver centauros, sereias ou dragões. Todos sabem que não existem seres vivos com os atributos que estes nomes invocam: trata-se de meras criações da fantasia humana. Pois serão as figuras geométricas, como os centauros e as sereias, nada mais do que produtos da nossa imaginação?
Os alunos hão-de talvez dizer que não se trata da mesma coisa. É preciso encorajá-los nesse sentido e observar:
A cada passo chamamos "pontos", "segmentos de recta", "esferas", etc. a certos entes do mundo físico, tais como o sinal deixado pela ponta de um lápis sobre o papel, um fio bem esticado, uma bola de bilhar, etc.
Mas haverá logo quem repare:
Pois, sim, mas toda a gente sabe que essas coisas não são pontos, não são segmentos de recta, não são esferas.
Ao que o professor dirá:
Todavia essas coisas seriam pontos, segmentos de recta, esferas, etc. se verificassem determinadas condições que são os axiomas e as definições da Geometria de Euclides.
E perguntará logo de seguida:
Esses objectos do mundo físico não verificam as referidas condições?
Se adoptarmos a lógica bivalente a resposta só poderá ser "verificam" ou "não verificam". O aluno escolhe provavelmente a segunda (a primeira é demasiado vulnerável). Logo:
Se essas coisas não verificam as referidas condições, a geometria é inaplicável ao mundo físico, não é verdade?
Mais uma vez a resposta terá que ser "sim" ou "não" e o aluno optará provavelmente pela negativa (a primeira é incompatível com a anterior resposta). Mas o professor deverá por novamente os alunos perante a realidade:
No entanto, se medirmos os três ângulos internos de um triângulo, verificamos que a soma dos três é igual a 180^0 (...) A cada passo vemos confirmadas as previsões teóricas da geometria euclidiana, cujas aplicações são fundamentais na ciência e na técnica (...) Parece pois, que chegamos a uma conclusão absurda, desconcertante:
A GEOMETRIA É E NÃO É APLICÁVEL AO MUNDO FÍSICO.
Como poderá ser isto?

José Sebastião e Silva, 1964
Guia para a Utilização do Compêndio de Matemática

interpretação do mundo físico. Fica perplexo com o facto de especulações pura-mente abstractas se aplicarem de um modo que parece tão "miraculoso" ao concreto.

Qual é então a natureza dos objectos matemáticos? Onde devemos procurá-la? Na realidade experimental como o fizeram os primeiros matemáticos? Na actividade do indivíduo, como sustentam os idealistas? Num mundo que não se situa no espaço-tempo, como advogam os platonistas?

Estas questões embora tenham sido discutidas desde há muito por inúmeros matemáticos e filósofos permanecem actuais. O problema é, que seja qual for o nível de análise que se adopte, clarificam-se alguns aspectos mas outros permanecem envoltos em mistério. Com efeito, se se procurar a natureza dos objectos matemáticos na realidade experimental, poderá compreender-se que uma vez daí extraídos, através de uma série de abstracções cada vez mais requintadas, continuem a estar de acordo com essa realidade. Mas já não se compreenderá tão bem que eles a excedam e que possam obter-se construções dedutivas, bem mais rigorosas do que as observações e sem nenhuma comparação com elas, quanto ao processo de demonstração.

Platonismo e ensino da Matemática

O ensino clássico da Matemática assenta numa epistemologia e numa ontologia platonistas: as ideias matemáticas têm em si mesmas uma realidade. Nesta concepção, uma vez desvendada, a verdade matemática é *dada* a quem a sabe ver, a quem tem poder de abstracção suficiente. O papel do professor de Matemática consiste em levar o aluno a partilhar dessa visão a que ele próprio já teve acesso, a virar o espírito do aluno — "o olhar da alma" como dizia Platão — em direcção ao mundo matemático (...) São diversas as consequências pedagógicas da epistemologia e ontologia subjacentes à aprendizagem tradicional da Matemática. O matemático desvenda as verdades e o ensino deve virar o olhar da alma do aluno para estas verdades. Desde logo, o que o professor retém da actividade do matemático, não é esta actividade, que a maior parte das vezes ignora ou sobre a qual passa em silêncio, mas os seus resultados, teoremas, definições, demonstrações, axiomas. Além disso, o professor é conduzido a sobrevalorizar a forma pela qual estes resultados são apresentados. Se se pensar na actividade do matemático, esta sobrevalorização da forma é paradoxal: não é a forma que dá sentido aos resultados, uma vez que ela é apenas determinada *a posteriori,* quando os resultados foram adquiridos por outras vias bastante mais caóticas (...) Esta ruptura entre a actividade matemática e os seus resultados, entre os problemas e os conceitos, origina um insucesso escolar importante, particularmente em alunos de famílias populares que, no seu meio, não estão habituados a manipular uma linguagem explícita, formalizada e codificada.

R. Bkouche, B. Charlot, N. Rouche, 1991
Faire des mathématiques: le plaisir du sens

Por outro lado, se se considerar a actividade do sujeito, pode entender-se o rigor dos desenvolvimentos dedutivos e sua fecundidade, mas coloca-se o problema do acordo com o real, sobretudo o da antecipação de resultados. Não se entende, nomeadamente, como é que apenas através de desenvolvimentos matemáticos, se podem obter resultados importantes para a compreensão do mundo físico, que se vêm a revelar úteis,

por vezes muitos anos mais tarde, como aconteceu, por exemplo, com os estudos sobre cónicas feitos por Apollonius de Perga há mais de 2000 anos.

Cónicas e órbitas dos planetas

O geómetra grego Apollonius de Perga escreveu, no ano 200 a. C. um tratado sobre secções cónicas em que descrevia de forma sistemática todas as propriedades destas curvas. Este estudo foi um exercício de Matemática pura e muito poucas aplicações das cónicas foram feitas na antiguidade clássica. Muito mais tarde, em 1604, isto é cerca de 1800 anos depois, Kepler contactou com estes trabalhos e estudou as suas aplicações no domínio da óptica. Em 1609, recorrendo a estes trabalhos afirmou que as órbitas dos planetas deveriam ser descritas como elipses e não como círculos e epiciclos, lançando, assim, as bases para a teoria da gravitação de Newton.

Felix Browder e Saunders Mac Lane, 1988
A relevância da Matemática

Considerando a possibilidade de os objectos matemáticos se situarem para lá do sujeito e da realidade experimental, num mundo de ideias existente por si mesmo, resta o problema de explicar como é que os seres humanos são capazes de tomar contacto com esse mundo; ficam sem resposta os problemas relativos tanto ao acordo com essa realidade, como à adequação do sujeito aos instrumentos dedutivos.

Assim, qualquer uma destas perspectivas sobre a natureza dos objectos matemáticos é bastante razoável e, ao mesmo tempo, todas elas encontram sérias dificuldades.

2.1.2 - Experiência e razão na génese e desenvolvimento da Matemática

Uma vertente de análise que poderá contribuir para aprofundar a temática da natureza dos objectos matemáticos prende-se com o papel da experiência e da razão na génese e formação da Matemática. Neste âmbito distinguem-se, comummente, duas perspectivas, o racionalismo e o empiricismo, cuja síntese foi tentada por Kant.

Racionalismo e empiricismo

Os racionalistas entre os quais se encontram, por exemplo, Espinosa, Descartes e Leibnitz, viam, tal como Platão, a razão como um traço inerente à mente humana, através do qual as verdades podiam ser conhecidas independentemente da observação. A razão era a faculdade que permitia ao homem conhecer o Bem e o Divino e, para os racionalistas, esta faculdade era mais facilmente visível na Matemática. Afinal, esta ciência, diziam, partia de verdades auto-evidentes, os axiomas, e, através de raciocínios estabelecidos pela razão, conseguia descobrir e chegar a conclusões não evidentes, e

por vezes, inesperadas. Assim, a existência da Matemática constituía, para os racionalistas, o melhor argumento para confirmar a sua visão sobre o mundo.

O racionalismo foi posteriormente questionado pelo *materialismo* e pelo *empiricismo*. O progresso das ciências da natureza, com base no método experimental, fez triunfar o empiricismo que afirmava que todo o conhecimento tinha por base a observação. O conhecimento matemático era, porém, a excepção que confirmava esta regra.

No contexto do empiricismo, os trabalhos de David Hume desempenharam um papel de relevo. Este filósofo defendia que não conhecemos nem o espírito, nem a matéria, e que não deveríamos sequer admitir a existência de outras substâncias, senão daquelas de que temos experiência imediata; esta experiência reduz-se a um conjunto de sensações. Duvidava da existência da matéria, interrogando-se sobre quem poderia garantir a existência de um mundo de objectos sólidos subsistindo em permanência se tudo o que sabemos provém das nossas próprias sensações provenientes de um tal mundo. Relativamente à Matemática, Hume não rejeitou os axiomas relativos a números e figuras geométricas, mas optou por os desvalorizar, tal como fez com os resultados que deles derivavam, considerando que, quer uns, quer outros, provinham de sensações respeitantes ao presumível mundo físico.

Mais tarde, em meados do século XIX, Stuart Mill, chegou a propor uma teoria empiricista sobre o conhecimento matemático, sustentando que as afirmações matemáticas são generalizações indutivas feitas a partir das nossas experiências ou observações. Assim, a Matemática seria uma ciência natural que em nada diferia das outras. Esta teoria, que não punha em causa a certeza do conhecimento matemático pois Mill supunha a certeza da indução, não teve aceitação nos meios filósofos e matemáticos chegando a ser fortemente contestada, e mesmo ridicularizada, por Frege[2].

A filosofia de Hume não só pôs em causa a existência de leis científicas relativas a um mundo físico, objectivo e permanente, como depreciou os esforços e resultados da ciência e da Matemática e, mais que isso, desafiou “o valor da própria razão”[3]. Ora, este facto causou indignação na maior parte dos intelectuais do século XVIII, que consideraram que a filosofia de Hume devia ser refutada. Kant empreendeu esta tarefa, tendo as suas reflexões procurado unificar as duas tradições contraditórias do racionalismo e do empiricismo.

Kant e a Matemática

Kant distingue o *conhecimento a priori* do *conhecimento a posteriori*, e o *conhecimento analítico* do *conhecimento sintético*. O conhecimento *a priori* é o conhecimento universal, necessário e intemporal, que se fundamenta na razão e é independente da experiência.

Pelo contrário, o conhecimento *a posteriori*, ou empírico, consiste em proposições fundamentadas na experiência, isto é, nas observações do mundo físico. Por sua vez, o conhecimento analítico é o conhecimento explicativo. Em particular, o conhecimento *a priori* analítico é o que sabemos ser verdadeiro por análise lógica, pelo próprio significado dos termos usados. Um exemplo do conhecimento *a priori* analítico é a afirmação "os solteiros não são casados". Diferentemente, o conhecimento sintético é aquele que acrescenta algo de novo ao conhecimento que já se possui. Afirmar que "um segmento de recta é a distância mais curta entre dois pontos", constitui, para Kant, um exemplo de conhecimento sintético *a priori*.

A grande questão filosófica de Kant é saber como é possível o conhecimento sintético *a priori* e, em particular, como é possível a existência de conhecimento matemático. A resposta que dá a esta questão é a de que o nosso espírito dispõe de formas puras de espaço e de tempo (a que Kant chama intuições) através das quais percebe, organiza e compreende a experiência. Assim, Kant embora glorificando a razão a que atribui a tarefa de explorar as formas do espírito humano, não nega o valor da experiência e dos dados provenientes da observação. Estes dados contribuem para estimular o poder organizador do espírito.

A Matemática representa, para Kant, a prova suprema da existência de conhecimento *a priori*. A argumentação que propõe é a de que uma vez que a intuição do espaço tem a sua origem no espírito, este reconhece de imediato algumas propriedades desse espaço. Estas propriedades são sistematizadas na geometria (entendida como geometria euclidiana, a única que Kant conhecia). Simultaneamente, considera que como os números inteiros derivam da intuição do tempo, o conhecimento do tempo é sistematizado na aritmética. Logo, para Kant, as proposições matemáticas são objectivas, necessárias, universalmente válidas, independentes da experiência, e impõem-se-nos pela maneira como a nossa mente funciona.

Esta breve passagem pela filosofia de Kant permite destacar que este filósofo, ao colocar a fonte da Matemática no poder organizador do espírito, concedeu a esta ciência um estatuto especial, um carácter de necessidade e uma marca de certeza intemporal e incontestável, que se manteve durante bem até ao século XX. As escolas fundacionistas que no início deste século tentaram encontrar fundamentos seguros para a Matemática, no fundo, "ambicionavam todas manter a Matemática na posição especial que Kant lhe tinha concedido"[4].

Actualmente, quer o questionamento da natureza *a priori* do conhecimento matemático, quer os argumentos a favor de bases empíricas para este conhecimento estão de novo a ganhar terreno. Não se trata, contudo, de um retorno ao empiricismo de Mill. Trata-se, antes, de uma aproximação da Matemática às ciências naturais que admite, tal como

acontece nestas ciências, o carácter *a posteriori* e falível do conhecimento. Trata-se de uma perspectiva *quasi-empírica* sobre a Matemática, apresentada na secção 4 deste capítulo, que questiona ser esta ciência um corpo de saber imutável e infalível.

2.2 - Verdade e certeza matemáticas: Perspectiva histórica

Tendo por fio condutor uma perspectiva histórica, nesta secção procura-se reflectir sobre a intemporalidade e o carácter absoluto frequentemente atribuídos à verdade, certeza e rigor matemáticos, a partir da análise do significado que estas noções foram tendo na evolução desta ciência.

2.2.1 - Origem das verdades matemáticas

Embora as nossas principais concepções de número e forma datem de tempos tão remotos como os do paleolítico, a linha principal da actividade matemática ocidental, enquanto actividade sistemática, tem a sua origem nas civilizações orientais do Egipto e da Mesopotâmia. As Matemáticas orientais constituiram-se através da acumulação de um conjunto de factos, regras e processos, sem nunca se emancipar verdadeiramente da influência milenar dos problemas práticos e administrativos para cuja resolução tinham sido criadas. Embora constituindo um conjunto considerável de conhecimentos, não dispunham de nenhuma metodologia específica. Desenvolveram-se de uma forma não dedutiva, em que as regras e procedimentos foram descobertos, a partir da observação e experimentação, e através de processos de tentativa e erro. Foi esta perspectiva empírica e instrumentalista que serviu de prelúdio aos trabalhos matemáticos desenvolvidos pela civilização grega.

Os primeiros estudos de Matemática grega tinham por objectivo principal compreender o lugar do Homem no Universo de acordo com um esquema racional. A Matemática ajudava a encontrar a ordem no caos, a ordenar as ideias em sequências lógicas, a encontrar princípios fundamentais. Começou, assim, a tomar corpo uma nova Matemática desenvolvida mais no espírito da compreensão do que no da utilidade imediata. Esta Matemática colocava não só a antiga questão do *como* mas também a moderna questão científica do *porquê*.

Os pitagóricos sentiam-se impressionados pelo facto de fenómenos muito diversos, de um ponto de vista qualitativo, poderem exibir propriedades matemáticas idênti-cas. Foram, assim, despertando para a ideia de que estas propriedades podiam constituir a essência destes fenómenos e que o Universo estava matematicamente ordenado.

Consequentemente, a Matemática começou a surgir como um modelo explicativo e inteligível, uma chave por meio da qual o homem podia penetrar na ordem da Natureza e dissipar o mistério e o caos que aí pareciam reinar.

No processo de explicação da Natureza o número, entendido como ponto ou partícula, desempenhava um papel fundamental. Os pitagóricos investigavam as suas propriedades e colocavam-no "no centro de uma filosofia cósmica que tentava reduzir todas as relações fundamentais a relações numéricas"[5]. Porém, os únicos números que reconheciam como tal, eram os inteiros ou os fraccionários. Assim, a descoberta de que havia relações entre estes números que não podiam ser expressas através deles (como é o caso, por exemplo, da razão entre a diagonal e o lado de um quadrado), pôs em causa a harmonia entre a aritmética e a geometria e originou perturbações nos meios filosóficos e matemáticos.

Esta descoberta, associada aos paradoxos de Zenão, que entravam em conflito com algumas concepções antigas e intuitivas sobre o infinitamente pequeno e o infinitamente grande, levou os matemáticos da época a questionarem-se sobre se a Matemática era possível como ciência exacta. O problema foi resolvido no espírito do novo período social da história da Grécia. Neste período, de supremacia aristo-crática, as classes dirigentes tinham a sua subsistência assegurada pela escravatura e o trabalho manual era menosprezado. Foi neste contexto que surgiu e tomou forma a escola mais influente, depois dos pitagóricos, na exposição e propagação da tese relativa à estrutura Matemática da Natureza — a Academia de Platão.

Zenão, paradoxos, Aquiles e a tartaruga

Acreditou-se sempre que a soma de um número infinito de quantidades se podia tornar tão grande quanto se quisesse, mesmo que cada quantidade fosse extremamente pequena e também que a soma de um número finito ou infinito de quantidades de dimensão zero era zero. O criticismo de Zenão desafiou estas concepções e os seus quatro paradoxos criaram uma agitação cujos efeitos ainda podem ser observados actualmente. Os paradoxos foram retomados por Aristóteles e são conhecidos pelos nomes *Aquiles*, *seta*, *dicotomia* e *estádio*.
Aquiles: Aquiles e uma tartaruga movem-se na mesma direcção, ao longo de uma linha recta. Aquiles é mais veloz que a tartaruga, mas para alcançar a tartaruga, ele tem que passar primeiro pelo ponto P, do qual a tartaruga partiu. Quando chega a P, a tartaruga já avançou para o ponto P_1, mas a tartaruga avançou para um novo ponto P_2. Quando Aquiles estiver em P_2, a tartaruga estará em P_3, etc. Por isso Aquiles nunca poderá alcançar a tartaruga.

Dirk J. Struik, 1989
História concisa das Matemáticas

Os platonistas distinguiam o mundo das coisas do mundo das ideias. O mundo das coisas, mundo material, contém objectos e relações imperfeitas. É no mundo das ideias que se encontravam as verdades absolutas e imutáveis e todo o saber que lhes diz respeito que é certo, seguro e indestrutível.

É neste mundo de ideias que Platão coloca os objectos matemáticos. Assim, para este filósofo, as leis matemáticas não eram apenas a essência da realidade, mas uma essência verdadeira, eterna e imutável. Se com Pitágoras eram os números que "governavam" o mundo, com Platão são as ideias geométricas que o governam. A frase *Deus geometriza eternamente* escrita por este filósofo na *República*, ilustra bem esta perspectiva.

Na sua função de perscrutar a Natureza, a Matemática, para Platão, podia substituir a própria investigação física. Sustentava que a razão humana tinha a capacidade de intuir verdades fundamentais graças à qual podia proceder de maneira autónoma e indignava-se profundamente com alguns dos seus contemporâneos (como por exemplo, com Plutarco, Eudoxo, Arquitas) que recorriam a raciocínios mecânicos para provar resultados matemáticos.

Em suma, no âmbito da Matemática, um dos aspectos mais inovadores do pensamento grego, foi a sua concepção de um Cosmos que funcionava de acordo com leis matemáticas verdadeiras, passíveis de serem descobertas pelo pensamento humano, e o desejo de conhecer estas leis. Colocava-se contudo a questão de como o fazer e ter a certeza de que as leis descobertas eram, efectivamente, verdadeiras.

Um dos passos dados pelos gregos, para poder raciocinar sobre conceitos matemáticos abstractos, foi estabelecer axiomas, verdades de uma tal auto-evidência que ninguém poderia negar. Estes axiomas diziam respeito ao espaço e aos números inteiros.

O segundo passo foi garantir a correcção das conclusões obtidas a partir dos axiomas. Para tal, usaram raciocínio dedutivo, que consideravam como o único que garantia a correcção das conclusões. Assim, uma vez que se partia de axiomas, verdades sobre o espaço e os números inteiros consideradas auto-evidentes, este raciocínio poderia ser um veículo para encontrar as verdades eternas sobre a Natureza que eles ansiavam descobrir. Pode apontar-se, ainda, uma razão de natureza social para explicar a preferência pela forma dedutiva. As actividades matemáticas, bem como as filosóficas e as artísticas, eram praticadas por classes abastadas que menosprezavam o trabalho manual e as actividades comerciais. Platão e Aristóteles, ao sustentarem, respectivamente, que a actividade comercial constituía uma degradação para o homem livre, que devia ser punida como crime, e que nenhum cidadão devia praticar arte mecânica, ilustram bem, neste domínio, a atmosfera intelectual reinante na época.

Assim, não é de estranhar a opção pela dedução. Com efeito, a experimentação e observação teriam aparecido como estranhas ao modo de pensar grego.

No período helenístico, o avanço da civilização grega pelas regiões do mundo oriental (Egipto, Mesopotâmia, parte da Índia) possibilitou que a Matemática grega, embora conservando muitas das suas características tradicionais, sentisse a influência dos problemas de administração e astronomia que o Oriente tinha para resolver. Surgiram os cientistas profissionais e, neste grupo, muitos dos mais importantes viviam em Alexandria.

Entre os primeiros sábios associados a este centro intelectual e económico, destaca-se Euclides, cuja formação se desenrolou na Academia de Platão. A sua obra constitui uma organização ampla e sistemática, apresentada numa forma axiomática-dedutiva, de descobertas diversas de vários pensadores gregos do período clássico. Através das suas formulações axiomáticas, consideradas rigorosas, os trabalhos desenvolvidos pela Academia de Platão e, muito especialmente, os de Euclides, possibilitaram a resolução da "crise" relativa ao aparecimento dos números irracionais e aos paradoxos de Zenão.

Os textos mais difundidos de Euclides são os treze livros que constituem os *Elementos*, que são "a seguir à Bíblia, provavelmente, o livro mais reproduzido e estudado na história do mundo ocidental (…) [e cuja] estrutura lógica influenciou o pensamento científico talvez mais do que qualquer outro texto do mundo"[6].

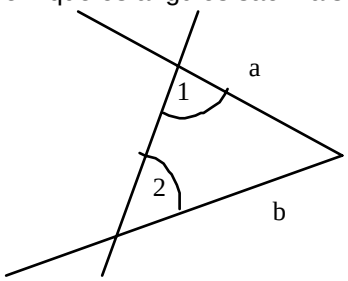
Os *Elementos* de Euclides representam a primeira axiomatização da história da Matemática. Até ao século XIX, foram considerados o modelo da verdade, rigor e certeza, tendo-se transformado, durante vários séculos, no próprio paradigma da ciência. Nomeadamente, Newton não hesita em considerá-los como modelo para a construção de toda a teoria científica que se queira rigorosa e os seus *Principia* inspiram-se neles.

2.2.3 - Da certeza da verdade à procura da certeza

Nos séculos XVII e XVIII, a geometria euclidiana era ainda objecto de grande admiração, não só porque tinha sido a primeira área da Matemática a ser estabelecida dedutivamente, mas também porque durante mais de dois mil anos, os seus teoremas continuavam a revelar-se verdadeiros quando comparados com a realidade física. Todavia, nem todos os axiomas de Euclides eram igualmente evidentes. O axioma das paralelas, ou o quinto postulado, como é frequentemente designado, tinha sido objecto de numerosas discussões já desde a Antiguidade. Aparentemente, nem o próprio Euclides gostava muito da sua formulação, uma vez que só se serviu dele depois de ter provado, sem o utilizar, tantos teoremas quantos foi capaz.

Quinto postulado de Euclides

Se uma recta que encontra duas outras rectas forma ângulos interiores do mesmo lado mais pequenos que dois rectos, as duas rectas quando infinitamente prolongadas encontram-se do mesmo lado em que os ângulos são mais pequenos que os dois rectos.



Morris Kline, 1980
Mathematics: The loss of certainty

Ao longo dos séculos foram feitas inúmeras tentativas para resolver os problemas relacionados com este axioma. Umas tentavam substituí-lo por um enunciado aparentemente mais evidente; outras procuravam deduzi-lo dos outros nove apresentados por Euclides. No entanto, todas estas tentativas se revelaram vãs. Pelo contrário, evidenciaram que, adoptando um axioma que fosse essencialmente diferente do axioma das paralelas, não só não se chegava a nenhuma contradição mas, mais do que isso, mostraram que havia lugar para a existência de várias outras geometrias, diferentes da de Euclides, mas com estruturas lógicas igualmente válidas. Estava aberto o caminho para o desenvolvimento das geometrias não euclidianas.

Relativamente às geometrias não euclidianas, Kline refere que um dos factos mais significativos é que podem ser utilizadas para descrever as propriedades do espaço físico de maneira tão precisa como o fazia a geometria euclidiana. Ora esta ideia estava em completa oposição com as opiniões cultivadas nos meios intelectuais da época e, assim, a aceitação das geometrias não euclidianas pela comunidade matemática não foi fácil, nem linear. Afinal, o que estava em causa era não só a antiga crença grega da verdade matemática como chave para conhecer o Universo, mas o próprio poder da razão para aceder ao conhecimento verdadeiro.

Geometrias não euclidianas: Contributo de Gauss

Gauss estava perfeitamente consciente da fragilidade dos esforços que consistiam em tentar estabelecer [o axioma das paralelas de Euclides], o que se tinha já tornado um lugar comum em Göttingen. Por volta de 1813, Gauss desenvolveu a sua geometria não euclidiana que inicialmente designou por geometria antieuclidiana, depois por geometria astral e finalmente por geometria não euclidiana. Estava convencido de que ela era logicamente consistente e que poderia encontrar uma aplicação. Numa carta ao seu amigo Franz Adolf Taurinus, datada de 8 de Novembro de 1824, Gauss escreveu:

> "Admitir que a soma dos ângulos (de um triângulo) é inferior a 180^0, conduz a uma geometria curiosa, diferente da nossa (euclidiana), mas inteiramente coerente e desenvolvida para minha inteira satisfação. Os teoremas desta geometria parecem paradoxais e absurdos para um neófito, mas uma reflexão calma e séria revela que eles não contêm nada de impossível".
>
> Morris Kline, 1980
> *Mathematics: The loss of certainty*

A partir de 1820, começa a afirmar-se a ideia de que, na base da Matemática clássica devem colocar-se, não as noções geométricas dos gregos, mas o conceito de número inteiro. Este movimento foi designado por *aritmetização da Matemática*. No entanto, o aparecimento de números tridimensionais (os quaterniões de Hamilton[7]), que não gozam da propriedade comutativa da multiplicação como acontecia com os outros números conhecidos até então, e a criação de novas álgebras com propriedades cada vez mais estranhas, lançou a dúvida sobre a verdade da aritmética e da álgebra usuais. E os matemáticos foram levados a descobrir que se podem introduzir na aritmética operações diferentes das que nos são familiares e criar uma aritmética igualmente aplicável. Assim, a aritmética como o corpo de verdades necessariamente aplicável aos fenómenos do mundo físico, estava também posta em causa. "A triste conclusão que os matemáticos foram obrigados a tirar de tudo isto é que não existe nenhuma verdade em Matemática, se se entender por verdade, leis respeitantes ao mundo real"[8].

Em suma, a tentativa empreendida pelos gregos de tentar garantir a verdade matemática partindo de verdades evidentes e utilizando somente raciocínios dedutivos, tinha-se revelado vã. Este facto foi muito difícil de admitir, tendo numerosos matemáticos continuado a desenvolver grandes esforços no sentido de recuperarem a segurança que pensavam ter perdido. E em lugar da verdade surgia a noção de consistência lógica. Ou, por outras palavras, a *certeza da verdade* dava agora lugar à *procura da certeza*.

2.2.4 - Relativade do rigor e da verdade matemática

Uma das revelações obtidas com os trabalhos desenvolvidos sobre a geometria euclidiana foi o facto de que esta geometria, que durante mais de 2000 anos tinha sido considerada o paradigma do rigor, apresentava sérias dificuldades de um ponto de vista lógico. Além disso, os matemáticos ao reexaminarem as bases lógicas da aritmética e álgebra dos números reais e complexos, verificaram que este campo se tinha igualmente desenvolvido de uma forma ilógica.

Afinal, o que se constatava era que a Matemática não tinha sido o paradigma da razão que tinha reputação de ser. Em lugar dos seus resultados terem sido demonstrados

lógica e rigorosamente, ao longo dos séculos, tinha-se recorrido a intuições baseadas em desenhos geométricos, argumentos físicos, raciocínios indutivos, princípios *ad hoc* e manipulações formais de expressões simbólicas.

Foi então empreendida a tarefa de encontrar fundamentos sólidos para a Matemática. Para isso, foi reconhecida a necessidade de termos não definidos, da utilização de definições formuladas de forma precisa (eliminando delas todos os termos que pudessem ser considerados vagos ou contestáveis), da explicitação, de uma forma exaustiva, do conjunto de axiomas que serviam de ponto de partida para as teorias, e da demonstração explícita de todos os resultados matemáticos por mais intuitivamente evidentes que pudessem parecer. E assim surgia um novo significado para a expressão *rigor matemático*.

Durante o final do século XIX, os matemáticos empreenderam uma intensa actividade axiomática, entrelaçando cuidadosamente os teoremas de modo a tentar garantir a solidez de toda a estrutura matemática. A verdade matemática absoluta, oriunda da civilização grega, começava a ser substituída por uma *verdade relativa* dos teoremas relativamente aos postulados, definições e correcção de raciocínio. Assim, embora a Matemática tivesse perdido o seu enraizamento na realidade, a crise parecia estar resolvida.

No entanto, a descoberta de paradoxos na teoria de conjuntos e a tomada de consciência de que poderiam existir paradoxos semelhantes, embora ainda não detectados, noutros ramos da Matemática clássica, levaram os matemáticos a tomar muito a sério o problema da consistência e a interrogar-se sobre como deveria constituir-se esta ciência de modo a eliminar os paradoxos e assegurar que novas contradições não pudessem aparecer. Não puderam, contudo, pôr-se de acordo. Tinha-se entrado numa nova crise — a *crise dos fundamentos*.

2.3 - A busca de fundamentos

A crise dos fundamentos foi, no fundo, a manifestação de uma antiga discrepância entre o *mito de Euclides*[9] e as práticas matemáticas reais. O mito de Euclides é a crença segundo a qual os livros deste autor contêm verdades acerca do universo que são claras e indubitáveis, uma vez que chegam ao conhecimento certo, objectivo e eterno a partir de factos evidentes por si próprios e procedendo através de demonstrações rigorosas.

A inquestionabilidade deste mito, que prevaleceu até ao século XIX, foi fortemente abalada quando Russel, que pesquisava fundamentos para a Matemática na teoria de conjuntos, começou a ser confrontado com contradições, eufemisticamente designadas

por paradoxos, que ilustraram que, seguindo as regras da lógica intuitiva, podemos ser levados a resultados contraditórios de um modo nunca visto anteriormente nem em aritmética nem em geometria.

Paradoxo de Russel

Para enunciar o paradoxo de Russel definimos um "conjunto R" como "um conjunto que se contém a si próprio" (um exemplo é o "um conjunto de todos os objectos descritos com exactamente treze palavras em português"). Consideremos agora um outro conjunto M: o conjunto de todos os conjuntos possíveis, excepto os conjuntos R. M é um conjunto R? Não. Por outro lado, também é falso afirmar que M não é um conjunto-R. Moral: a definição de M, que parecia inofensiva, embora um pouco retorcida, é contraditória em si própria".

Philip Davis e Reuben Hersh, 1988
Da certeza à falibilidade

Foram três as escolas de pensamento que tentaram encontrar bases seguras para a Matemática — *logicismo*, o *construtivismo* e o *formalismo* — mas, como se verá em seguida, embora oferecendo a certeza a um certo preço, nem mesmo assim a conseguiram garantir.

2.3.1 - Logicismo

O logicismo iniciou-se perto de 1884 com o filósofo, matemático e lógico alemão Frege continuando, mais tarde, com Bertrand Russel. A sua finalidade consistia em provar que a Matemática clássica era parte da lógica. Para levar a cabo este programa Russel e Whitehead criaram a obra *Principia Mathematica*, publicada em 1910, que pode considerar-se uma teoria formal de conjuntos, embora a formalização não estivesse ainda concluída. Estes matemáticos planeavam mostrar que todos os axiomas dos *Principia* pertenciam à lógica e, se o tivessem conseguido, os fundamentos da Matemática seriam os axiomas da lógica. Questões como "porque é que a Matemática está livre de contradições"' transformar-se-iam, assim, em "porque é que a lógica está livre de contradições" Havia, no entanto, axiomas que não eram proposições lógicas no sentido do logicismo[10] e assim este programa, embora tendo uma enorme importância para o desenvolvimento da moderna lógica matemática, foi um fracasso do ponto de vista da sua intenção inicial. Como salienta Dias Agudo, o sistema não se revelou satisfatório para uma fundamentação incontroversa da Matemática.

2.3.2 - Construtivismo e intuicionismo

Os construtivistas abordaram o problema dos fundamentos da Matemática de uma forma radicalmente diferente da dos logicistas. Enquanto estes consideravam que nada havia de errado com a Matemática clássica, sendo os paradoxos originados por erros dos matemáticos mas não causados por imperfeições da ciência matemática, os construtivistas viam estas contradições como indicações claras de que a Matemática clássica estava longe de ser perfeita.

A forma de construtivismo mais conhecida é o intuicionismo iniciado por Brouwer em 1908. Para Brouwer não é a experiência nem a lógica que determina a coerência e aceitabilidade das ideias, mas sim a intuição. Profundamente influenciado pela teoria de Kant relativa à intuição de tempo, sustenta que os números naturais nos são dados por uma intuição fundamental que é o ponto de partida de toda a Matemática. Concebe o pensamento matemático como um processo de construção mental que, partindo dos números naturais, prossegue através de um número finito de passos e é independente da experiência.

Com o intuicionismo sobressai a ideia de que a Matemática é uma ciência que tem a sua origem no espírito e aí se exerce: a Matemática não possui nenhuma existência fora do espírito humano. As palavras e relações verbais constituem uma estrutura “imperfeita” para comunicar as ideias matemáticas que são criadas pela actividade do espírito.

Os intuicionistas, em virtude dos princípios de raciocínio que admitiam, rejeitarem muitos dos teoremas da Matemática clássica. Por exemplo, Brouwer apresentou um número real do qual somos incapazes de demonstrar construtivamente, se é positivo, negativo ou nulo, o que mostra que a propriedade tricotómica é falsa. E assim, também o programa intuicionista não foi bem sucedido na sua tentativa de encontrar fundamentos consistentes para aquela Matemática. Além disso, os matemáticos intuicionistas estabeleceram resultados considerados falsos por matemáticos que o não eram e apresentaram provas para certos teoremas classificadas como longas e menos elegantes do que outras elaboradas por métodos não construtivistas.

Por tudo isto, a comunidade matemática considerou, quase universalmente, o programa intuicionista pouco razoável e algo fanático. O programa formalista pode, em particular, ser visto como uma tentativa de defender a Matemática do que Hilbert considerava mutilações e deformações provocadas pelo intuicionismo.

2.3.3 - Formalismo

A escola formalista, criada por volta de 1910 por David Hilbert, tinha por grande objectivo encontrar uma técnica matemática por meio da qual se pudesse demonstrar, de uma vez por todas, que a Matemática estava livre de contradições. Hilbert propunha-se construir

uma demonstração matemática da consistência da Matemática clássica, utilizando argumentos puramente finitários que Brouwer não pudesse rejeitar. Com este objectivo, (a) introduziu uma linguagem formal e regras formais de inferência em número suficiente para que toda a "demonstração correcta" de um teorema clássico pudesse ser representado por uma dedução formal com cada passo mecanicamente verificável; (b) desenvolveu uma teoria das propriedades combinatórias desta linguagem formal; (c) e propôs-se demonstrar que dentro deste sistema não podiam deduzir-se contradições. Deste modo, Hilbert pretendeu estabelecer o que designava por demonstrações objectivas, ou seja, um encadeamento de fórmulas deduzidas através de implicações a partir de símbolos, axiomas ou conclusões previamente estabelecidas.

Com o formalismo a Matemática torna-se um sistema formal que partindo dos axiomas e dos termos iniciais, se desenvolve numa cadeia ordenada de fórmulas, mediadas por teoremas, sem nunca sair de si mesma. Torna-se nem mais nem menos, do que "um jogo linguístico" fundado exclusivamente nas próprias regras do jogo, como acontece, por exemplo, com o jogo do xadrez. Neste contexto, fazer Matemática consiste em manipular símbolos sem significado de acordo com regras sintácticas explícitas.

Em 1930, Gödel enunciou o teorema da incompletude evidenciando que nunca se poderia encontrar em Matemática uma certeza completa por meio de qualquer método baseado na lógica tradicional, uma vez que "qualquer sistema formal consistente suficientemente forte para conter a aritmética elementar seria incapaz de demonstrar a sua própria consistência"[11]. Os resultados alcançados por Gödel mostraram que o projecto de Hilbert era irrealizável e, assim, o programa formalista também não conseguiu provar a certeza dos métodos matemáticos.

Formalismo e Matemática moderna

O formalismo faz uma distinção entre a geometria como uma estrutura dedutiva e a geometria como uma ciência descritiva. Somente a primeira é considerada Matemática. A utilização de figuras, diagramas, ou mesmo de imagens mentais, tudo é não-matemático. Em princípio deveriam ser desnecessários. Consequantemente, considera-os inadequados num texto matemático, e talvez também numa aula de Matemática (...) Do ponto de vista formalista não começamos realmente a fazer Matemática antes de enunciar algumas hipóteses e começar uma demonstração. Após termos chegado às nossas conclusões, a Matemática acabou (...) O exemplo mais influente do formalismo como estilo de exposição matemática foi a obra do grupo chamado colectivamente de Nicolas Bourbaki. Sob este pseudónimo, foi produzida uma série de textos básicos, a nível de pós-graduação, sobre a teoria de conjuntos, a álgebra e a análise que tiveram uma enorme influência em todo o mundo nas décadas de 50 e 60. O estilo formalista penetrou gradualmente no ensino da Matemática em níveis mais elementares e, finalmente, sob o nome de *Matemática moderna* invadiu até o jardim de infância com textos de teoria de conjuntos para a idade pré-escolar.

Philip Davis e Reuben Hersh, 1988
Da certeza à falibilidade

2.3.4 - A perda da certeza em Matemática

Se se analisar um pouco de perto o processo pelo qual o logicismo, o intuicionismo e o formalismo visavam garantir a certeza, constata-se que este processo continha em si mesmo elementos que poderiam causar dificuldades ao objectivo pretendido.

De facto, estas escolas aceitaram sem demonstração um conjunto de afirmações básicas a partir das quais deduziram logicamente os seus resultados. Ora, por um lado, o conjunto de afirmações básicas não pode ser eliminado de uma teoria matemática. Por outro lado, a lógica dedutiva não introduz verdade nos raciocínios e afirmações. Quando muito poderia transmiti-la. A partir do momento em que as três escolas aceitam princípios não demonstrados, esses princípios ficam abertos ao desafio, à dúvida e à incorrecção. Como salienta Ernest[12], "a pesquisa da certeza em Matemática conduz, inevitavelmente, a um círculo vicioso. Todo o sistema matemático depende de um conjunto de afirmações, e tentar estabelecer a sua certeza demonstrando-as conduz a uma regressão infinita". Assim, o problema de assegurar a certeza em Matemática parece ser insolúvel.

Actualmente não se está mais perto de fundamentos seguros para a Matemática do que se estava há um século atrás. No entanto, as controvérsias sobre os fundamentos já não têm o impacto de outrora. Conduzem a círculos que parecem cada vez mais distantes das preocupações matemáticas e filosóficas dos nossos dias. É nesta conjuntura que se acentua, cada vez mais, a importância de olhar a Matemática sem a preocupação dominante da pesquisa de fundamentos, procurando-se novas direcções na filosofia da Matemática.

2.4 - Matemática: Uma ciência a par das outras

Uma alternativa radicalmente diferente à da procura de bases indubitáveis para a Matemática foi a apresentada por Imre Lakatos. Este filósofo, matematicamente esclarecido, segue a teoria do conhecimento científico enunciada por Popper que

advoga que o conhecimento científico é hipotético, falível, e que a ciência progride, a partir de problemas, pelo jogo entre factos, conjecturas e refutações.

2.4.1 - Falibilismo

No âmbito da filosofia da Matemática, a obra fundamental de Lakatos é *Provas e Refutações* iniciada em 1957 e publicada pela primeira vez em livro em 1976. Este trabalho constitui um ensaio sobre a lógica da descoberta em Matemática, onde se reconhece ao erro um valor insubstituível no processo de produção do conhecimento. O ponto de partida é saber se existirá uma relação entre o número de vértices V, o número de arestas A e o número de faces F de um poliedro. A reso-

Provas e Refutações em Matemática

Este livro está estruturado sob a forma de um diálogo que ocorre numa sala de aula imaginária. Depois de muitas tentativas e erros os alunos constatam que para todos os poliedros regulares V-A+F=2. Um aluno conjectura que esta relação se pode aplicar a todos os poliedros. Outros tentam refutar esta conjectura sem o conseguirem. É nesta altura que o professor entra na sala e apresenta uma prova em três etapas. O extracto que se segue é uma parte do diálogo que se estabelece imediatamente após a apresentação desta prova.

Professor: (...) Assim provámos a nossa conjectura[1]

Aluno Delta: Agora pode falar de *teorema*. Não há no caso mais nada de conjectural[2].

Aluno Alfa: Admiro-me. Vejo que esta experiência pode ser realizada com um cubo, ou com um tetraedro, mas como posso eu saber se ela pode ser realizada com *todo* o poliedro? O senhor tem a certeza, por exemplo, *que qualquer poliedro, depois de lhe retirarmos uma das faces, pode ser esticado no plano do quadro*? Tenho dúvidas relativamente à sua primeira etapa.

Aluno Beta: Tem a certeza que *ao triangular o mapa teremos sempre uma nova face para cada nova aresta*? Tenho dúvidas quanto à sua segunda etapa.

Aluno Gama: O senhor tem a certeza que *quando se retiram os triângulos um por um há apenas dois casos possíveis: retirar uma só aresta ou então retirar duas arestas e um vértice?* O senhor tem mesmo a certeza *que no final desse processo apenas fica um triângulo?* Tenho dúvidas sobre a sua terceira etapa[3].

Professor: É claro que não tenho certezas.

Alfa: Mas então a nossa situação é pior que antes! Em lugar de uma conjectura, neste momento temos pelo menos três! E é a isso que o senhor chama "prova"!

Professor: Admito que para esta experiência mental, o termo tradicional 'prova' possa ser de facto considerado um pouco enganador. Não penso que ela estabeleça a verdade da conjectura (...).

1 - A ideia da prova apresentada pelo professor remonta a Cauchy (1813)

2 - O ponto de vista de Delta segundo o qual esta prova estabelece sem nenhuma dúvida o "teorema" foi partilhado por numerosos matemáticos do século XIX como por exemplo Crelle ([1826-1827], pp. 668-71), Matthiessen ([1863], p. 449), Jonquières ([1890a] e [1890b]). Citando um exemplo representativo: "Depois desta demonstração de Cauchy, está absolutamente fora de

dúvida que a elegante relação V+F = A+2 se aplica aos poliedros de todos os tipos, tal como Euler afirmou em 1752 e toda a indecisão deve ter desaparecido desde 1811". (de Jonquières ([1890a], pp. 111-12).
3 - Os alunos desta classe são muito dotados. Em Cauchy, Poinsot e muitos outros matemáticos do século XIX, não se encontram traços destas objecções.

Imre Lakatos, 1993
Proofs and refutations - The logic of mathematical discovery

lução deste problema gera um diálogo que mostra uma Matemática que cresce através de um conjunto de explicações, justificações, elaborações, que não estabelecem a verdade das conjecturas, mas antes as tornam mais plausíveis, convincentes, detalhadas e exactas pela pressão exercida pelos contra-exemplos. A intenção deste diálogo é dar conta de uma espécie de reconstrução racional da história.

Na introdução Lakatos escreve que "a história real soará em notas de fim de página, cuja maior parte devem ser consideradas como fazendo organicamente parte do ensaio"[13]. Ele chama a atenção para que a Matemática não está tão longe da ciência natural como anteriormente se pensava e inclui-a nas teorias quasi-empíricas considerando o conhecimento matemático intrinsecamente conjuntural e falível. Sugere que a Matemática não se desenvolve por um crescimento contínuo de teoremas indubitavelmente estabelecidos, mas pela correcção de teorias, pelo melhoramento constante de conjecturas graças à especulação e à crítica, graças à lógica de provas e refutações. Indica ainda que na produção de conhecimento matemático há uma adaptação constante de axiomas e definições, em simultâneo com uma incessante busca de conjecturas, demonstrações e refutações.

Lakatos aplica a sua análise epistemológica à Matemática informal, ou seja, à Matemática encarada como um processo de crescimento e descoberta. Deixa, contudo, sem resposta a questão de quais os objectos das teorias matemáticas informais, indicando apenas que ela poderá ser iluminada por estudos de caso históricos.

A perspectiva filosófica de Lakatos é, frequentemente, designada por *falibilismo*. No centro desta perspectiva está uma teoria da génese do conhecimento matemático, cujo foco não é psicológico (uma vez que Lakatos não se pronuncia sobre a origem dos axiomas, definições e conjecturas na mente dos indivíduos) mas, antes, o processo pelo qual criações matemáticas privadas se transformam em saber matemático publicamente aceite. Este processo envolve discussão crítica, conjecturas e refutações e, neste sentido, a filosofia proposta por Lakatos para a Matemática assemelha-se à filosofia da ciência proposta por Popper.

2.4.2 - Abordagem quasi-empiricista

Actualmente, os ventos do pós-modernismo acentuam a ideia de que se queremos compreender o que é a ciência e os processos de produção do saber científico, importa debruçarmo-nos sobre as práticas reais dos cientistas, tanto as actuais como as passadas, e encontrarmos uma filosofia que enquadre e descreva essas práticas, em lugar de uma filosofia que prescreva o que elas devem ser.

Neste sentido, diversos matemáticos, filósofos e historiadores (Davis, Hersh, Ernest, Kline, Tymoczko, Putnam e muitos outros), inspirando-se no falibilismo de Lakatos, propõem uma nova abordagem para a filosofia da Matemática frequentemente designada por *quasi-empiricismo*[14]. Esta abordagem procura descrever e (re)caracterizar a Matemática a partir da análise das práticas reais dos matemáticos.

Observando estas práticas ver-se-á que há aí factores importantes que os fundacionistas negligenciaram: provas informais, desenvolvimentos históricos, possibilidade de erro matemático, explicações matemáticas (em contraste com provas), comunicação entre os matemáticos, a utilização de computadores e muitos outros. Constatar-se-á que em cada época há normas culturais que determinam o que é uma demonstração aceitável em Matemática, acontecendo que o que constitui uma demonstração para uma geração pode não satisfazer os padrões de aceitação e de rigor da geração seguinte. Observar-se-á que a Matemática cresce por meio de uma série de grandes avanços intuitivos, que são posteriormente estabelecidos, não numa etapa, mas através de uma série de correcções, de esquecimentos e de erros; nenhuma prova é definitiva e novos contra-exemplos deitam por terra provas antigas.

Hersh[15], apoiando-se na experiência diária dos que estudam Matemática, sugere que: "(1) Os objectos matemáticos são inventados ou criados pelos seres humanos; (2) São criados, não arbitrariamente, mas emanam da actividade desenvolvida a partir de outros objectos matemáticos já existentes e de necessidades da ciência e da vida diária; (3) Uma vez criados, os objectos têm propriedades bem determinadas, que poderemos ter grande dificuldade em descobrir, mas que possuem independentemente do nosso conhecimento acerca delas". Conclui dizendo que a Matemática é um mundo de ideias criado pelos seres humanos, que existe na consciência partilhada destes seres. Tal como os objectos materiais têm as suas próprias propriedades, também essas ideias têm propriedades objectivamente suas. O método para as descobrir é a construção de demonstrações e contra-exemplos.

Considerar desta forma os objectos matemáticos tem várias consequências filosóficas. Em primeiro lugar, afirmar que os objectos matemáticos são inventados ou criados pelo homem é distingui-los de objectos materiais como água, rochas ou gatos. Contudo, tal não significa que sejam objectos intemporais como as ideias matemáticas do

platonismo. Pode dizer-se, por exemplo, que as geometrias não euclidianas são objectos matemáticos de invenção mais recente do que a geometria euclidiana.

Em segundo lugar, referir que os objectos matemáticos são produzidos como resposta a desafios colocados tanto por teorias e conceitos matemáticos já existentes, como pelas outras ciências e pelo mundo real, evidencia a complementaridade do que vulgarmente se designa por Matemática pura e por Matemática aplicada. Com efeito, ao longo dos tempos tem-se constatado que a Matemática se desenvolve a partir de um movimento simultaneamente interno e externo. A abstracção, a axiomatização e a generalização, três tipos de actividades incluídas na designada Matemática pura, têm-se revelado tão vitais para a Matemática como a construção de modelos inteligíveis de fenómenos naturais complexos, e aparentemente impenetráveis. Parece ser através da interacção entre a abstracção e os problemas concretos que a vida proporciona, que se produz e vai construindo uma Matemática viva, significativa e possibilitadora do aumento do poder humano de intervenção no mundo.

Em terceiro lugar, admitir que objectos matemáticos uma vez criados, têm propriedades suas que podemos ser, ou não, capazes de descobrir, permite destacar a simultaneidade da descoberta e da invenção em Matemática. Esta ideia, paradoxal quando rejeitamos o realismo em Matemática e admitimos apenas a existência do sujeito individual e de um mundo exterior a ele, ganha sentido quando consideramos uma espécie de terceira realidade, uma realidade cultural, onde se situaria a Matemática. Nesta linha, Wilder, inspirando-se nas práticas matemáticas reais, descreve a Matemática como um sistema cultural em evolução, algo que criamos e possuímos colectivamente, que é externo ao sujeito enquanto indíviduo, mas é interno à sociedade, como um todo. Fazendo os objectos matemáticos parte da cultura humana, as suas propriedades são também propriedades de ideias partilhadas.

O quasi-empiricismo, enquanto abordagem filosófica, destaca que a Matemática constitui uma actividade humana, simultaneamente individual e social, que decorre de um diálogo entre pessoas que tentam resolver problemas. Os produtos matemáticos podem necessitar de renegociação à medida que mudam os padrões de rigor ou que emergem novos desafios e significados. É pela partilha e discussão crítica de ideias relativas aos objectos matemáticos que se torna possível o reconhecimento de saberes matemáticos novos, o alargamento, correcção e rejeição de teorias.

O quasi-empiricismo não dá resposta a todos os problemas respeitantes à filosofia da Matemática. No entanto, mais importante que isso, permite levantar questões fundamentais: Como são inventados os objectos matemáticos? Como explicar o sucesso das aplicações da Matemática na compreensão do mundo físico e de outras ciências?

Quasi-empiricismo e ensino da Matemática

Uma perspectiva social sobre a Matemática, em que se inclui o quasi-empiricismo, tem importantes implicações para a pedagogia e a didáctica da Matemática. Dá suporte a abordagens pedagógicas baseadas na formulação e resolução de problemas, semelhantes aos processos pelos quais é gerado o conhecimento matemático. Permite pôr em causa perspectivas educativas rigidamente hierarquizadas sobre a Matemática e a aprendizagem. Tem ressonâncias com objectivos que visam formar pessoas capazes de problematizar e avaliar criticamente os usos sociais da Matemática.

Paul Ernest, 1994
The philosophy of mathematics and the didactics of mathematics

Que balanço fazer quanto às diferenças entre os produtos matemáticos e outros produtos culturais? O grau de constrangimento da criatividade matemática é superior ao da criatividade artística? Como é que a demonstração matemática se torna mais refinada e subtil à medida que são descobertas novas fontes de erro? Como se articula a produção individual de saber matemático com o produção social deste saber? Quais as normas e convenções actualmente partilhadas pelos membros da comunidade matemática?

Estas são algumas das muitas questões que poderão ajudar a compreender melhor o que é, e como progride, a Matemática. A sua análise em profundidade constitui um dos grandes desafios que hoje se colocam, não só à filosofia da Matemática, mas também à história, à antropologia, à sociologia e à psicologia da cognição.

2.4.3 - Matemática: Objecto cultural e social

Presentemente, diversos investigadores pesquisam a história da Matemática e realizam estudos de carácter sociológico e antropológico com o objectivo de alargarem a compreensão de como se produz o conhecimento matemático. Alguns destes estudos têm feito sobressair a influência das condições e doutrinas sociais na produção matemática, bem como a natureza cultural dos objectos matemáticos. Em particular, Barbin salienta que a modificação dos objectos e dos saberes matemáticos que ocorreu no século XVII, resultou do contexto científico, social e filosófico da época, onde imperava a vontade de compreender os fenómenos técnicos. Esta cultura conduziu à modificação do conceito de parábola, como consequência do estudo dos movimentos, e à introdução de novas concepções de curva que viriam a estar nos fundamentos do cálculo infinitesimal. Bento de Jesus Caraça, já em 1951, ao escrever *Os conceitos fundamentais de Matemática*, sublinhou também que a Matemática, tal como toda a construção humana, depende do conjunto de condições sociais em que é produzida.

O conceito de variável e a Grécia pós-socrática

> Como poderia um tal conceito [de variável] surgir na Grécia pós-socrática, dominada por uma doutrina filosófica que (...) rejeitava a *contradição*, o *devir* e procurava, em tudo, *aquilo que guarda permanentemente a sua identidade?* Não! A *variável*, porque o é, *não guarda a sua identidade*, ultrapassa o lago tranquilo mas estéril da *permanência*. Daqui resulta imediatamente a incapacidade da ciência grega para construir o conceito de função (...) E aqui tem o leitor um exemplo, possivelmente o mais importante de todos, de como a Matemática, do mesmo modo que toda a construção humana, depende do conjunto de condições sociais em que os seus instrumentos têm que actuar. Subordinação que não a humilha, antes a engrandece.
>
> Bento de Jesus Caraça, 1989
> *Conceitos fundamentais de Matemática*

Restivo[16], numa posição mais radical, afirma que "as notações e símbolos são instrumentos, materiais, e em geral recursos que são socialmente construídos em torno de interesses sociais e orientados por objectivos sociais". Defende que os mundos matemáticos são mundos sociais e que os objectos matemáticos são e devem ser tratados como "objectos, *coisas* que são produzidas e manufacturadas por seres sociais" não havendo razão para que "um objecto como um teorema deva ser tratado diferentemente de uma escultura".

2.5 - A experiência matemática

Uma vez admitida a ideia de que a filosofia da Matemática deve ter em conta as práticas matemáticas reais, torna-se pertinente reflectir sobre alguns aspectos da experiência matemática. Nesta secção aborda-se o que Papert[17] designa por face extra-lógica da Matemática e o papel do computador na produção da Matemática.

2.5.1 - Face extra-lógica da Matemática

A Matemática é vulgarmente olhada por um ângulo que privilegia o seu lado lógico. No entanto, tal como acontece em qualquer outra actividade humana, também na actividade de produção matemática, a face extra-lógica coexiste com a face lógica.

Estética matemática e criação matemática

Encontram-se referências à face extra-lógica, nomeadamente à estética matemática, em várias descrições do processo de criação matemática, Por exemplo, Poincaré destaca que é a sensibilidade estética, e não a lógica, que constitui o traço distintivo do espírito matemático. Quando confrontado com um problema de difícil resolução este matemático realiza um trabalho que se desenvolve em três etapas. A primeira é uma fase de análise

consciente e deliberada do problema. A segunda é uma fase de trabalho inconsciente. Parece um abandono provisório da tarefa. No entanto, o que se passa é que o *eu inconsciente* ou *subliminar*, explora, sistematicamente, todos os elementos que lhe foram fornecidos pela primeira etapa do trabalho. Após um certo tempo, num momento qualquer em que o espírito consciente se afasta do problema a resolver, algumas combinações desses elementos, provenientes do trabalho do inconsciente, aparecem na mente sob a forma de uma inspiração súbita. Numa terceira etapa, há uma análise consciente e rigorosa dessas ideias que poderão ser aceites, modificadas ou rejeitadas. Neste último caso, o inconsciente recomeçará de novo o seu trabalho na procura de uma nova solução.

Coloca-se, contudo, a questão de porque é que o inconsciente transmite ao consciente alguns resultados e outros não. É aqui que Poincaré vê a intervenção da sensibilidade estética. É esta sensibilidade, uma intuição especial que para ele só existe nos que nascem matemáticos criadores, que desempenha um papel de crivo e apenas deixa passar para o consciente as ideias que trazem a marca da beleza matemática. Poincaré, ao contestar que seja possível compreender o trabalho do matemático e os processos que ele utiliza exclusivamente em termos de lógica, o que, no fundo, põe em causa é a existência de uma teoria puramente cognitiva do pensamento matemático.

A descrição de Poincaré refere-se ao mais alto nível da criação matemática. Uma questão diferente é saber se o mesmo processo dinâmico está presente em níveis mais elementares de trabalho matemático. Foi sobre esta questão que se debruçou Papert[18] ao analisar o pensamento seguido por um grupo de não matemáticos a quem foi pedido para construir a demonstração do teorema que indica que a raiz quadrada de dois é um número irracional.

Ao longo do processo de resolução do problema, Papert constata a existência, no grupo, de sinais diversos de satisfação e entusiasmo, traços de prazer vários, que o levam a questionar-se se a Matemática não estará mais próxima do humor e dos sonhos do que aquilo que geralmente se crê. Tudo isto leva-o a colocar uma série de dúvidas sobre as razões para acreditar, como o faz Poincaré, que a faculdade de sentir beleza matemática é algo de inato e independente de outras componentes do espírito. Sugere, pois, a possibilidade destes factores entrarem em linha de conta e virem a influenciar, em cada pessoa, a percepção da Matemática como bela ou não, levando-a a aprovar ou a rejeitar "esta" ou "aquela" Matemática.

Estética matemática e criação matemática

Tornar-se matemático inclui o desenvolvimento da estética matemática, uma predilecção por analisar e compreender, por perceber a estrutura e as relações estruturais, por ver como as coisas se ajustam.

Alain Schoenfeld, 1990
Problem solving in context(s)

O que há de comum na estética de todas as artes e na Matemática, é o desaparecimento de informações parasitas, de barulhos de fundo, numa palavra a diminuição da entropia. A comparação de um belo raciocínio com a dança em que cada movimento termina o precedente e inicia o seguinte, não é destituída de sentido.

André Revuz, 1988
Est-il impossible d'enseigner les mathématiques?

Intuição e Matemática

A intuição matemática é outra das componentes que Papert inclui na face extra-lógica da Matemática. A sua importância no processo de produção desta ciência é destacada por inúmeros matemáticos, alguns dos quais chegam a afirmar que a criação matemática é, sem dúvida e antes de mais, a obra de homens notáveis pela sua poderosa intuição, mais do que pela sua capacidade de realizar demonstrações rigorosas.

No âmbito da Matemática a noção de intuição é, frequentemente, um pouco vaga. Por vezes significa pouco rigoroso, embora o conceito de rigor seja apenas intuitivamente definido. Intuitivo pode também significar visual, heurístico, plausível e holístico em oposição a pormenorizado ou analítico. Apesar desta ambiguidade, é um facto que a actividade matemática, para lá de uma componente formal (que envolve axiomas, definições, teoremas e demonstrações) e de uma componente algorítmica (composta por procedimentos que apenas podem ser adquiridas através de um treino sistemático), inclui também combinar observações, seguir analogias, recorrer a imagens, formular conjecturas e adivinhar a ideia da prova antes de a fazer, ou seja, inclui também uma componente intuitiva. Esta componente não aparece nos produtos matemáticos acabados onde prevalece a forma dedutiva. Estes produtos são assegurados pelo que Pólya designa por raciocínio demonstrativo. As conjecturas são, no entanto, sustentadas por um tipo de raciocínio diferente, o raciocínio plausível, que completa o primeiro. Pólya chama ainda a atenção para que se a aprendizagem da Matemática reflecte, em algum grau, a invenção da Matemática, então deve haver aí lugar para aprender a “adivinhar”, para a inferência plausível.

Criação matemática e intuição

Ciência alguma pode nascer apenas da lógica (...) para produzir Aritmética tal como para produzir Geometria ou qualquer outra ciência, é necessário algo mais que a lógica pura. Para designar essa outra coisa, não temos outra palavra senão intuição (...) a ciência da demonstração não é toda a ciência e a intuição deve conservar o seu papel como complemento, diria mesmo, como contrapeso ou antídoto da lógica (...) Tive já oportunidade de insistir no que diz respeito ao lugar que a intuição deve ter no ensino

> das ciências matemáticas. Sem ela, os espíritos ainda jovens não teriam meios de aceder ao entendimento da Matemática; não aprenderiam a gostar dela e vê-la-iam apenas como uma vã logomaquia. Sem a intuição sobretudo, nunca viriam a ser capazes de aplicar a Matemática (...) Assim, a lógica e a intuição têm, cada uma delas, o seu papel. Ambas são indispensáveis. A lógica, que é a única que nos pode fornecer a certeza, é o instrumento da demonstração; a intuição é o instrumento da invenção.
>
> Henri Poincaré, 1988
> *Intuição e lógica em Matemática*

Temos intuição matemática, não porque memorizamos mecanicamente definições e algoritmos, mas porque temos representações mentais dos objectos matemáticos. Construímos estas representações através de experiências repetidas, quer seja através da manipulação de objectos concretos, a um nível elementar, quer, num nível mais avançado, através da manipulação de imagens mentais, de experiências de resolução de problemas e da realização de descobertas.

Uma vez que a intuição matemática é uma componente fundamental e insubstituível da actividade matemática, importa ter em conta que a ênfase exclusiva, na sala de aula, em tarefas matemáticas que não estimulem os aspectos intuitivos do pensamento, para lá de constituir uma parente pobre da experiência matemática, pode funcionar, para alguns alunos, como uma barreira inibidora da construção de conhecimento matemático significativo.

2.5.2 - A prática matemática e o computador

Nos últimos anos o computador tem tido uma forte influência no desenvolvimento da Matemática. Trouxe para primeiro plano áreas anteriormente estudadas mas entretanto postas de lado, possibilitou alargar fortemente o âmbito das aplicações da Matemática, permitiu introduzir novos processos de investigação e tem sido uma fonte fecunda de problemas. O computador está, assim, a introduzir modificações importantes nas práticas matemáticas tradicionais, dando a esta ciência uma nova dimensão, tanto nos seus aspectos teóricos como práticos. Todas estas mudanças estão a levantar interessantes questões filosóficas sobre as quais importa reflectir.

Utilização do computador em Matemática

A relação do computador com a Matemática estabeleceu-se há muitas décadas. Inicialmente começou por ser usado para realizar cálculos numéricos que ocupavam um tempo excessivamente longo. Mais tarde, o seu campo de utilização diversifica-se e torna-se mais complexo. Nos anos 50, Wang programou um computador para provar diversos teoremas dos *Principia Mathematica* de Russel. Em 1969, Davis e Cerutti

usaram outro computador para produzir provas de geometria elementar, tendo encontrado uma demonstração não usual para um velho teorema. Posteriormente, o computador começa a ser programado para realizar operações com símbolos que dada a complexidade das expressões envolvidas eram sérios obstáculos ao prosseguimento dos trabalhos de investigação, alargando as *fronteiras da intratabilidade*[19].

Actualmente matemáticos, engenheiros e cientistas concebem modelos computacionais de sistemas naturais, tecnológicos e sociais para revelar cenários que anteriormente só poderiam ser estudados através de protótipos e experiências demoradas, muitas vezes realizadas em condições de risco. Por seu lado, os próprios modelos computacionais geram novos problemas matemáticos que têm impulsionado linhas de investigação diversas. Em particular, na teoria dos números o computador é frequentemente usado para chegar a novas conjecturas. Gera dados que o matemático analisa de modo a formulá-las e mesmo que não as consiga provar pode recorrer de novo ao computador para gerar outros grupos de números que lhe permitam testar ou refutar as conjecturas que estabeleceu. Noutros campos, produz imagens gráficas de objectos matemáticos que não poderiam ser "visualizados" de outro modo (como acontece, por exemplo, com os objectos fractais) permitindo, assim, ampliar as fronteiras de compreensão desses objectos. Alguns tópicos de Matemática foram mesmo relegados inteiramente para a Matemática computacional tal como acontece com a procura do maior número primo ou a mais longa expressão decimal de π.

A legitimidade matemática do computador

Apesar desta aliança fecunda entre computador e Matemática, a questão da legitimidade matemática do computador permanece, contudo, uma questão controversa. Muitos matemáticos, nomeadamente os fundacionistas, negam que os computadores possam figurar em provas matemáticas entendidas no sentido restrito do termo. Esta atitude prende-se com o facto de, por vezes, as provas assistidas por computador (*computer proofs*) não poderem ser testadas pela comunidade matemática através do método canónico que consiste em lê-las e verificar se cada inferência é logicamente correcta. As cópias escritas de muitas destas provas são impossíveis de obter devido à enorme quantidade de tempo necessário para as imprimir e mesmo que se conseguisse encheriam um número tal de páginas que seriam inúteis para o matemático. Procura-se garantir que os resultados obtidos por computador estão correctos verificando se diversos computadores os confirmam, construindo diferentes programas para os verificar e avaliando a fiabilidade dos programas utilizados.

Estas evidências são, contudo, semelhantes às que obtêm os cientistas que realizam estudos experimentais no campo das ciências naturais que, tradicionalmente, têm sido

consideradas significativamente diferentes da Matemática. Assim, não é de estranhar que se ponham sérias reticências em admitir em Matemática provas assistidas por computador, com o argumento de que se iria modificar o carácter fundamental desta ciência.

Este debate poderia ter permanecido para sempre no campo puramente especulativo se as provas assistidas por computador não tivessem chegado à Matemática pura, o que aconteceu em 1976 com a prova apresentada por Appel e Haken para a conjectura das quatro cores.

Conjectura das quatro cores

Em 1976 aconteceu uma coisa rara: a notícia da demonstração de um teorema de Matemática pura foi publicada nas colunas do *New York Times*. A ocasião foi a demonstração, por Kenneth Appel e Wolfgang Haken, da "conjectura das quatro cores". O acontecimento foi notícia por duas razões. Em primeiro lugar o problema era famoso. A conjectura das quatro cores era estudada há mais de cem anos. Tinha havido muitas tentativas falhadas para a resolver — agora, por fim, tinha sido demonstrada. Contudo, o próprio método de demonstração era digno de nota. Isto porque uma parte essencial da demonstração consistia em cálculos por computador. Ou seja, a demonstração publicada continha programas de computadores e resultados de cálculos desses programas. Os passos intermédios, de execução dos programas, não foram, é claro, publicados; neste sentido, as demonstrações publicadas estavam em *princípio e permanentemente* incompletas.
O problema das quatro cores consiste em demonstrar que qualquer mapa, numa superfície plana ou numa esfera, pode ser colorido sem utilizar mais de quatro cores diferentes. A única exigência é a de que quaisquer dois países com uma fronteira comum não tenham a mesma cor.

Philip Davis e Reuben Hersh, 1995
A experiência matemática

O que Appel e Haken apresentaram foi uma prova por indução que requer a análise de diversos casos. Se se excluir a intervenção do computador há na prova uma lacuna intransponível que não pode ser preenchida com passos reconstituídos pelos matemáticos. É como se um dos lemas principais da prova fosse justificado com a expressão "como diz o computador" em lugar de ser justificado pelo recurso a resultados anteriormente estabelecidos ou a regras da lógica. Logo, a única possibilidade de verificar a prova de Appel e Haken foi utilizar um outro computador independente, o que torna a prova apresentada dependente da fiabilidade da máquina e do programa. Embora muitos sintam que esta fiabilidade é suficientemente elevada para garantir a aceitação do teorema, ela apoia-se num conjunto complexo de factores empíricos, o que não acontece com as provas matemáticas tradicionais. Ou seja, a avaliação da

demonstração apresentada depende, não apenas da capacidade de análise da comunidade matemática para compreender e verificar raciocínios, mas também da sua crença de que os computadores fazem correctamente o que é suposto que façam. Esta convicção aproxima o conhecimento matemático do conhecimento vulgar, podendo, assim, parecer que há uma certa degradação do grau de certeza que viola a própria natureza da Matemática.

Não é, pois, de estranhar que a publicação do trabalho de Appel e Haken tenha gerado tantas controvérsias. Afinal, a aceitação do teorema das quatro cores põe em causa o sentido de "teorema" e, mais precisamente, o sentido de demonstração que durante séculos esteve associado à Matemática.

Computador e experimentações empíricas em Matemática

Usar computadores de modo análogo ao que foi utilizado para provar o teorema das quatro cores, conduz à possibilidade de dois tipos de prova em Matemática: (a) as provas clássicas, em que todos os resultados podem ser verificados por matemáticos interessados e (b) as provas onde intervém o computador e cuja validade não pode ser estabelecida por análise lógica pois há passos que só podem ser ultrapassadas recorrendo a essa tecnologia. Admitir a legitimidade das provas do tipo (c) introduz experimentações empíricas em Matemática, aproximando esta ciência das ciências experimentais. Este facto tem algumas consequências filosóficas. Representa a aceitação de processos quasi-empíricos em Matemática[20]; abre as portas à existência de conhecimento matemático *a posteriori*; desafia a distinção absoluta entre Matemática e ciências naturais; deixa em aberto diversas questões entre as quais explicar o papel das experiências em Matemática pura, qual o estatuto das provas assistidas por computador e quais os critérios matemáticos de aceitação dessas provas.

Actualmente multiplicam-se os casos em que os computadores são usados para produzir provas matemáticas. Não há muito tempo foi publicada nos orgãos de comunicação social[21] uma notícia que indica que um novo programa de computador, desenvolvido nos Estados Unidos, demonstrou automaticamente a conjectura de Robbins. Esta conjectura foi formulada nos anos 30 e durante décadas suscitou o interesse de muitos matemáticos que foram fazendo progressos parciais sem a conseguirem provar completamente. Aqui o que se passou foi qualitativamente diferente do que aconteceu com a prova do teorema das 4 cores. Enquanto neste a estratégia de demonstração foi concebida pelo homem, limitando-se o programa a explorar um conjunto bem delimitado de possibilidades, no caso do problema de Robbins foi o próprio programa que explorou milhões de hipóteses até que encontrou uma estratégia que levou à resolução.

Ao lado desta notícia aparece um endereço electrónico que permite aceder à página da Internet onde se poderá encontrar, não apenas a demonstração do teorema de Robbins, mas também informações sobre os avanços da inteligência artificial na demonstração automática de teoremas[22].

E provável que este acesso fácil que o computador permite às redes de informação introduza alterações muito variadas nas práticas matemáticas reais, que o tempo e a investigação se encarregarão de desvendar. Facilitará, sem dúvida, a partilha de conhecimentos e o debate de ideias e nessa medida será um estímulo importante à actividade de produção matemática.

2.6 - A concluir

A constatação de que posições filosóficas sobre a Matemática influenciam, e têm influenciado, de forma significativa conceitos e princípios orientadores relacionados com o seu ensino e aprendizagem, tem vindo a ganhar cada vez mais terreno. De facto, situarmo-nos na perspectiva de ajudar quem aprende a compreender um corpo de saberes matemáticos que é o produto contingente de forças evolutivas históricas e culturais, é um problema diferente de ensinar segundo uma perspectiva que supõe a existência de um saber matemático imutável, eterno, fortemente estruturado, infalível, rigoroso e abstracto por natureza, que é exterior aos alunos, mas que estes podem receber do professor através de mecanismos de transmissão, imitação e absorção.

Na base de muitas das actuais orientações para o ensino da Matemática, está a ideia de que saber matemática é sobretudo fazer Matemática. Simultaneamente, advoga-se que para aprender Matemática de maneira significativa e útil, importa participar na actividade matemática, considerada nas suas múltiplas vertentes, e não apenas adquirir conhecimentos e competências explicitamente indicados pelo professor.

A questão do que significa fazer Matemática tem, contudo, diversas respostas consoante a perspectiva epistemológica que se adopta sobre esta ciência. E assim sendo, as controvérsias acerca do ensino da Matemática dificilmente poderão ser resolvidas sem se reflectir sobre a natureza da Matemática e dos processos de produção do saber matemático. Daí a grande importância da temática deste capítulo para o professor de Matemática.

Referências

Barbin, E. (1994). A matemática como processo histórico e como objecto cultural. Em *ProfMat 94 - Actas* (pp. 36-44). Lisboa: APM.

Bloor, D.(1991). *Knowledge and social imagery*. London: The University of Chicago Presss.

Bkoucher, R., Charlot, B. e Rouche, N. (1991). *Faire les mathématiques: Le plaisir du sens*. Paris: Armand Colin.

Browder, F., Mac Lane, S. (1988). A relevância da matemática. Em *A Natureza da Matemática, Cadernos de Educação e Matemática* 1 (pp.17-44). Lisboa: APM.

Caraça, B. J. (1989). *Conceitos fundamentais de matemática.* Lisboa: Livraria Sá da Costa.

Connes, A. (1991). O estranho mundo da matemática. Em *Público*, 8/11.

Davis, P., Hersh, R. (1988). Da certeza à falibilidade. Em *A Natureza da Matemática, Cadernos de Educação e Matemática* 1 (pp.45-72). Lisboa: APM.

Davis, P., Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

Dias Agudo, F. R. (1980). *A matemática no mundo contemporâneo*. Tomo XXIII. Lisboa: Academia das Ciências de Lisboa

Dieudonné, J. (1990). *A formação da matemática contemporânea*. Lisboa: Dom Quixote.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. Hampshire: The Falmer Press.

Ernest, P. (1994). The philosophy of mathematics and the didactics of mathematics. Em R. Biehler, Roland, W. Scholz, R. SträBer, B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 335-349). London: Kluwer Academic Publishers.

Hersh, R. (1986). Some proposals for reviving the philosophy of mathematics.Em T. Tymoczko (Ed.) *New directions in the philosophy of mathematics* (pp.9-28). Boston: Birkhäuser.

Kline, M. (1989). *Mathématiques: La fin de la certitude*. Paris: Christian Bourgois Éditeur.

Lakatos, I. (1993). *Proofs and refutations - The logic of mathematical discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lakatos, I. (1986). A Renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics?. Em T. Tymoczko (Ed.) *New directions in the philosophy of mathematics* (pp.29-48). Boston: Birkhäuser.

Papert, S. (1980). *Mindstorms — Children, computers and powerful ideas*. New York: Basic Books.

Pavelle, R., Rothestein, M. e Fich, J. (1991). Álgebra por computador. Em J.P. Ponte (Org.) *O computador na Educação Matemática* (pp. 11-27). Lisboa: APM.

Poincaré, H. (1988). Intuição e lógica em matemática. Em *A Natureza da Matemática, Cadernos de Educação e Matemática* 1 (pp.7-16). Lisboa: APM

Poincaré, H. (1996). A invenção matemática. Em P. Abrantes, L. C. Leal e J. P. Ponte (Eds), *Investigar para aprender matemática* (pp. 7-13). Lisboa: APM.

Pólya, G. (1986). From the preface of induction and analogy in mathematics. Em T. Tymoczko (Ed.) *New directions in the philosophy of mathematics* (pp.99-101). Boston: Birkhäuser.

Restivo, S. (1988). The Social life of mathematics pp. 5-20. Em *Philosophica*, 42, (2).

Revuz, A. (1980). *Est-il impossible d'enseigner les mathématiques?* Paris: PUF.

Sebastião e Silva, J. (1964). *Guia para a utilização do compêndio de matemática*, 1º volume, 6º ano, Lisboa: Ministério da Educação.

Snapper, E. (1979). The three crises in mathematics: Logicism, intuitionism and formalism. Em *Mathematics Magazine* (pp. 207-216), Vol 52, (4).

Struik, D. (1989). *História concisa das matemáticas*. Lisboa: Gradiva.

Schoenfeld, A. (1990). Problem solving in context(s). Em R. Charles, E. Silver (Eds.) *The Teaching and assessing of mathematical problem solving*, (pp. 82-92). Virginia: NCTM:

Tymoczko, T. (Ed.) (1986). *New directions in the philosophy of mathematics*. Boston: Birkhäuser.

Wilder, R. (1986). The cultural basis of mathematics. Em T. Tymoczko (Ed.) *New directions in the philosophy of mathematics* (pp.185-199). Boston: Birkhäuser.

Notas

[1] J. Dieudonné (1990, p. 47). As citações incluídas no texto serão identificadas em nota de fim de capítulo através da indicação do nome do autor, da data da publicação de que a citação foi extraída e da página ou páginas em que se encontra. A restante identificação da publicação será feita nas *Referências*.

[2] Muitas das ideias da teoria empiricista de Mill sobre a matemática estão incluídas no seu livro *System of logic* (1943). Bloor, no cap 5 de *Knowledge and social imagery*, intitulado *A naturalistic approach to mathematics*, apresenta uma síntese desta teoria bem como uma análise crítica dos principais argumentos propostos por Frege para a contestar.

[3] M. Kline (1989, p. 140).

[4] P. Davis e R. Hersh (1988, p. 52).

[5] D. J. Struik (1989, p. 78).

[6] D. J. Struik (1989, pp. 90-91).

[7] Números cuja forma é a+bi+cj+dk, em que $i^2 = j^2 = k^2 = -1$

[8] M. Kline (1989, p. 175).

[9] A expressão *mito de Euclides* é utilizada por Davis e Hersh para destacarem a ideia de que durante séculos foi crença generalizada que os livros de Euclides continham verdades acerca do Universo que eram claras e indubitáveis.

[10] Segundo Snapper (1979) no contexto do logicismo uma proposição lógica é definida como uma proposição que tem generalidade completa e é verdadeira em virtude da sua forma em vez do seu conteúdo. Neste sentido, por exemplo, o princípio do terceiro excluído (p v ~p é sempre verdadeiro) é uma proposição lógica pois p pode ser uma proposição da matemática, da física ou outra qualquer.

[11] P. Davis e R. Hersh (1988, p. 56).

[12] P. Ernest (1991, p. 14), referindo Lakatos.

[13] I. Lakatos (1993, p. 5).

[14] A designação é proposta, nomeadamente, por Tymoczko (1986) que refere que esta abordagem tem sido objecto de uma adesão cada vez maior, embora não constitua uma representação completa da filosofia da Matemática contemporânea.

[15] R. Hersh (1986, p. 22).

[16] S. Restivo (1988, p. 18).

[17] S. Papert (1980). Papert inclui na face extra-lógica da matemática a beleza matemática, o prazer matemático e a intuição matemática. O livro *Mindstorms - Children, computers and powerful ideas,* onde Papert refere estas ideias, tem uma tradução brasileira intitulada *Logo: Computadores e educação*, publicada pela primeira vez em 1985 por Editora Brasilience São Paulo.

[18] S. Papert (1980). O teorema que indica que raiz quadrada de 2 é um número irracional foi escolhido exactamente por o matemático inglês Hardy o ter considerado como um dos mais puros exemplos de beleza matemática.

[19] Esta expressão é usada por Pavelle, Rothestein e Fitch (1991), para indicar que o computador, através da utilização de sistemas automáticos de manipulações algébricas, permite explorar expressões algébricas frequentemente incluídas em teorias científicas, que são extremamente difíceis de explorar 'à mão'.

[20] Tymoczko, T. (1986) vai mais longe, afirmando que aceitar a legitimidade do teorema das quatro cores conduz a adoptar uma teoria quasi-empírica da matemática.

[21] Ver, por exemplo, *Expresso* 15/2/97.

[22] A formulação e demonstração do teorema de Robbins, bem como as informações que foram fornecidas ao computador podem ser obtidas no endereço http://www.mcs.anl.gov/