Quatro funções da investigação na aula de Matemática[1]

E. Paul Goldenberg, *Education Development Center, EUA*

Sumário

Introdução

Uma coisa em que simplesmente não acredito é que a aprendizagem só se faça através de actividades de investigação e nem sequer me parece que a aprendizagem seja necessariamente e sempre *melhor* nesse caso do que noutros. Não só é possível aos adultos aprenderem através de uma conferência bem arquitectada, como também as crianças o podem fazer, se a "conferência" estiver adequada aos seus interesses e idade. Para o melhor e para o pior, as crianças estão a aprender quando estão sentadas imóveis em frente da televisão. (*Aquilo* que aprendem poderá não nos agradar e nem tudo poderá prestar-se do mesmo modo a uma exposição na televisão, mas pelo menos em relação a algumas coisas é evidente que ver, só por si, é suficiente). E antes da televisão, as crianças podiam ouvir rádio, imaginar o desafio de basebol e aprender uma data de coisas sobre as suas equipas e jogadores favoritos. Havendo interesse, o simples ouvir basta.

---

[1] In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 35-49). Lisboa: APM e Projecto MPT. Este texto corresponde à tradução da conferência apresentada no Seminário "Investigações na sala de aula", intitulada "Four roles for investigation in the mathematics classroom".

Há muitas coisas para as quais a investigação não constitui sequer uma opção. Memorizar serve perfeitamente (e talvez seja mesmo a única possibilidade) para aprender um endereço e número de telefone, a ordem do alfabeto, a lengalenga da contagem e coisas do género. O "treino" não tem que ser aborrecido, como poderia ser o caso se tivesse que se fazer tudo de uma vez, como parte da aula, pois que a aprendizagem é feita através de encontros repetitivos com os "factos" e é uma questão de pura rotina da memória.

Então porquê investigar?

Para começar, e a não ser que se esteja a ouvir alguma história extraordinariamente fascinante, é muitas vezes mais divertido *fazer* uma coisa do que simplesmente ficar sentado a escutar. Um professor dificilmente disporá das capacidades de cativar uma audiência que estão ao alcance de um contador de histórias experimentado.

Além disso, a investigação introduz alguma variedade na dieta da aula. Mesmo com o mais dotado dos contadores de histórias, dificilmente seria possível passar um dia inteiro de seis horas – para não falar em 180 dias – a ouvir.

E é até possível que a investigação – especialmente quando envolve materiais físicos – estimule mais neurónios ao difundir a sua história através de mais canais, uma vez que os alunos com as mãos fazem manipulações, com os olhos observam manipulações, e com a voz discutem a actividade com os colegas. (Pode consultar-se um desenvolvimento desta ideia em Goldenberg e Hazzan, 1995).

Mas todos estes argumentos são fracos, de certa maneira. O último é, quando muito, uma mera conjectura; os dois primeiros são mais sobre a motivação do que sobre a forma que ela assume.

Na aula de *Matemática*, há pelo menos uma razão mais para incluir a investigação, uma razão especificamente relacionada com a natureza da Matemática.

A Matemática é…

As discussões acerca do que os estudantes devem saber tendem a focar-se muitas vezes nos resultados que a matemática produziu, geralmente apreendidos como um conjunto de factos e técnicas. Por exemplo, numa sessão sobre "O que é nuclear?", na segunda reunião dos participantes no debate da reforma geral dos currículos apoiada pela National Science Foundation, o subgrupo dedicado ao ensino secundário passou uma boa parte do tempo a discutir “Quanta álgebra?”. Para dar uma ideia desta questão, o grupo considerou as diferentes formas das equações das rectas – dados o declive e a ordenada na origem, dados o declive e um ponto e dados dois pontos – e técnicas de conversão dessas formas entre si, interrogando-se depois sobre quais os tipos de equação e técnicas eventualmente “nucleares” (essenciais para todos) e quais deveriam ser considerados temas apenas para certos alunos.

Talvez sem surpresa, a discussão não chegou a nenhum consenso traduzido em respostas claras. Mas há outra maneira de ver o “conteúdo” matemático.

Ao lado de um rico legado de aplicações, a história multimilenar da Matemática apurou igualmente para nosso uso um corpo de métodos e modos de pensar que são tão valiosos como os factos (como o teorema de Pitágoras, o valor de π, ou a equação de uma recta definida por dois pontos) que esses modos de pensar nos ajudam a descobrir. Para a grande maioria de pessoas que esquecerão a maior parte desses factos (e nunca sentirão a sua falta), estes modos matemáticos de pensar continuam a constituir um poderoso instrumento para ver e para conseguir compreender o mundo. A dupla pretensão de que: 1) estes modos de pensar são válidos em *todos* os domínios e mesmo assim 2) são legítimos modos de pensar *matemáticos,* não nos deve surpreender. A Matemática não é nenhum desvio ao pensamento humano normal, mas uma elaboração, refinamento e alargamento desse pensamento, do qual constitui um exemplo particularmente específico (ver Cuoco, Goldenberg, e Mark, 1996; Goldenberg, 1996).

Para os estudantes que desejam preparar-se para níveis avançados de estudo da Matemática a considerarem como parte da sua herança cultural ou simplesmente acrescentarem uma lente matemática ao equipamento de que dispõem para compreenderem o mundo que os rodeia, é *tão* necessário conhecer uma parte do corpo dos resultados *como* saber como se pensa matematicamente, ou seja, conhecer os modos de pensar que convencionamos designar por “hábitos matemáticos de pensamento”.

Consequentemente, se um dos objectivos da educação matemática é fazer com que os alunos aprendam como é que as pessoas descobrem factos e métodos, deveriam também, durante uma parte significativa do tempo de aprendizagem, dedicar-se a essa mesma actividade: *descobrir* os factos. Não podemos apresentar factos e pôr os alunos simplesmente a aplicá-los ou a prová-los; assim como não podemos explicar técnicas e fazer com que os alunos se limitem a executá-las. O objectivo propriamente dito é que o aluno aprenda como ser um investigador perspicaz, e para isso tem que fazer investigação.

Na nossa concepção da *Connected geometry (*Education Development Center, 1998a, 1998b), os materiais do aluno consistem fundamentalmente em conjuntos de problemas cuidadosamente organizados de modo a que os alunos possam trabalhar neles produtivamente sem ser necessário dizer-lhes como o devem fazer, e concebidos para ajudar os alunos a desenvolver ideias e métodos matemáticos sem explicações ou exemplos prévios. Estes conjuntos incluem necessariamente problemas "para reflexão" – ou seja, que pedem ao aluno que repare em pequenas diferenças entre os diferentes problemas, ou então que reflicta no que acabou de fazer e infira as ideias fundamentais dos casos particulares.

A maior parte das definições habituais, teoremas e demonstrações e muitas das explicações dos métodos que constituem o grosso dos textos convencionais podem também encontrar-se em *Connected geometry*, mas são as *respostas* que os alunos dão, e por isso mesmo não aparecem no livro do aluno, mas sim no manual de soluções!

Mais sucintamente: *não* tenho nenhuma objecção em relação à memorização; *não* acho que os alunos apenas possam aprender através da descoberta (ou mesmo que aprendam melhor através da descoberta). Mas, se se limitarem a memorizar, não *aprendem a compreender as coisas*. Na Matemática, na ciência, na reparação de automóveis, assim como na vida em geral, temos que aprender a compreender as coisas.

Na "vida real", os problemas não surgem precisamente depois de termos acabado de estudar um capítulo sobre o modo de os resolver ou acabado de ler um exemplo prático. Os problemas são *problemas* porque *não* os sabemos resolver e temos que primeiro os investigar bem e de modo flexível. Alguns problemas são tão difíceis que *não conseguimos* resolvê-los e temos que arranjar maneiras de avaliar os nossos progressos sem sequer termos ainda uma ideia do caminho para a sua resolução. Na aula, isto significa que temos que valorizar a inteligência dos processos (aplicações plausíveis de hábitos de pensamento historicamente produtivos) e as soluções parciais (tendo ao mesmo tempo consciência de que as soluções parciais são *parciais*).

Isso é o que os alunos precisam de saber sobre a Matemática, mas o que é que *eu* sei sobre a investigação na sala de aula?

Tanto nas discussões sobre os currículos, como enquanto professor, *utilizei* a investigação; *gostei* da investigação; os *miúdos* gostaram; mas não fiz qualquer pesquisa formal sobre a investigação. Que é que eu realmente *sei* sobre a investigação na sala de aula?

Bem vistas as coisas, muito pouco, mas quando o nosso grupo estava a trabalhar na *Connected geometry*, começámos a ver essencialmente três tipos de investigação – adiante designados por Explorar, Descobrir e *Pôr em questão*[2] – e quatro funções que essas investigações desempenham. Este texto irá descrever, com recurso a exemplos, o "carácter" de cada um desses tipos e irá mostrar como é que uma investigação pode preencher as quatro funções.

Três tipos de investigações

Explorar

O problema dos selos do correio
Imagina que uma estação dos correios apenas vende selos de dois tipos: 7 cêntimos e 9 cêntimos.
Uma carta de 32 cêntimos pode ser enviada usando dois selos de 9 cêntimos e dois de 7 cêntimos.
Quais as franquias que *não* se podem fazer?

Nas aulas dos primeiros anos, este problema pode ser utilizado como uma maneira de suscitar um puro exercício computacional num contexto mentalmente estimulante, capaz de tornar as partes repetitivas aceitáveis. Utilizado deste modo, o objectivo primordial de um tal problema é na verdade mais uma questão de camuflagem do que de exploração, mas secundariamente dá aos alunos uma primeira ideia do que é a investigação matemática. Oferece igualmente uma oportunidade de se perguntar como é que se pode saber se *todas* as franquias que não se podem fazer foram (ou podem ser) encontradas.

No terceiro ciclo do ensino básico ou no secundário, este problema pode servir um objectivo genuinamente exploratório, como aperitivo para um tema especificamente matemático (que, no caso deste problema, pode abranger desde a factorização até às combinações lineares).

As introduções exploratórias deste género parecem constituir uma das maneiras em que a investigação é mais frequentemente utilizada nos currículos modernos – como uma primeira experiência para os alunos, um contexto em que possam dar o gosto ao dedo, pôr a mão na massa, e ter uma visão do terreno. A expectativa não é de que a investigação faça emergir algum facto ou técnica específicos – e talvez nem sequer alguma conjectura. O objectivo é

[2] O termo usado no original é *probing*, que se optou por traduzir pela expressão *pôr em questão*.

criar um cenário para o trabalho posterior, ajudar os alunos a estabelecer intuições e a desenvolver um "sentido" do território.

Descobrir

Outra função corrente da investigação nos currículos é conduzir os alunos à descoberta de uma ideia ou facto matemáticos muito específicos. Nesta função, pode ainda ser utilizada como uma primeira experiência, mas poderá igualmente servir como parte do corpo ou mesmo final de uma sequência de aprendizagem.

> **Lados de triângulos**
>
> *Esta investigação recorre a três dados e um conjunto de palhinhas cortadas em comprimentos que vão de 1 polegada a 6 polegadas.*
>
> Lança os dados. Apanha as palhinhas com as medidas correspondentes.
>
> (Por exemplo, se sair 5, 3, 5 aos dados, deves apanhar duas palhinhas de 5 polegadas e uma de 3 polegadas).
>
> Tenta formar um triângulo com as palhinhas.
>
> Escreve uma regra a dizer se, tendo três palhinhas, elas farão ou não um triângulo.

Neste caso, o pedido final para definir uma "regra" constitui a parte crítica que distingue esta investigação da versão do problema dos selos do correio acima proposto. Se se tivesse pedido aos alunos para fazerem uma lista de todas as triplas que fizeram triângulos, mas não se lhes tivesse pedido para generalizar, é possível que de qualquer modo alguns alunos tivessem "descoberto" a generalização, mas o problema (tal como apresentado) não teria ido além da simples exploração, sem conduzir à descoberta. De modo semelhante, o problema seguinte descreve uma experiência – uma investigação limitada – e coloca duas questões de enfoque.

> **Ângulos inscritos**
>
> Desenha um semicírculo. Seguidamente inscreve um ângulo nesse semicírculo.
>
> Qual é a medida desse ângulo?
>
> Inscreve outro ângulo no semicírculo e mede-o. O que varia? O que fica na mesma?

A primeira das duas questões finais chama a atenção para o facto de que alguma coisa *mudou*! Sem esse passo, alguns alunos acham que a repetição da experiência é uma questão de rigor – semelhante à repetição das medições que se fazem no laboratório de física – sem reparar que os ângulos inscritos eram *diferentes* e que, até termos uma razão para considerar isso "óbvio", será uma "surpresa" verificar que medem a mesma coisa. Portanto, as duas perguntas são essenciais para conduzir à descoberta.

Pôr em questão

Explorar e Descobrir parecem constituir as funções mais correntes para as actividades de investigação nos currículos que encontrei. As investigações podem também levar os estudantes a *discutir* ou *pôr em questão* ideias matemáticas que tenham já trabalhado parcialmente, para rever, apurar ou aprofundar essas ideias ou para as relacionar com outras ideias. Uma educação matemática sem tal componente de *Pôr em questão* seria incompleta e, embora esta constitua um passo mais "avançado" – ninguém pode pôr em questão, rever ou relacionar ideias antes de as ter – uma investigação deste tipo adequada ao desenvolvimento dos alunos é sempre possível em todos os níveis. É particularmente solicitada, para além dos níveis K-12, pelas actividades de investigação e no entanto é a menos frequente de todas as componentes.

Ao contrário da função de Explorar, *Pôr em questão* é bastante focada, mas, ao contrário da Descoberta, não é tanto sobre factos matemáticos particulares como sobre a definição, o domínio, as restrições e aquilo que metaforicamente (ou topologicamente!) se poderia designar por "vizinhança" do facto matemático.

Por exemplo, imagine-se uma aula de alunos que já tenham visto (quer informalmente através de experiências, quer formalmente com o professor; e quer tenha sido por meio de investigação ou não) que a soma dos ângulos do triângulo é 180°. A bateria de perguntas que se segue começa por abanar e pôr em causa essa ideia; depois abana algumas das ideias-base: o significado de "*direito*", a definição de triângulo e, finalmente, a definição de outras figuras. O título para o conjunto de perguntas obscurece deliberadamente aquilo que constitui a verdadeira causa dos resultados surpreendentes desta mini-investigação.

Será que o tamanho é importante?

Imagina que se desenha um triângulo *enorme* no parque de estacionamento da escola e se medem os seus ângulos. Será que o tamanho fará alguma diferença? Quer dizer, será que a soma dos ângulos continuará a ser 180°?

Imagina um desenho com o maior triângulo que pode caber num parque de estacionamento do tamanho da Europa e que se medem os ângulos *desse* triângulo.

Será que o resultado dessa medição seria 180°?

E se a base do triângulo fosse no Equador e o vértice fosse no Pólo Norte?

Os alunos rapidamente concluem que a soma dos ângulos num triângulo que tem a base no Equador e o vértice no Pólo Norte é superior a 180°. Também concluem rapidamente que o tamanho não passava de uma manobra de diversão e muito correctamente compreendem que a pergunta "Será que o *tamanho* é importante?" era uma espécie de falsa pista.

Reconheço isso. A questão não tem nada a ver com o tamanho. O enorme triângulo que imaginámos desenhar não é *plano*. A compreensão deste facto conduz-nos a duas orientações na investigação posterior. Será que o "triângulo" que desenhámos era realmente um *triângulo?* Ao fim e ao cabo, os lados não eram "direitos". Ou, alternativamente, talvez que o "facto 180°" não se refira realmente a *triângulos* mas antes *à superfície onde estão desenhados*.

Vamos seguir cada uma destas pistas.

O que desenhámos era realmente um triângulo? A resposta exige que reexaminemos aquilo que sempre tivemos por certo quanto à definição de triângulo. Era uma figura fechada? À primeira vista sim, mas "interior" e "exterior" não são nada do que costumavam ser. Desde logo, o "exterior" é tão finito como o interior. Tinha três lados "direitos"? Isto levanta uma nova questão: O que queremos dizer com "direito"? Temos uma ideia do que é uma estrada "direita" porque sabemos o que são estradas "não direitas", mas "direito" *na terra* é diferente de "direito como um raio laser". Estradas que no papel são "direitas" como linhas ou como raios laser não poderiam assentar na terra curva. Por isso, o que é que *realmente* queremos dizer com "direito"? Se *realmente* aceitamos "linhas direitas" numa esfera (por exemplo, recorrendo ao conceito de "a distância mais curta entre dois pontos"), então o que desenhámos na terra poderia legitimamente ser considerado um triângulo.

O "facto 180°" refere-se aos triângulos ou às superfícies? O primeiro passo pode envolver um certo grau de exploração, para verificar se há outros "factos relativos a triângulos" (como a concorrência das medianas e das alturas) que se apliquem a triângulos esféricos. Uma parte da investigação pode também ser bastante especializada, visando a descoberta de que certas propriedades se mantêm e outras mudam quando muda a superfície. As que se mantêm são propriedades *dos triângulos*. As outras dependem da superfície. Esta parte da investigação deslocou a atenção dos alunos dos polígonos para as superfícies. Paradoxalmente, o objectivo de recentrar plenamente nos polígonos a demonstração pode beneficiar enormemente de uma manobra de diversão ainda mais completa ao atender às superfícies.

Uma manobra de diversão…

Jeffrey Weeks começa o seu magnífico livro, *The shape of space*, com uma fábula baseada na *Flatland*, de Abbott. Na história de Weeks, os habitantes de Planolândia consideram que o seu mundo é plano, com excepção de Um Quadrado, que concebe esse mundo como uma "hipercircunferência" (uma esfera). Tal como as personagens de Abbott, as de Weeks são bi-dimensionais e vivem *no* seu mundo-superfície, e não sobre ele; não podem escapar-se para a terceira dimensão e verem o mundo deles como nós poderíamos fazer. Como seria possível a tais criaturas verificar a teoria de Um Quadrado?

> Um Quadrado imaginou que talvez uma viagem pudesse resolver a questão.
>
> Imaginou que se se dispusesse a passar um mês a trilhar as florestas em direcção a leste, podia muito bem acontecer que regressasse de oeste.
>
> Ficou encantado por dois amigos se prontificarem a ir com ele. Os amigos… Não acreditavam em nenhuma teoria de Um Quadrado – apenas pretendiam livrá-lo de sarilhos. Com esse fim, insistiram em que Um Quadrado comprasse todo o fio vermelho que pudesse encontrar em Planolândia. A ideia era deixarem um rasto de fio atrás deles, para que, depois de terem caminhado um mês e de terem desistido de continuar, pudessem encontrar o caminho de regresso a Planolândia.
>
> Como se veio a verificar, o fio era desnecessário. Para grande satisfação de Um Quadrado – e alívio [dos amigos] – regressaram por oeste depois de três semanas de viagem. Não quer dizer que isto tenha convencido alguém do que quer que seja. Mesmo [os amigos] pensaram que deviam ter-se desviado ligeiramente para um lado ou outro, traçando uma rota com a forma de um círculo gigantesco no plano de Planolândia. (Weeks, 1985, pp. 5-6).

Sem desanimar, Um Quadrado lançou-se noutra expedição, desta vez para norte, deixando um rasto de fio azul.

> Como é evidente, regressou duas semanas mais tarde vindo de sul. Mais uma vez, toda a gente achou que ele tinha simplesmente feito um desvio circular, e já o davam por muito feliz por ter conseguido voltar.
>
> Um Quadrado sentia-se confuso pelo facto da viagem ter demorado muito menos tempo desta vez, mas havia outra coisa que o contrariava ainda mais: o facto de nunca se ter cruzado com o fio vermelho que tinham deixado durante a primeira viagem. (pp. 6-7).

O propósito de Weeks com esta história divertida era levar os leitores a uma séria investigação de várias superfícies ao longo de todo um livro – neste caso uma superfície de dimensão dois mergulhada num espaço tridimensional – sendo um dos objectivos secundários que o leitor distinguisse os aspectos geométricos dos topológicos, os locais dos globais e os intrínsecos dos extrínsecos.

O *meu* propósito para esta "diversão" no meio daquilo a que dei o nome de "Investigação *Pôr em questão*" é levar os leitores a imaginar esta criatura – Um Quadrado, de seu nome – como preparação para uma surpreendente extensão da pergunta: "Poderemos desenhar um triângulo numa esfera?"

Podemos desenhar "Um Quadrado" numa esfera? Pensem nesta mesmo a sério…

Estão a pensar mesmo a sério? Palavra?

De que modo esta investigação é diferente?

Ao contrário das investigações anteriores, esta *não tem nenhuma resposta* até decidirmos como definir um quadrado. Será um quadrilátero regular? Se é (e se aceitarmos que podemos desenhar polígonos numa esfera), então não há dúvida que podemos desenhar um quadrado. Mas talvez imaginemos o quadrado como um rectângulo com lados congruentes. Se assim for, então *não* podemos desenhar um quadrado numa esfera! Se um rectângulo for definido como um quadrilátero com quatro ângulos rectos ou como um tipo especial de paralelogramo, não existe numa esfera.

Assim, a segunda diferença entre esta investigação e as anteriores é que ambas as respostas – sim ou não – à pergunta "pode desenhá-lo?" podiam estar correctas, mas nenhuma resposta tem qualquer valor sem uma explicação. Saber *porque é* que as coisas são como são constitui também uma característica da investigação *pôr em questão.*

Juntar uma componente de questionamento a um problema

Uma das maneiras de juntar uma componente de questionamento a outras investigações é mudar os atributos do problema inicial (Brown e Walter, 1983) e uma mudança particularmente frutuosa é fazer uma mudança no domínio.

Lembro-me de quando, pouco tempo depois de ter aprendido o algoritmo da divisão e os decimais, era eu criança, me ensinaram que "Os números primos são números que só são divisíveis por si próprios e por um". Lembro-me de ter pensado que se tratava de uma classificação arbitrária, já para não dizer confusa. "Quer dizer que 5 é primo?!", ia eu a perguntar, "Mas eu posso dividir 5 por 2 ou 3 ou pelo que eu quiser!"

Aprendi o suficiente para trabalhar bem com os números primos, mas o que nunca foi tornado explícito foi que "Os números primos são números *num conjunto* que, se divididos por números *retirados desse conjunto*, apenas são divisíveis por si próprios e por um e continuar a ter uma resposta *no mesmo conjunto".* O conjunto, obviamente, entendia-se que era constituído pelos números inteiros (positivos). Mas a definição também funciona bem, e os resultados são bastante interessantes, se escolhermos um conjunto como: {1, 4, 8, 12, 16, 20, 24, …}.

Aplicando esta estratégia de mudança-de-domínio ao problema dos selos do correio, conseguimos vários problemas que põem em questão o pensamento subjacente ao problema inicial.

Os correios retiraram as antigas franquias de 7 cêntimos e 9 cêntimos e mudaram-nas para novos valores. Agora os únicos selos de que dispõem são os de 8 cêntimos e de 26 cêntimos. Uma carta de 50 cêntimos pode ainda ser enviada, usando duas de 8 cêntimos e uma de 26 cêntimos. Quais as franquias que *não* se podem fazer?

Mudar os números alarga a fase exploratória e pode proporcionar "prática", mas na realidade não acrescenta nada de novo até que perguntemos aos alunos que reflictam na mudança. A pergunta-chave, neste caso, seria qualquer coisa do género:

Em que é que o usar 8 e 26 muda o problema?
Se usássemos 15 e 21, seria mais como 7 e 9 ou como 8 e 26?
Explica.

A partir daqui, muitos outros passos são possíveis:

Deixemos de lado os selos. Imagina um país que só tem dois tipos de *moedas*, uma com o valor 7 e outra com o valor 9.
Será possível pagar uma despesa de 15? Que despesas *não* podem ser pagas?

Mais uma vez, o problema não fica completo até se fazer a pergunta-chave:

Em que é que isto muda o problema?

Vejamos agora mais um passo, com o seu final essencial:

Em vez de moedas e selos, imagina que dispões apenas de duas réguas de medição, uma com 8 cm e outra com 26 cm. Que comprimentos poderás medir? Será que isto muda o problema?
Como seria se uma fosse de 2/3 m e a outra de 2/7 m?
E se uma fosse de 1 cm e a outra de $\sqrt{2}$ cm? Em que é que isto muda o problema?

Dependendo da idade e da preparação do aluno, pode ser possível voltar ao problema dos selos do correio, pedindo-lhe que explique (prove) o caso geral.

Faz uma conjectura acerca do maior valor de franquia que não pode ser feito com selos de valor m cêntimos e n cêntimos.
Descobre uma demonstração.

Este problema começa com Explorar, mas exige *Pôr em questão* e conduz a um resultado específico.

O ingrediente essencial, desde "Pode desenhar Um Quadrado numa esfera?", passando pelos primos pares, até à demonstração sobre os selos do correio é *explicar* (com a coerência lógica que se requer ao discurso matemático) porque é que as coisas são como são ou como dependem de outros fenómenos ou estão com eles relacionadas. Repare-se como o seguinte problema integra esse mesmo elemento, especialmente através da pergunta final:

> Desenha uma circunferência e dois diâmetros. Liga, à volta do círculo, sucessivamente, as extremidades dos dois diâmetros. Tenta várias possibilidades. Faz uma conjectura acerca da figura resultante.
>
> Descobre um argumento de simetria em apoio da tua conjectura.
>
> *De que modo é que este problema está relacionado com o dos ângulos inscritos num semicírculo?*

As novas exigências e recompensas da investigação

Para os professores

O recurso à investigação impõe ao professor um certo número de novas exigências. Além de requerer adaptações pedagógicas no sentido de estimular o espírito de investigação entre os alunos, o recurso à investigação impõe novas exigências aos conhecimentos matemáticos do professor.

As actividades de investigação, pela sua natureza, tendem a ser de certo modo abertas — podem ser prosseguidas a vários níveis de profundidade, e por vezes pode ser difícil distinguir de modo significativo (e rigorosamente) extensões pertinentes, embora com poucos pontos de contacto, de desvios irrelevantes. As actividades de investigação podem pois conduzir os alunos para um território matemático impreparado e pode levá-los a desenvolver processos que não são a norma. Os professores precisam de ter boas bases matemáticas, para além de sensibilidade pedagógica, para poderem decidir quando é que uma investigação deve prosseguir e quando é que provavelmente será mais frutuoso pôr termo à investigação em curso de modo a permitir passar a outra. Um professor que não tenha tais bases pode interromper cedo demais uma investigação, não sendo capaz de reconhecer a importância da Matemática que espreita nas descobertas ou métodos dos alunos; reciprocamente, o professor facilmente pode estar a perder tempo insistindo em pontos insignificantes, quando uma pequena viragem na investigação em curso, ou uma mudança radical do ponto tratado, poderia ser mais produtiva para os alunos. Finalmente, sem um bom entendimento da Matemática, muitos professores tendem a concentrar-se na própria investigação, em vez de verem a reflexão sobre a investigação e a abstracção que dela se retira, como é o seu objectivo.

Para os alunos

As exigências para os professores, e o que é preciso para responder a tais exigências, constituiu o tema da comunicação de Judy Fonzi. Quem estuda os currículos deve igualmente considerar o modo como as investigações serão entendidas pelos professores e as orientações que lhes devem ser fornecidas para a utilização de currículos baseados na investigação, mas uma preocupação ainda maior deve ser os novos desafios para os alunos. Se é certo que grande parte da aprendizagem dos alunos deve surgir das investigações que eles próprios realizam, então os alunos devem aprender a ser bons investigadores. É uma coisa que não deve ser deixada ao acaso, devendo antes constituir uma parte cuidadosamente planeada do currículo.

Pode ser instrutivo repararmos numa lista das aptidões de que os alunos precisam para serem investigadores competentes. Poderia ser suficientemente evidente como tais capacidades seriam essenciais para, por exemplo, o trabalho científico, mas vou escolher uma linguagem que mostre as relações com as ideias matemáticas.

- Deve manter-se alguma coisa constante deliberadamente. Qualquer investigação deve ter certos pressupostos, parâmetros, domínios, hipóteses, inclusive questões fixas. Os alunos devem aprender a não variar tudo o que podem, mas antes a mudar só uma coisa de cada vez, continuando a observar o efeito das mudanças *naquilo* até compreenderem o efeito, antes de mudar qualquer outra coisa.
- Deve variar-se alguma coisa deliberadamente. Quer se varie uma quantidade, um conjunto de domínio, a posição de um ponto, ou até o local onde se fixa o olhar num diagrama fixo, quer a pergunta que é feita acerca de uma situação fixa, uma investigação envolve alguma mudança deliberada.
- Os resultados mais interessantes surgem sob a forma de invariantes inesperadas – constantes que não se escolheram deliberadamente, mas que são consequência de outras escolhas que tenham sido feitas. Surgem também sob a forma de mudanças inesperadas – mudanças que não são as que foram feitas deliberadamente. Em ambos os casos, obviamente, o que é “inesperado” está dependente da preparação matemática e do nível de desenvolvimento cognitivo do investigador, e assim a investigação com descoberta subjectivamente original pode fazer-se a bem dizer em qualquer idade.
- Qualquer que seja o nível, aprender a ser um bom investigador implica aprender a ver para além das aparências à procura de conexões lógicas: *Porque é que isto deu certo? A que outro fenómeno se assemelha?*

Temos, assim, uma quarta função da investigação no currículo: ensinar o aluno a investigar.

Qualquer um dos três tipos de investigação antes analisados – explorar, descobrir ou *pôr em questão* – podem ser aqui de alguma ajuda, mas o *propósito* agora não é apenas o conteúdo matemático, mas também aprender como investigar. Porque haveremos de sobrecarregar-nos com mais esta dificuldade, quando é já suficientemente difícil ensinar Matemática? Desde logo, porque ser um investigador competente é importante em Matemática, como o é em Ciência, Psicologia, jornalismo de investigação, diagnóstico médico, auto-diagnóstico… Constitui um saber fundamental por si próprio, por isso é importante ensiná-lo, para bem dos alunos que não irão seguir estudos matemáticos avançados. E é importante *em Matemática*, especialmente para os estudantes que irão seguir estudos matemáticos avançados, por isso vale a pena ensiná-la *em Matemática*.

Além disso, não deixa de ser razoável acreditar que este "fardo suplementar" na aula de Matemática — mesmo (ou talvez *especialmente)* as geralmente "difíceis" tarefas de *pôr em questão* — tornam a Matemática mais compreensível, assim como divertida, para todos os alunos ao substituir algum do tecido cognitivo que é tipicamente cozinhado a partir dos currículos "mais simples" de Matemática.

Referências

Brown, S., & Walter, M. (1983). *The art of problem posing*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Cuoco, A. A., Goldenberg, E. P., & Mark, J. (1996). Habits of mind: an organizing principle for mathematics curriculum. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*(4), 375-402.

Education Development Center, Inc. (1998a). *Connected geometry*. Chicago. IL: Everyday Learning.

Education Development Center, Inc. (1998b). *Connected geometry*. Versão modular CD-ROM. Chicago, IL: Everyday Learning.

Goldenberg, E. P. (1996). 'Habits of mind' as an organizer for the curriculum. *Journal of Education*, *178*(1), 13-34.

Goldenberg, E. P., & Hazzan, O. (Dezembro 1995). Proving: Relationships to construction, visualization and language. *Proceedings of the Conference of Justifying and Proving in School Mathematics,* Londres, pp. 106-125.

Weeks, J. (1985). *The shape of space*. Nova Iorque, NY: Marcel Dekker.