O que torna a Matemática tão difícil e o que podemos fazer para o alterar?[1]

Koeno Gravemeijeir, *Universidade de Utreque, Holanda*

Na sua conferência plenária na 25.ª Conferência do Grupo Internacional da Psicologia da Educação Matemática (PME), Paulo Abrantes argumentou que um dos principais obstáculos ao desenvolvimento de abordagens prometedoras à inovação curricular em Matemática pode ser encontrada nas concepções "populares" sobre educação. "Em particular, concepções do público sobre a matemática e a aprendizagem da Matemática nas escolas parecem ter um papel central no favorecimento da perpetuação de um currículo orientado para as técnicas (Abrantes, 2001, pp. 1-37). Neste artigo, pretendo prosseguir esta ideia das concepções "populares" sobre educação ao tentar responder à questão "O que torna a Matemática tão difícil?"

Podemos começar por nos questionar "Como é que as pessoas aprendem Matemática?" Ao fazê-lo, podemos considerar várias teorias de aprendizagem sofisticadas. Mas, se nos limitarmos à prática de aprendizagem da Matemática nas escolas, pode ser mais útil tomar como ponto de partida as noções comuns de ensino e de aprendizagem. Na prática, aprender é usualmente encarado como o estabelecimento de conexões entre o que já se sabe e o que se tem de aprender. No caso da Matemática, o que se tem de aprender é um corpo de conhecimentos abstractos e formais. Penso que é esta noção popular da aprendizagem da Matemática, *como estabelecer conexões com um corpo exterior de conhecimento*, que a torna tão difícil. No que se segue, começo por evidenciar esta afirmação e depois descrevo uma alternativa para tornar a Matemática mais acessível.

---

[1] Gravemeijer, K. P. E. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-101). Lisboa: APM.

Aprender como fazer conexões

Se pensarmos na aprendizagem como o estabelecimento conexões com um corpo de conhecimentos que tem de ser adquirido, a tarefa dos educadores matemáticos é moldar o ensino da Matemática para ajudar os alunos a encurtar o fosso entre, por um lado, o seu conhecimento pessoal e, por outro, o conhecimento formal da Matemática. No entanto, parece que o fosso entre o conhecimento matemático formal e o conhecimento pessoal dos alunos é muito grande.

Para tentar ultrapassar este problema, os criadores (*developers*) dos currículos tentam inventar modelos tácteis ou visuais (muitas vezes designados por manipuláivéis) que representem relações ou conceitos matemáticos e que sejam facilmente compreendidos pelos alunos. A ideia subjacente é que é que representações externas facilitam o processo de estabelecer conexões com as relações e conceitos representados. A este respeito é utilizada a palavra "transparente", que sugere que os alunos olham para os modelos e vêem a Matemática. Isto permite aos alunos construírem representações mentais que reflectem as expressas nas representações externas.

Os materiais manipuláveis mais conhecidos que se ajustam a esta visão da representação são os blocos de Dienes, ou material multibásico (MAB), que pretendem concretizar o sistema decimal (ver fig. 1).

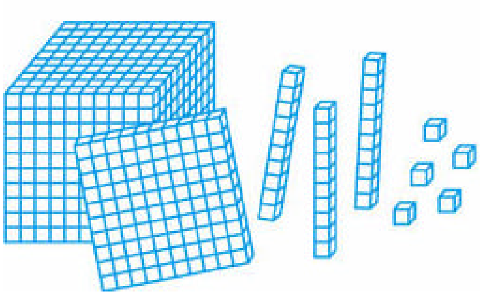


Fig. 1 – Blocos de Dienes.

Espera-se que os alunos vejam o bloco grande como consistindo num milhar de pequenos cubos, as placas quadradas como cem e a barra como dez cubos pequenos. No entanto, a prática mostra que esta interpretação não é autoevidente (Labinowics, 1985).

Cobb, Yackel e Wood (1992) afirmam que a característica problemática dos blocos de Dienes é inerente à suposição de que as representações para o ensino são a fonte primária do conhecimento matemático dos alunos. Para nós é evidente o que estas representações significam, mas para os alunos não é assim. A plausibilidade da utilidade das representações reside no facto de que nós, como educadores matemáticos adultos, experienciarmos constructos matemáticos, tais como, a dezena, a unidade e a centena como entidades para as quais podemos apontar e sobre as quais podemos falar. Trata-se de um sentimento que não se deve apenas à nossa sofisticação matemática, mas também à nossa experiência de ser capazes de falar e raciocinar acerca de objectos despreocupadamente enquanto interagimos com os outros.

Como resultado de tais experiências, podemos começar a conceber a noção de Matemática como um corpo de conhecimentos independente e objectivo. No entanto, do ponto de vista construtivista, a hipótese de que o conhecimento objectivo existe, independentemente do acto do conhecimento, é extremamente problemática. Da mesma forma, é também problemática a ideia de que conhecimento objectivo pode ser acedido directamente através de representações externas.

Os professores e os criadores de "sequências de aprendizagem" são peritos que já compreendem o conhecimento matemático abstracto que os alunos têm de adquirir. Na sua perspectiva, faz sentido tentar desenvolver modelos "transparentes" que torne o conhecimento matemático abstracto apreensível aos alunos. Eles vêem o seu conhecimento do sistema de numeração reflectido nos blocos. No entanto, para os alunos, os blocos de Dienes não são mais do que blocos de madeira. Não podemos esperar que os alunos vejam uma Matemática mais sofisticada nos blocos do que aquela que eles já adquiriram anteriormente. Isto levanta a questão de como os alunos aprendem a Matemática abstracta a partir de representações externas concretas. Este problema é conhecido como o "paradoxo da aprendizagem" (Bereiter, 1985), que Cobb et al. descrevem como:

> A ideia de que os alunos constroem inevitavelmente a representação interna correcta a partir do material apresentado implica que a sua aprendizagem é despertada através das relações matemáticas que eles devem construir antes de eles as construírem (…)
>
> Então, se os alunos apenas conseguem fazer sentido do seu mundo em termos das suas representações internas, como é que é possível que eles reconheçam as relações matemáticas que são mais avançadas do que as suas representações internas? (Cobb et al., 1992, p. 5).

Consequentemente, quando os alunos não vêem o que é para ser visto, o professor não tem muitas opções, a não ser dizer detalhadamente a correspondência entre os blocos e o algoritmo. No entanto, o resultado de tal prática será a aprendizagem por rotina e não por compreensão. Isto é exactamente o que acontece com o ensino convencional, no qual as acções com os blocos são organizadas em etapas para a execução do algoritmo escrito no papel, e vice-versa. Como é de esperar, dada a falta de transparência dos blocos, a sequência delineada de ensino não conduz à compreensão ou à proficiência (Resnick & Omanson, 1987). Além disso, os alunos desenvolvem todo o tipo de "erros algorítmicos" ao tentarem lidar com processos que não entendem (Brown & Van Lenn, 1982). Outro efeito de ensinar um corpo de conhecimentos que não é acessível aos alunos, é que eles começam a tratar a Matemática escolar e a realidade do dia a dia como dois mundos disjuntos.

Dois mundos

Podemos ilustrar isto com uma entrevista a uma aluna do 1.º ano de escolaridade conduzida por Cobb (1989). Primeiro são apresentadas à aluna, Auburn, uma série de tarefas aditivas, sob a forma de expressões numéricas:

16 + 9 =
28 + 13 =
37 + 24 =
39 + 53 =

Nesta parte da sessão, Auburn resolveu «16 + 9» contando um a um, e chegou à resposta «16 + 9 = 25». Mais tarde, Auburn teve de preenche uma ficha que continha as mesmas tarefas, agora escritas sob a forma de coluna (ver fig. 2).

Auburn resolveu o mesmo problema da seguinte forma:

$$\begin{array}{r} 16 \\ \underline{+\ 9} \\ 15 \end{array}$$

O que consistiu no ponto de partida para o seguinte diálogo entre o entrevistador (E) e Auburn (A):

E: É correcto que haja duas respostas?
A: ?
E: Qual é que pensas que é melhor?
A: 25

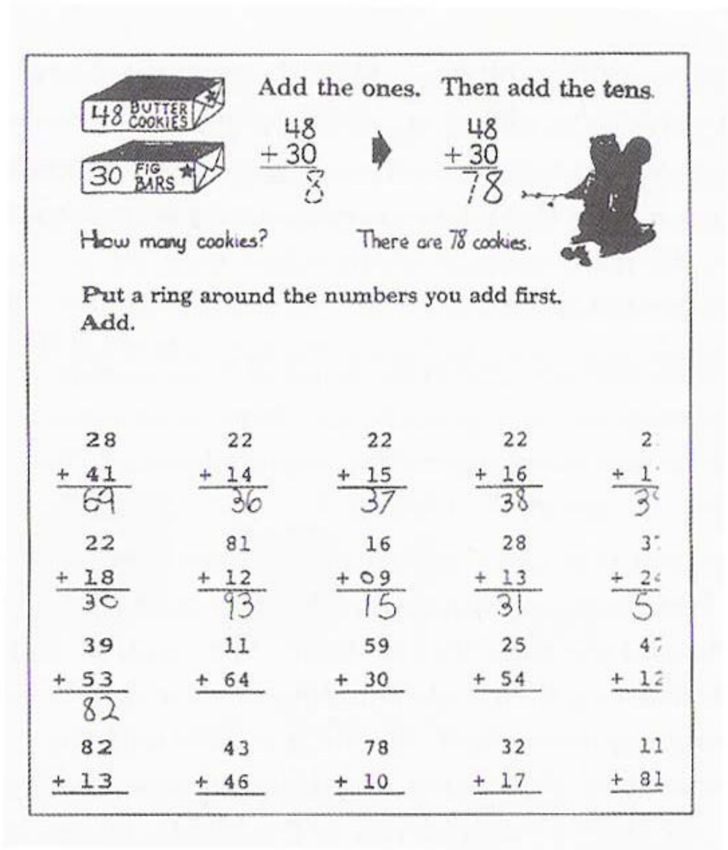


Fig. 2 – A ficha de trabalho de Auburn.

E: Porquê?

A: Não sei.

E: Se tivermos 16 bolachas e outras 9, teremos ao todo 15?

A: Não.

E: Porque não?

A: Porque se contarmos todas teremos 25.

E: Mas estes (15) estão às vezes certos? Ou estão sempre errados?

A: É sempre correcto.

Para nós esta resposta pode ser altamente surpreendente, mas para Auburn, a Matemática das fichas de trabalho parece pertencer a outro mundo, um mundo que parece desconectado do mundo da experiência do dia a dia. Uma das consequências é que Auburn não está inclinada a utilizar o conhecimento do dia a dia para fazer sentido dos problemas da Matemática escolar. Para ela a Matemática tem o seu conjunto de regras arbitrárias que apenas se têm de aceitar, vindas da autoridade do professor ou dos manuais escolares.

No início deste artigo, mencionei que a dificuldade da aprendizagem da Matemática pode estar assente no carácter formal e abstracto da Matemática. No entanto, podemos concluir do que acabámos de expor, que o problema actual pode estar no nível de sofisticação do conhecimento matemático dos professores (e dos autores de manuais). A grande diferença entre o conhecimento abstracto dos professores e o conhecimento experimental dos alunos causam um desajustamento. Os professores e os autores de manuais escolares tomam, erradamente, o seu conhecimento matemático abstracto como um corpo de conhecimentos objectivos com o qual os alunos conseguem estabelecer conexões. No entanto, o fosso entre o conhecimento dos professores e o dos alunos é muito grande para fazer isto funcionar. As representações para o ensino não podem fazer a ponte para este fosso, porque, o que esse material representa está nos olhos de quem o contempla. Apenas os peritos que sabem Matemática podem ver a Matemática.

Diferentes quadros de referência

A este respeito, podemos citar Van Hiele (1973), que observou que os professores e os alunos têm quadros de referência diferentes e, como consequência, podem usar a mesma palavra com significados diferentes.

Van Hiele pegou na palavra losango, da geometria como um exemplo. Alguns alunos do ensino secundário dirão que um quadrado não é um losango, a não ser, talvez, se estiver inclinado (ver fig. 3).

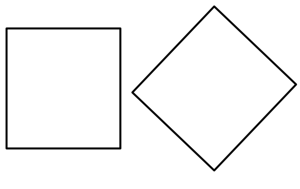


Fig. 3 – Um quadrado é um losango?

Para os alunos que raciocinam desta forma, a palavra losango significa a forma de uma figura. Contudo, para o professor a palavra losango significa um conjunto de relações geométricas:

- os lados são paralelos dois a dois;
- todos os lados têm comprimento igual;

- as diagonais intersectam-se ortogonalmente;
- os ângulos internos são geometricamente iguais.

O professor poderá aceitar um esboço pouco perfeito de um quadrilátero como losango se o aluno disser que os lados têm todos o mesmo comprimento. Com base nisto o professor concluirá que as diagonais se intersectam ortogonalmente, que os ângulos internos são geometricamente iguais e que os lados são paralelos dois a dois. No entanto, para os alunos, que relacionam a palavra losango com a imagem da forma, essa linha de pensamento não faz qualquer sentido.

Este exemplo ilustra a afirmação de Van Hiele de que os alunos e os professores falam muitas vezes linguagens diferentes – sem terem consciência disso. Os professores pensam num losango como um objecto matemático cujo significado deriva de um conjunto de relações geométricas. Mas para os alunos que não construírem a rede de relações matemáticas necessária, não existe nenhum objecto matemático para pensar.

Este fenómeno pode ser ilustrado com outro exemplo.

Para um adulto "1 + 1 = 2" é do senso comum, mas isso pode não acontecer com as crianças mais pequenas. Numa determinada idade as crianças mais pequenas, não compreendem a questão "Quanto é 4 + 4?" Embora possam compreender muito bem que 4 maçãs e 4 maçãs é igual a 8 maçãs. A explicação para este fenómeno é que, para elas, o número está ainda muito ligado à contagem de objectos, tais como "quatro maçãs".

A um nível mais elevado: o 4 será associado com várias relações numéricas, tais como: 4 = 2 + 2 = 3 + 1 = 5 – 1 = 8 : 2, etc.

Nste nível mais elevado, os números tornam-se objectos matemáticos cujo significado deriva de uma rede de relações numéricas (c.f. Van Hiele, 1973). Quando um professor da escola do 1.º ciclo do ensino básico fala sobre números, pode muito bem estar a falar de objectos matemáticos que não existem para os alunos. Por isso, aqui, novamente, a noção de ensinar ajudando os alunos a estabelecer conexões com novo conhecimento revela-se inadequada. Como podem os alunos, para quem os números parecem ser um tipo de adjectivos, fazer conexões entre os números como objectos matemáticos?

Eu acrescentaria, que dizer aos alunos que 2 + 2 = 4, etc., não ajuda se os alunos não sabem o que significa "2 + 2".

O que torna a Matemática tão difícil

Regressando à nossa questão inicial, podemos concluir que o problema está no facto que a concepção usual de aprendizagem, como o estabelecimento de conexões entre o conhecimento interno do aluno e um certo conhecimento externo que tem de ser adquirido, não se ajusta à educação matemática. Leva a que os professores tentam forçar os alunos a fazer conexões com o conhecimento externo que para eles não existe. Relacionado com isto vem à mente a observação de Davis e Hersh (1986), quando descrevem os matemáticos que falam de constructos matemáticos esotéricos como se fossem objectos matemáticos reais, e que são totalmente inimagináveis para não matemáticos. Aparentemente, os professores e os alunos vivem em dois mundos, o mundo da Matemática dos professores e o mundo da vida do dia a dia dos alunos.

O ensino da Matemática baseado na noção popular "de aprender como fazer conexões", aparentemente pede aos alunos que estabeleçam conexões com um corpo de conhecimentos que eles não podem alcançar. Portanto, a minha conclusão é que é a tradição de tentar ensinar seguindo esta perspectiva que torna a Matemática tão difícil de aprender. Podemos, é claro, contrapor que a realidade mostra que (pelos menos) algumas pessoas aprenderam Matemática apesar desta forma de ensino. No entanto, podemos pensar que o seu processo real de aprendizagem pode ter sido diferente do de fazer conexões. Podemos conjecturar que esses aprendizes da Matemática construíram realmente as suas teorias pessoais acerca do estranho corpo de conhecimentos que lhes foi apresentado. Teorias que aprimoraram e ajustaram com base em experiências e *feedbacks.*

No entanto, este tipo de aprendizagem tem várias desvantagens. Em primeiro lugar, é muito difícil. O processo gera várias concepções erradas (*misconceptions)* que se têm de ultrapassar. A segunda desvantagem é a incerteza que lhe está inerente, o aprendiz está sempre a tentar adivinhar o que realmente o professor ou o autor dos manuais quer dizer. O conhecimento e a compreensão são sempre preliminares, até à próxima contradição, que mostrará se a última conjectura feita sobre o que o corpo de conhecimentos transmite ainda é válida. Uma consequência muito provável é a ansiedade em relação à Matemática. Além disso, esta falta de certezas e a dependência constante da autoridade do professor e dos manuais, está em contradição com a própria natureza da Matemática. Mesmo que se desenvolva alguma proficiência desta forma, podemo-nos questionar se o que aprendemos é realmente Matemática.

Podemos concluir que a noção popular de aprendizagem como o estabelecimento de conexões entre o que o aprendiz já sabe e o que tem de aprender, não se ajusta à educação matemática. Podemos sumariar os problemas:

- Primeiro, existem as características problemáticas do corpo de conhecimentos, com o qual os alunos têm de estabelecer conexões. Para eles, este corpo de conhecimentos não existe, este conhecimento existe apenas na mente dos professores e dos autores dos manuais;
- Segundo, tentar representar conhecimento objectivo e científico com material de instrução transparente resulta num paradoxo de aprendizagem – como é que os alunos podem aprender se não podem ver a Matemática, que ainda não sabem, nos materiais?
- Terceiro, como consequência, mesmo o ensino de um simples algoritmo torna-se problemático.

Podemos, portanto, concluir que para ensinar Matemática de uma forma mais proveitosa, temos de abandonar a ideia de aprender como fazer conexões com um corpo de conhecimentos objectivo, já construído e pronto. Quando olhamos para uma alternativa, esta deve pelo menos oferecer uma solução para os problemas referidos, a lacuna entre o conhecimento dos professores e o conhecimento dos alunos, o paradoxo da aprendizagem e o problema com os algoritmos escritos.

Alternativa

Uma forma diferente de criticar a abordagem de ensino discutida acima, é observar que é o produto final da actividade matemática de muitos matemáticos excepcionais que é tomado como ponto de partida para o ensino dos jovens alunos. Freudenthal (1973, 1991) chama a isto uma inversão anti-didáctica. E acrescenta, a alternativa é criar oportunidades para os alunos reinventarem a Matemática. Relativamente a isto, ele fala da "Matemática como uma actividade humana". Tal como a actividade dos matemáticos resulta na Matemática tal como a conhecemos hoje, a actividade dos alunos pode resultar na construção da Matemática. Por isso, esta abordagem oferece uma alternativa para o ensino da Matemática como um produto pronto a consumir.

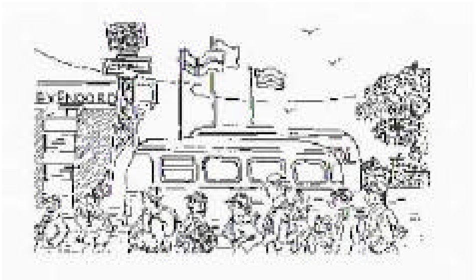
Deixem-me explorar ainda mais o ponto de vista de Freudenthal. Para ele – como matemático – a Matemática é antes de mais uma actividade. Uma actividade que designa "matematizar" ou organizar. Ele refere, relativamente a este aspecto, a actividade de organizar assuntos (*subject matter*) para os tornar mais matemáticos. Isto pode dizer respeito, tanto a organizar matéria da realidade para a tornar mais acessível do ponto de vista do significado matemático como a organizar matéria matemática para a tornar mais matemática. Podemos relacionar "mais matemática" neste contexto com características como geral, exacta, precisa e breve, o que sugere actividades matemáticas tais como generalizar, formalizar, provar e abreviar. Freudenthal (1973) argumentava que os alunos conseguem reinventar a Matemática através da matematização, embora ele também reconhecesse que os alunos não conseguem simplesmente reinventar a Matemática que levou milhões de anos a matemáticos brilhantes a inventarem. Por isso, ele propõe a *reinvenção guiada*. Os professores e os manuais escolares têm de ajudar os alunos no processo, enquanto tentam garantir que os alunos experienciam a aprendizagem da Matemática como um processo de invenção da Matemática, por eles próprios. Para tal poder ser alcançando, tem de ser desenvolvido um trajecto de invenção. Por isso, os professores precisam de ajudar os criadores de material didáctico, os quais por sua vez têm de ser apoiados pelos investigadores.

Criar trajectórias de invenção tem sido a missão do Instituto Freudenthal, nas últimas décadas. Isto resultou no que chamamos de domínio específico da teoria de ensino para a educação matemática realística (RME). A teoria RME é o resultado da generalização de várias teorias locais de ensino, que descrevem como um certo tópico pode ser ensinado de acordo com a ideia de Freudenthal da Matemática como uma actividade humana.

Limitarei a minha discussão da teoria RME a dois aspectos: a reinvenção guiada e a modelação emergente. O primeiro, porque oferece uma alternativa, e um processo mais eficaz de ensinar os algoritmos escritos. O último, porque a modelação emergente ultrapassa o paradoxo de aprendizagem e também porque apoia a "construção" de objectos matemáticos.

Algoritmos reinventados

A ideia de reinvenção guiada mostrou ser produtiva relativamente aos algoritmos escritos. Ilustro brevemente isto descrevendo como a divisão «longa» pode ser reinventada. Centro esta descrição à volta de um problema paradigmático acerca do transporte de apoiantes de um clube de futebol (fig. 4).



1128 apoiantes querem ir ao jogo de futebol fora dos Feijenoord. O tesoureiro soube que um autocarro transporta 38 passageiros e que será feito um desconto por cada 10 autocarros.

Fig. 4 – Feijennord.

Basicamente o problema pode ser resolvido por subtracções sucessivas, cada vez que um autocarro se enche com 38 pessoas, subtrai-se 38 (ver fig. 5).

1296		
38	-	1 ×
1258	-	1 ×
38	-	1 ×
1220		
38	-	1 ×
1182		
38	-	1 ×
1144		
38	-	1 ×
…		

Fig. 5 – Subtracções sucessivas

Além disto, a informação na tarefa de que será feito um desconto por cada dez autocarros, pode sugerir o cálculo do número de vezes em que se pode ter uma redução. Descobrir quantas vezes consegue preencher dez autocarros, pode chamar a atenção, dos alunos, para as oportunidades dadas pelo sistema decimal. Mesmo assim são possíveis várias soluções (fig. 6).

Este trabalho em direcção ao algoritmo escrito fornece oportunidades para os alunos descobrirem ao seu nível, para construírem o seu conhecimento experimental e realizarem e estabelecerem atalho (*short-cuts*) ao seu ritmo. Trabalhar com problemas realistas também implica uma abordagem significativa para o problema do resto, i.e., como um fenómeno real da vida que implica uma solução prática, em vez de uma divisão peculiar que nunca termina. Se o contexto for considerado seriamente, então 34 resto 4, não é uma resposta aceitável. O que é que podemos fazer com os 4 apoiantes? Bem há várias possibilidades, distribuí-los pelos outros autocarros, alugar outro autocarro, ou especular a desistência de, pelo menos, 4 apoiantes à última hora.

38/	1296	\34	38/	1296	\34	38/	1296	\34
	380	-10×		380	-10×		1140	-30×
	916			916			156	
	380	-10×		760	-20×		152	-4×
	536			156			4	
	380	-10×		76	-2×			
	156			80				
	38	-1×		76	-2×			
	118			4				
	38	-1×						
	80							
	38	-1×						
	42							
	38	-1×						
	4							

Fig. 6 – Vários níveis de abreviamento.

Aplicações como ponto de partida

O problema dos apoiantes da equipa de futebol mostra como situações problemáticas, nas quais os peritos aplicariam os conceitos ou ferramentas matemáticos que queremos ensinar, podem ser utilizadas como ponto de partida para o processo de reinvenção. No entanto, podem haver diferenças significativas nas características fenomenológicas dos vários pontos de partida possíveis, os quais, por sua vez, influenciam tanto as estratégias de resolução como a aplicabilidade. Ilustrarei este ponto com um problema contextualizado acerca de 36 a dividir por 3 (ver fig. 7), e as estratégias de resolução de alunos de 8 e 9 anos (Galen, Gravemeijer, Kraemer, Meeuwisse & Vermeulen, 1985).

Três crianças dividem 36 rebuçados. Quantos rebuçados recebe cada uma?

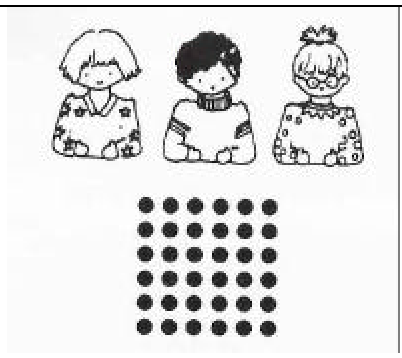


Fig. 7 – Dividindo rebuçados.

Os alunos inventam todo o tipo de processos de resolução:

- *Dividir com base em processos geométricos* (fig. 8): a área do quadrado com 36 rebuçados é dividida em três partes iguais.

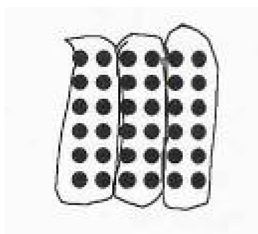


Figura 8 – Divisão geométrica.

- *Distribuir um a um* (fig. 9): os rebuçados são distribuídos um a um. São riscados um a um do total e adicionados a uma das colunas. (Os alunos até tentaram copiar os retratos das crianças.)

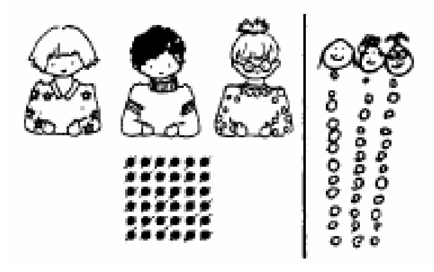


Fig. 9 – Distribuição uma a um.

- *Agrupar em tríades* (fig 10): alguns alunos desenharam grupos de três. Estes alunos provavelmente raciocinaram que cada vez que um rebuçado era distribuído a cada uma das crianças o stock diminuía em três. Então descobriram quantos grupos de três conseguiam criar.

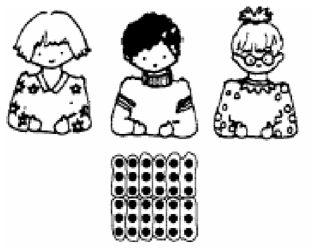
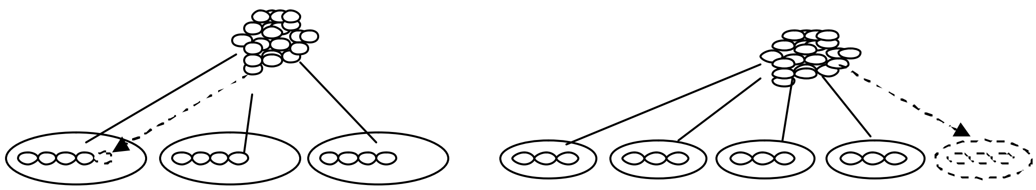


Fig. 10 – Tríades

De qualquer forma, a divisão surge como "subtracção repetida", e como "partilha justas" ou "distribuição" (ver Freudenthal, 1983). A subtracção repetida e a distribuição são também referidas como "divisão como razão" e "divisão como distribuição"[2], respectivamente (ver fig. 11).



Divisão como distribuição   Divisão como razão

Fig. 11 – Duas formas básicas de divisão.

Nos exemplos acima, a divisão como distribuição aparece mais claramente na solução geométrica e na distribuição um a um, onde os alunos interpretam o problema criando grupos iguais. Alguns alunos colocam questões diferentes, "Quantos grupos de três se conseguem fazer?" – o que implica a divisão como razão. A relação entre as duas já foi mencionada acima. A distribuição um a um tem como objectivo a criação de três grupos iguais. Ao mesmo tempo mostra que cada vez que a cada criança é dado um rebuçado, o número original de rebuçados diminui de três rebuçados. O que pode ser traduzido na questão acerca do número de vezes que este processo pode ser repetido, o que o transforma numa divisão como razão.

[2] Denominamos normalmente divisão como medida e como partilha, respectivamente.

O problema do jogo de futebol, que é utilizado como ponto de partida para a reinvenção da divisão "longa", pode ser classificado como um problema de divisão como razão. Uma série de problemas de divisão como razão pode ser utilizada para fazer surgir um caminho para a reinvenção. A análise anterior mostra que para garantir que vários tipos de aplicações sejam tidos em conta, o currículo também tem de conter a divisão como distribuição, assim como as relações entre a divisão por distribuição e por razão.

Modelação emergente

A seguir ao princípio da RME da reinvenção guiada, discuto a ideia da modelação emergente (Gravemeijer, 1999, 2004). Afirmo que a modelação emergente ultrapassa o paradoxo de aprendizagem. Discutimos anteriormente o paradoxo da aprendizagem como sendo uma das dificuldades que surgem na abordagem de ensino que trata o conhecimento dos peritos como um corpo de conhecimento independente, e que os alunos se podem apropriar deste através de material concreto que expressa esse conhecimento.

A abordagem da modelação emergente está na linha com a proposta de Meira (1995) para ultrapassar o paradoxo da aprendizagem. Com base da análise histórica, ele sugere um processo de "simbolização" e atribuir significado, no qual tanto os símbolos como o correspondente significado se desenvolvem. Historicamente, os símbolos e os modelos não se materializaram a partir do nada, são resultado de um longo processo de invenção, ajustamentos e refinamentos. Por isso, de novo, a conclusão é, em vez de tentar ajudar os alunos a fazerem conexões com a Matemática pronta, devemos ajudar os alunos a construir a Matemática de uma forma mais fundamentada.

Estas recomendações ajustam-se à ideia de modelação emergente. A abordagem da modelação emergente tem o seu ponto de partida na *actividade de modelação*. A modelação, nesta concepção, é uma actividade dos alunos, aos quais é pedido que resolvam um problema contextualizado. Depois, os alunos modelam o problema, de forma a resolvê-lo como a ajuda desse modelo. Tal actividade de modelação pode envolver fazer desenhos, diagramas, ou tabelas, ou pode envolver desenvolver notações informais ou utilizar notação matemática convencional. A conjectura é que agir com estes modelos ajudará os alunos a reinventarem a Matemática mais formal que se pretende atingir. Por isso, de novo, uma alternativa a fazer conexões com a Matemática pronta, é a actividade de fazer Matemática, que é posta ao serviço do desenvolvimento da Matemática.

Inicialmente, os modelos surgem como modelos de contextos específicos. Os modelos referem-se a situações paradigmáticas concretas, que são experiências reais para os alunos. Neste nível os modelos devem permitir estratégias informais que correspondem a estratégias de resolução situadas ao nível da situação que está definida no problema contextualizado.

A partir daí, o papel do modelo começa a mudar. Depois, enquanto os alunos recolhem mais experiências com problemas semelhantes, a sua atenção pode transferir-se para as relações e estratégias matemáticas. Como consequência, o modelo toma carácter mais objectivo, e torna-se mais importante como base para o raciocínio matemático do que como uma forma de representar um problema contextualizado. Assim, o modelo começa a tornar-se uma base referencial para o nível da Matemática formal. Ou resumidamente: um *modelo de* actividades matemáticas informais desenvolve-se num *modelo para* um raciocínio matemático mais formal.

Modelo de/modelo para

Esta mudança *modelo de*/*modelo para* pode ser exemplificado com a utilização da recta numérica vazia, como um meio de apoiar uma sequência de ensino de estratégias flexíveis de aditição e subtracção até 100. A ideia da recta numérica vazia tem origem em Whitney (1985) e foi introduzida na RME por Treffers (1991). Um forte argumento para a recta numérica vazia encontra-se nos processos informais de resolução desenvolvidos pelos alunos.

A investigação mostra que as estratégias que os alunos utilizam para resolver problemas de adição e subtracção com números até 100 caiem em duas amplas categorias (Beishuizem, 1993), que podem ser designadas por “partição” e “contagem”.

Por exemplo, uma tarefa como 44 + 37, pode ser resolvida da seguinte forma,

- por partição das dezenas e das unidades:

44 + 37 = …; 40 + 30 = 70; 4 + 7 = 11; 70 + 11 = 81, ou

- por contagem e saltos:

44 + 37 = …; 44 + 30 = 74; 74 + 7 = 81, ou

44 + 37 = …; 44 + 6 = 50; 50 + 10 = 60; 60 + 10 = 70; 70 + 10 = 80; 80 + 1 = 81, ou através de outras combinações de saltos de dezenas e de unidades.

Além disso, a investigação mostra que as estratégias de partição geralmente conduzem a mais erros na subtracção. A estratégia de partição das dezenas conduz facilmente a erros do tipo 35 – 19 = 24 (!). Os alunos mantêm as dezenas e as unidades separadas e resolvem 9 – 5 fazendo a diferença.

Uma vez que as estratégias de contagem são menos propensas a erros, faz sentido considerar este tipo de processos de resolução como o ponto de partida para uma sequência de ensino. Esta escolha foi também sustentada pela observação de que os alunos tendem a criar uma grande variedade de resoluções por contagem quando confrontados com problemas contextualizados de “tipo linear”, tais como, por exemplo, problemas acerca da comparação de comprimentos. No entanto, podemos observar, que as estratégias da contagem por saltos presumem a habilidade de coordenar as dezenas e as unidades e para utilizar de forma flexível as relações entre os números. No plano original, tanto de Whitney como de Treffers, é utilizado um fio de contas coloridas para apoiar este tipo de raciocínio.

No entanto, aqui quero discutir uma sequência de ensino alternativa que começa com a medição de unidades de dez e unidades de um, como uma forma de conduzir para o desenvolvimento de uma régua (ver também Stephan, Bowers, Cobb & Gravemeijer, 2004). Antes de mais a régua é utilizada para medir, mais tarde a régua é utilizada como um meio de apoio ao raciocínio aritmético. Depois, são apresentados aos alunos problemas com o seguinte (fig. 12).

Temos duas tábuas, uma de 48 cm e uma de 75 cm.
De quanto é a diferença?

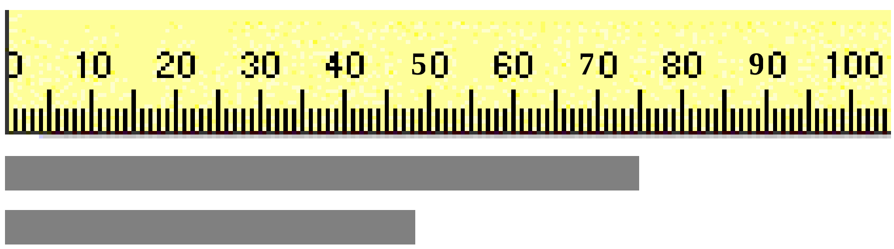


Fig. 12 – Comparando comprimentos.

Os alunos podem, é claro, utilizar a régua para contar a unidades individuais. No entanto, a régua também pode ser utilizada como base para o raciocínio aritmético.

Uma resolução evidente será olhar para a régua e raciocinar:

48 + 2 = 50; 50 + 10 = 60; 60 + 10 = 70; 70 + 5 = 75,

então a diferença é 2 + 10 + 10 + 5 = 27.

Outra solução pode ser: 48 + 20 = 68; 68 + 7 = 75, então a diferença é 27.

Tais processos de resolução podem ser modelados através da recta numérica vazia (fig. 13).

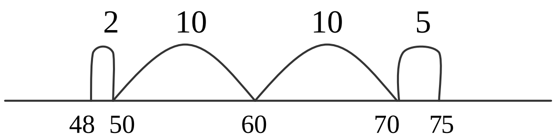


Fig. 13 – Contar através de saltos numa recta vazia

A utilização da recta numérica vazia não se insere apenas nestas estratégias, mas também as apoia. A recta numérica vazia apoia a execução de métodos de contagem, oferecendo um suporte – para registar tanto os cálculos parciais como os resultados parciais. Desta forma, os alunos adaptam o modelo ao seu raciocínio.

Além disso, a recta numérica vazia também pode ser utilizada para descrever estratégias mais sofisticadas. Olhando para os números do problema anterior, um aluno pode pensar em 75 – 50 = 25 como uma relação numérica familiar. Este aluno pode reformular o problema em termos de uma tarefa subtractiva: 75 – 48 = …, que pode ser resolvida através de 75 – 50 = 25; 25 + 2 = 27. Quando justifica a sua estratégia, este aluno pode utilizar a recta numérica para mostrar que menos 48 é igual a menos 50 mais 2 (ver fig. 14).

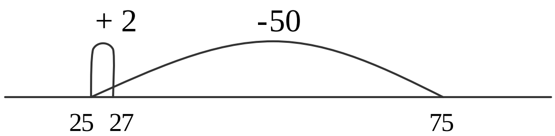


Fig. 14 - Compensando

Podemos observar que neste último caso, a recta numérica tem um papel diferente dos casos anteriores. Agora a recta numérica é utilizada para apoiar o raciocínio dos alunos acerca de relações numéricas. Anteriormente, os saltos na recta numérica foram utilizados para modelar a solução de um problema contextualizado. Esta diferença é central para a mudança do *modelo de* para o *modelo para*. Deixem-me especificar este ponto. Inicialmente, os alunos focam-se na relação entre o contexto do problema e a recta numérica. Nesta primeira etapa, os saltos na recta numérica podem ser explicados em termos da situação do problema (fig. 13). Mais tarde os alunos começarão a procurar símbolizações que apoiem o seu raciocínio acerca das relações numéricas (fig. 14).

Resumidamente, a mudança *do modelo de* para *modelo para* coincide com uma transferência do raciocínio acerca da modelação da situação contextualizada, para o raciocínio acerca de relações matemáticas. Numa fase posterior, as relações numéricas dão significado à utilização da recta numérica. Relativamente a isto, podemos distinguir dois tipos de actividades:

(a) *actividade referencial*, na qual o significado de agir com o modelo deriva da actividade do contexto descrito nas actividades de ensino;

(b) *actividade geral*, na qual o significado de agir com o modelo deriva das relações matemáticas presentes.

Estes tipos de actividades gerais podem ser vistas como níveis diferentes de actividade, as quais podem ser completadas, por um lado, com um nível de actividade no próprio contexto das tarefas e, por outro lado, com um nível de actividade matemática mais formal onde os alunos já não necessitam de um modelo. Juntos, podem elaborar a distinção entre o *modelo de* e o *modelo para* através da identificação de quatro tipos gerais de actividade (Gravemeijer, 1994), tal como se mostra na figura 15.

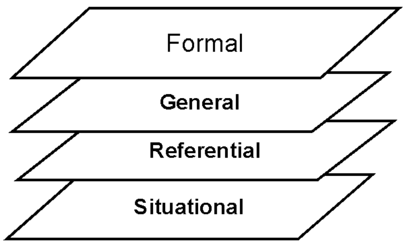


Fig. 15 - Níveis

(1) *actividade na situação da tarefa*, na qual as interpretações e resoluções dependem da compreensão de como agir no contexto;

(2) *actividade referencial*, na qual cada *modelo de* refere-se a actividades na situação descrita nas actividades de ensino;

(3) *actividade geral*, na qual os *modelos para* referem-se a um quadro de representações matemáticas;

(4) *raciocínio matemático formal*, o qual não depende do apoio de modelos para a actividade matemática.

No nível referencial, os modelos são fundamentados na compreensão dos alunos de contextos experienciais reais. A actividade geral começa a emergir quando os alunos começam a focalizar-se nas relações matemáticas envolvidas. Então, o seu raciocínio perde a sua dependência da representação mental da situação específica, e o papel dos modelos muda gradualmente passando a ter vida própria.

Um aspecto crucial da heurística dos modelos emergentes é que a mudança entre o *modelo de* para o *modelo para* é que está reflexivamente relacionado com a criação de alguma matemática realista. O que é que se espera é que, que no percurso da sequência, se dê uma mudança no que os números significam para os alunos. Inicialmente, os números referem-se a distâncias, mais tarde os números começam a ter o significado de objectos matemáticos. Esta mudança envolve uma transição de ver os números como ligados a objectos identificáveis ou unidades (i. e., números como grandezas, "37 pés"), para passar a ver os números como entidades próprias ("37"). Para os alunos, um número visto como um objecto matemático ainda tem um significado quantitativo, mas este significado já não está dependente da sua conexão com uma distância identificável, ou com um objecto que se pode contar. No mundo do aluno, o significado dos números vistos como objectos matemáticos deriva do seu lugar numa rede de relações numéricas. Tal rede pode incluir relações tais como $37 = 30 + 1$, $37 = 3 \times 10 + 7$, $37 = 20 + 17$, $37 = 40 - 3$. O aspecto crucial desta rede é que a compreensão destas relações transcenda os casos particulares. Ou seja, quando os alunos formam as noções de objectos matemáticos, eles vêem as relações, como as descritas acima, como sendo verdadeiras para *qualquer* quantidade de 37 objectos (incluindo a grandeza de 37 unidades).

Esta mudança, de números como referentes para números como objectos matemáticos, está reflexivamente relacionada com a transição do *modelo de* para o *modelo para*, descrito anteriormente. Por um lado, as acções dos alunos com "o modelo" estimulam a constituição de um quadro de referência de relações numéricas. Por outro lado, através do desenvolvimento deste quadro de referência de relações numéricas, "o modelo" *pode* tomar o seu papel como modelo para o raciocínio matemático.

Espera-se que os alunos experienciem o quadro de referência das relações matemáticas e dos objectos matemáticos correspondentes, como uma nova realidade matemática. Esta realidade experiencial corresponde realmente ao corpo de conhecimento matemático que identificámos como o problema central na abordagem de aprendizagem através das conexões. Isto mostra o valor da abordagem dos modelos emergentes: em vez de tentar ajudar os alunos a fazer conexões com a realidade matemática que não existe para eles, a abordagem do modelo emergente ajuda os alunos a construírem essa realidade matemática por eles próprios.

Conclusão

O conhecimento matemático abstracto é difícil de transmitir aos alunos, pois diz respeito a conhecimento de um nível diferente de compreensão. Por isso, a noção popular de aprendizagem como o estabelecer conexões não se adequa. Mas, em vez de tentar ajudar os alunos a estabelecer conexões com o conhecimento matemático que é muito abstracto para eles, podemos querer tentar ajudá-los a construir um novo conhecimento matemático, construído sobre o que eles já sabem. Algumas das estratégias que a Educação Matemática Realística oferece para esta abordagem alternativa são a reinvenção guiada e os modelos emergentes.

Um aspecto importante desta abordagem é que cria oportunidades para os alunos desenvolverem o conhecimento matemático fundamentado em experiências do dia a dia. Mais importante ainda, deixa em aberto a conexão com essas fontes. Isto, por sua vez, permite aos alunos evoluírem para níveis de compreensão mais concretos, se eles resolverem problemas. Por isso, esta abordagem deixa espaço para os alunos trabalharem a diferentes níveis. O que, por sua vez, proporciona condições para realizar um dos ideais de Paulo Abrantes (2001), nomeadamente "a Matemática para todos".

No entanto, a abordagem da RME não oferece uma solução fácil de como ensinar a Matemática abstracta. Já discuti a necessidade de construir sequências de ensino (*instructional design*). Os professores precisam de sequências de ensino, ou melhor ainda de *rationales,* ou teorias locais de ensino que sirvam de base para tais sequências, em conjunto com recursos que ofereçam potenciais actividades.

Além da necessidade da construção de sequências de ensino, existe também a necessidade do desenvolvimento profissional. Na concepção do ensino como ajudando os alunos a fazer conexões com o corpo de conhecimentos matemáticos pronto, a actividade central do ensino será a de fornecer direcções e explicações. De forma a mudar para a abordagem alternativa, os professores têm de mudar a sua prática de fornecer caminhos e explicações para ajudar os alunos a inventar a Matemática. Os professores são confrontados com a difícil tarefa de construir os *inputs* e ideias dos alunos e ao mesmo tempo trabalhar para objectivos convencionais fixados.

Uma das consequências é que os professores deixarão de ser a única autoridade relativamente à resposta correcta. No entanto, quero sublinhar que o professor continua a ser a autoridade na sala de aula, mas de uma forma diferente, ele passa a definir as regras do que é a Matemática e o que significa aprender Matemática na sua sala de aula. Além disso, o professor escolhe as actividades de ensino, escolhe tópicos para discussão, e orquestra as discussões em grupo turma, de tal forma que estas contribuam para a Matemática que se pretende ensinar. Ao fazê-lo, têm de descobrir um equilíbrio entre o "guiar" e o "re(inventar)". Resumidamente, é o professor que molda a inovação curricular que está aqui implícita. Por isso, argumento que a necessidade de investigação e de construção de sequências de ensino, não deve resultar num modelo tradicional de RDD (investigação, desenvolvimento e difusão ou disseminação). Em vez disso, devemos ter como objectivo o tipo de inovação que Paulo Abrantes iniciou vários anos atrás em Portugal, um processo no qual os professores, criadores de sequências de ensino, e investigadores colaborem com base numa visão comum.

References

Abrantes, P. (2001). Revisiting the goals and nature of mathematics for all in the context of a national curriculum. In M.v.d. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME 25@NL*. Utrecht: Freudenthal Institute, 1, 25-40.

Beishuizen, M. (1993). Mental strategies and materials or models for addition and subtraction up to 100 in Dutch second grades. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(4), 294-323.

Bereiter, C. (1985). Towards a solution of the learning paradox. *Review of Educational Research*, *55*, 201-226.

Brown, J. S., & Van Lehn, K. (1982). Towards a generative theory of 'bugs'. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 117-135). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Cobb, P. (1989). *Reconstructing elementary school mathematics*. Paper presented at a conference of the Research Council for Diagnostic and Prescriptive Mathematics.

Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *23*(1), 2-33.

Davis, Ph., & Hersh, R. (1986). *Descartes' dream*. Boston: Houghton Mifflin.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.

Galen, F. van, K. Gravemeijer, J. M. Kraemer, A. Meeuwisse, & W. Vermeulen (1985). *Rekenen in een tweede taal (Mathematics in a second language)*. Enschede: Institute for Curriculum Development, SLO.

Gravemeijer, K. P. E. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht: CDbeta Press.

Gravemeijer, K., McClain, K., & Stephan, M. (1998). Supporting students' construction of increasingly sophisticated ways of reasoning through problem solving. In A. Olivier& K. Newstead (Eds.) *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 194-209.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(2), 155-177.

Gravemeijer, K. (2004). Learning trajectories and local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 105-128.

Labinowics, E. (1985). *Learning from children.* Amsterdam: Addison Wesley.

Meira, L. (1995). The microevolution of mathematical representations in children's activities. *Cognition and Instruction, 13*(2), 269-313.

Resnick, L. B., & Omanson, S.F. (1987). Learning to understand arithmetic. In R. Glaser (Eds.), *Advances in instructional psychology,* 3. London: Lawrence Erlbaum.

Stephan, M., Bowers, J., Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2004). Supporting students' development of measuring conceptions: Analyzing students' learning in social context. *Journal for Research of Mathematics Education,* Monograph 12.

Treffers, A. (1991). Meeting innumeracy at primary school. *Educational Studies in Mathematics, 22*(4), 333-353.

Whitney, H. (1985). Taking responsibility in school mathematics education. In. L Streefland (Eds.), *Proceedings of the 9th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 2,* Utrecht: OW&OC.

Van Hiele, P.M. (1973). *Begrip en inzicht*. Purmerend: Muusses.