

# Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal<sup>1</sup>

João Pedro da Ponte

[jponte@fc.ul.pt](mailto:jponte@fc.ul.pt)

*Grupo de Investigação DIF – Didáctica e Formação  
Centro de Investigação em Educação e Departamento de Educação  
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa*

## RESUMO

Tomando como base o conceito de investigação como a procura de respostas fundamentadas e rigorosas para as nossas próprias questões, este artigo analisa o trabalho realizado neste campo no ensino da Matemática em Portugal. Num primeiro momento analisa, em termos conceptuais, em que consiste esta perspectiva e discute as suas possíveis fontes de legitimidade, na Epistemologia da Matemática e na evolução curricular. Num segundo momento analisa os resultados dos estudos efectuados no terreno referentes à aprendizagem dos alunos, à actividade dos professores e à sua formação. O artigo evidencia a existência de muitos estudos comprovando o valor educacional e formativo desta perspectiva, mas também a existência de lacunas e pontos em aberto, relativos, em especial, à ancoragem deste conceito na matemática pura ou aplicada e à integração e gestão curricular.

**Palavras-chave:** Investigações matemáticas, Currículo, Aprendizagem, Conhecimento profissional, Formação inicial, Formação contínua

## ABSTRACT

Based in the concept of investigation as the search for articulated and rigorous answers to our own questions, this article analyses the work carried out in this field in mathematics education in Portugal. In a first part, it analyses, in conceptual terms, this perspective and discusses its possible sources of legitimacy, in the epistemology of mathematics and in the evolution of the mathematics curriculum. In a second part, it analyses the results of the studies carried out in the field concerning pupils' learning, the activity of teachers and teacher education. The article points out the existence of many studies assuring the educational and formative value of this perspective, but also the existence of gaps and open questions, concerning, most specially the connection of this concept in pure or applied mathematics and curriculum integration.

## RÉSUMÉ

Supporté pour le concept de recherche comme la demande de réponses fondées et rigoureuses pour nos questions, cet article analyse le travail amené dans ce champ dans l'enseignement des mathématiques au Portugal. Dans un premier moment il analyse, en termes conceptuels, le contenu de cette perspective et discute ses possibles sources de légitimité, dans l'épistémologie des mathématiques et dans l'évolution du curriculum. Dans un second moment il analyse les résultats des études faits au terrain sur l'apprentissage des élèves, l'activité des maîtres et sa formation. L'article met en évidence l'existence de beaucoup d'études assurant le valeur éducationnel et formatif de cette perspective, mais aussi l'existence de lacunes et questions ouvertes, relatifs, surtout, à la liaison de ce concept au mathématiques pures ou appliqués et à l'intégration dans le curriculum.

---

<sup>1</sup> Uma versão preliminar deste artigo foi revista por Joana Brocardo, Leonor Santos e José Manuel Matos, cujas críticas e comentários muito contribuíram para melhorar a versão final.

## Introdução

Realizamos uma investigação quando formulamos as nossas próprias questões e procuramos responder-lhes, de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso. Em contextos de ensino, aprendizagem ou formação, investigar não significa necessariamente lidar com problemas na fronteira do conhecimento nem com problemas de grande dificuldade. Significa, apenas, trabalhar a partir questões que nos interessam e que se apresentam inicialmente confusas, mas que conseguimos clarificar e estudar de modo organizado.

Numa investigação matemática, parte-se de uma questão muito geral ou de um conjunto de informações pouco estruturadas a partir das quais se procura formular uma questão mais precisa e sobre ela produzir diversas conjecturas. Depois, testam-se essas conjecturas, algumas das quais, perante contra-exemplos, poderão ser desde logo abandonadas. Outras, sem se revelarem inteiramente correctas, poderão ser aperfeiçoadas. Neste processo, por vezes formulam-se novas questões e abandonam-se, em parte ou no todo, as questões iniciais. As conjecturas que resistirem a vários testes vão ganhando credibilidade, estimulando a realização de uma prova que, se for conseguida, lhes conferirá validade matemática.

Actividades de natureza investigativa, exploratória ou aberta têm vindo a ganhar uma visibilidade crescente nos currículos escolares, em particular na disciplina de Matemática. No nosso país, particularmente nos últimos anos, a noção de investigação matemática no contexto da sala de aula e da formação de professores constitui o tema central de diversos projectos de investigação e teses de mestrado e doutoramento em Didáctica da Matemática e tem sido discutida em numerosos encontros. Justifica-se, portanto, uma análise crítica sobre o que se pode inferir, a partir do trabalho realizado, relativamente ao alcance desta perspectiva curricular.

A noção de investigação matemática, como conceito educativo, enfrenta dois desafios, um de natureza conceptual e outro de natureza empírica. Em termos conceptuais, importa analisar em que consiste esta perspectiva e como se distingue de outras perspectivas semelhantes, como a resolução de problemas. Importa analisar, ainda, quais as suas possíveis fontes de legitimidade, ou seja, as premissas em que pode

assentar a sua justificação. Analisaremos sobretudo duas fontes de legitimidade conceptual: a Epistemologia da Matemática e a evolução curricular. Daremos também atenção às potencialidades que são atribuídas a esta proposta curricular.

No que se refere à vertente empírica, procuraremos analisar o que nos dizem os estudos efectuados no terreno sobre os efeitos que a realização de investigações matemáticas pode ter na promoção da aprendizagem dos alunos, sobre a sua possível adequação às condições de trabalho e formação dos professores e sobre a sua eventual viabilidade no seio do próprio sistema educativo. Assim, estas actividades levam os alunos a desenvolver novas capacidades e adquirir novos conhecimentos? Isso não prejudica a sua aprendizagem nos restantes objectivos curriculares? E que impacto tem o trabalho em investigações matemáticas nas suas atitudes e concepções relativamente à Matemática? Os professores aceitam bem a ideia de propor aos seus alunos a realização de investigações matemáticas? Que dificuldades manifestam para preparar e conduzir aulas nesta perspectiva? E na avaliação dos alunos? De que formação necessitam para concretizar esta perspectiva curricular e como poderá essa formação ser realizada? O sistema educativo tem condições para que uma proposta curricular desta natureza assuma um papel proeminente, ou o máximo que se pode esperar é que ela possa existir apenas em nichos ecológicos especiais, constituídos por bolsas de professores inovadores?

O presente artigo propõe-se discutir estas questões, tendo por base o trabalho realizado no nosso país. Numa primeira etapa analisamos as questões de ordem conceptual, para numa segunda etapa nos debruçarmos sobre os trabalhos empíricos. Concluimos com uma discussão sobre pontos em aberto neste domínio.

### **Investigar em Matemática**

Investigar é procurar conhecer o que não se sabe. Com um significado muito próximo, senão equivalente, temos em português os termos “pesquisar” e “inquirir”. Em inglês, existem igualmente diversos termos com significados relativamente próximos para designar esta actividade: *research*, *investigate*, *inquiry*, *enquiry*. O termo “investigação” pode ser usado numa variedade de contextos, falando-se, por exemplo, de investigação científica, investigação jornalística, investigação criminal, investigação sobre as causas

de um acidente (caso em que se usa também o termo “inquérito”). Por vezes, fala-se em investigação para representar uma actividade relativamente simples de procura de informação, por exemplo, fazer uma investigação ou pesquisa na Internet. Neste artigo assumimos que a noção de investigação envolve actividades de complexidade variável, realizadas tanto por profissionais – os “investigadores” – como pelas pessoas em geral, na sua vida de todos os dias.

### **A investigação vista pelos matemáticos**

Para os matemáticos profissionais, investigar é descobrir relações entre objectos matemáticos conhecidos ou entre estes e novos objectos matemáticos, procurando identificar e comprovar as respectivas propriedades. Henri Poincaré (1996), um dos grandes matemáticos do início do século XX, deixou-nos uma descrição sobre o modo como tentava demonstrar a impossibilidade de existência de funções com um certo tipo de características. Acabou por provar exactamente o contrário, concluindo que essas funções existem, sob diversas formas, e baptizou-as de “funções fuchsianas”.

Segundo o seu relato, essa investigação desenrolou-se em três fases bem distintas: uma primeira fase de compilação de informação e experimentação, sem produzir resultados palpáveis, seguida de uma fase de iluminação súbita e, finalmente, de uma terceira fase de sistematização e verificação dos resultados.

Havia já quinze dias que me esforçava por demonstrar que não podia existir nenhuma função análoga às que depois vim a chamar funções fuchsianas. Estava, então, na mais completa ignorância; sentava-me todos os dias à minha mesa de trabalho e ali permanecia uma ou duas horas ensaiando um grande número de combinações e não chegava a nenhum resultado. Uma tarde, contra meu costume, tomei um café preto e não consegui adormecer; as ideias surgiam em tropel, sentia como me escapavam até que duas delas, por assim dizer, se encaixaram formando uma combinação estável. De madrugada tinha estabelecido a existência de uma classe de funções fuchsianas, as que derivam da série hipergeométrica. Não tive mais que redigir os resultados, o que apenas me levou algumas horas.

Quis, em continuação, representar estas funções pelo quociente de duas séries: esta ideia foi completamente consciente e deliberada, era guiado pela analogia com as funções elípticas. Perguntava a mim mesmo quais seriam as propriedades destas séries, se é que existiam, e logrei sem dificuldade formar as séries que chamei tetafuchsianas. (p. 9)

O que torna particularmente interessante o relato de Poincaré é que o momento-chave desta descoberta surgiu de modo completamente inesperado, ao procurar adormecer,

sugerindo que o inconsciente desempenha um papel de grande relevo no trabalho criativo dos matemáticos. No entanto, nem todas as descobertas ocorrem por esta via. O estabelecimento da existência das séries que Poincaré chamou de “tetafuchsianas” resultou já de um trabalho consciente e intencional, guiado pela analogia com outras séries matemáticas já bem conhecidas.

Este autor interroga-se sobre os mecanismos que presidem a essa actividade inconsciente, acabando por concluir que devem estar associados a um sentido de apreciação estética da beleza das relações matemáticas:

Quais são os entes matemáticos a que atribuímos [...] características de beleza e de elegância e que são susceptíveis de desencadear em nós um sentimento de emoção estética? São aqueles cujos elementos estão dispostos harmoniosamente, de forma a que a mente possa sem esforço abraçar todo o conjunto penetrando em todos os seus detalhes. Esta harmonia é simultaneamente uma satisfação para as nossas necessidades estéticas e um auxílio para a mente que a sustenta e guia. E, ao mesmo tempo, ao colocar perante os nossos olhos um conjunto bem ordenado, faz-nos presentir uma lei matemática... Assim, é esta sensibilidade estética especial que desempenha o papel do “crivo” [...]. (pp. 11-12)

O processo de criação matemática surge aqui fértil em dúvidas e hesitações. Esta perspectiva contrasta fortemente com a visão usual que se tem desta ciência, como um corpo de conhecimento organizado de forma lógica e dedutiva, como um edifício sólido, paradigma do rigor e da certeza absoluta.

Outro matemático famoso, George Pólya (1945), chama-nos a atenção para o contraste entre estas duas facetas da Matemática: “a Matemática tem duas faces; é a ciência rigorosa de Euclides, mas é também algo mais... A Matemática em construção aparece como uma ciência experimental, indutiva. Ambos os aspectos são tão antigos quanto a própria Matemática” (p. vii). A mesma ideia é sublinhada pelo matemático português Bento de Jesus Caraça (1958):

A Ciência pode ser encarada sob dois aspectos diferentes. Ou se olha para ela tal como vem exposta nos livros de ensino, como coisa criada, e o aspecto é o de um todo harmonioso, onde os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições. Ou se procura acompanhá-la no seu desenvolvimento progressivo, assistir à maneira como foi *sendo elaborada*, e o aspecto é totalmente diferente — descobrem-se hesitações, dúvidas, contradições, que só um longo trabalho de reflexão e apuramento consegue eliminar, para que logo surjam outras hesitações, outras dúvidas, outras contradições (...) Encarada assim, aparece-nos como um organismo vivo, impregnado de *condição humana*, com as suas forças e as suas fraquezas e

subordinado às grandes necessidades do homem na sua luta pelo *entendimento* e pela *libertação*; aparece-nos, enfim, como um grande capítulo da vida humana social. (p. xiii)

A ideia que os alunos podem envolver-se na realização de investigações matemáticas e que isso é um poderoso processo de construção do conhecimento é sustentada por matemáticos de renome internacional:

[Os alunos podem ter] um sabor da Matemática em construção e do trabalho criativo e independente... [Eles podem] generalizar a partir da observação de casos, [usar] argumentos indutivos, argumentos por analogia, reconhecer ou extrair um conceito matemático de uma situação concreta. (Pólya, 1980, pp. 157 e 101)

Entre o trabalho do aluno que tenta resolver um problema de Geometria ou de Álgebra e o trabalho de criação, pode dizer-se que existe apenas uma diferença de grau, uma diferença de nível, tendo ambos os trabalhos uma natureza semelhante. (Hadamard, 1945, p. 104)

A mesma perspectiva sobre o papel do aluno é subscrita igualmente por diversos matemáticos portugueses:

Um matemático, como um pintor, um poeta ou um músico é um construtor de ideias, formas, cores, palavras e sons. O critério fundamental é a beleza. A capacidade mais determinante é a sensibilidade e a capacidade de observação. Todo o processo criativo passa por uma atitude inicial de observação e experimentação. Não será verdade também na aprendizagem? (Ramos, 1997, p. 7)

Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo. Só assim se pode realmente dominar os conhecimentos adquiridos. Só assim se pode ser inundado pela paixão “detectivesca” indispensável à verdadeira fruição da Matemática. Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles. (Braumann, 2002, p. 5)

José Sebastião e Silva, por muitos considerado o maior matemático português de todos os tempos, afirmou: “os alunos não precisam, em geral, de ser investigadores, mas precisam de ter espírito de investigação” (citado em Malonek, Silva e Costa, 2002, p. 107).

### Processos usados numa investigação matemática

Como indicam Ponte, Ferreira, Varandas, Brunheira e Oliveira (1999), a realização de uma investigação matemática envolve quatro momentos principais. O primeiro momento envolve o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente, o último, diz respeito à argumentação, demonstração e avaliação do trabalho realizado. Cada um deles pode incluir diversas actividades como se indica na figura 1.

<i>Momentos de uma investigação</i>	<i>Actividades</i>
Exploração e formulação de questões	Reconhecer uma situação problemática Explorar a situação problemática Formular questões
Formulação de conjecturas	Organizar dados Formular conjecturas
Teste e reformulação de conjecturas	Realizar testes Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	Justificar uma conjectura Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Figura 1 – Momentos na realização de uma investigação

Muitas vezes, estes momentos surgem de modo desordenado: a conjectura inicial aparece em simultâneo com a formulação das questões, o teste de uma conjectura pode levar à formulação de novas questões, etc. O exemplo referido por Poincaré ilustra bem esta não linearidade do processo investigativo. Notemos que este matemático conjecturou inicialmente que não existiam funções com as características que procurava. Mais tarde, negou esta conjectura, formulando a conjectura contrária, segundo a qual tais funções deviam existir. O modo de verificar essa conjectura surgiu-lhe inesperadamente, mas a demonstração completa só foi realizada numa fase posterior.

Desenvolvendo-se ao longo de vários momentos, uma investigação matemática envolve a realização de diversos tipos de inferências. Paulo Oliveira (2003) aponta quatro tipos principais de pensamento inferencial que podem intervir nesta actividade. Indica, em primeiro lugar, a *indução* que, na perspectiva de Bacon, consiste na afirmação, para toda uma classe de seres, de uma propriedade atribuída a, pelo menos, um deles. Em segundo lugar, surge a *dedução*, o modo como o conhecimento matemático é usualmente organizado e apresentado publicamente. Em terceiro lugar, vem a *abdução*, uma forma de inferência que, na linha de Pierce e Hanson, parte de um fenómeno que se observou para uma hipótese explicativa. E, finalmente, indica o *pensamento transformativo*, segundo o qual as nossas representações dos objectos matemáticos são transformadas através de processos dinâmicos. Para este autor:

Tradicionalmente, as inferências de tipo dedutivo, que predominam na Matemática formal (i.e., já “feita”), relegam qualquer outro tipo de inferência para um papel secundário. No entanto, numa perspectiva investigativa, em que o conhecimento matemático ainda está a ser gerado, o pensamento dedutivo articula-se com outros tipos de pensamento inferencial, nomeadamente, o indutivo, o abductivo e o transformativo. (2003, p. 26)

O desafio educativo que a linha de trabalho que se discute neste artigo se propõe estudar é saber (i) em que medida um trabalho análogo de formulação de questões, elaboração de conjecturas, teste, refinamento das questões e conjecturas anteriores, demonstração e comunicação dos resultados aos seus pares, está ao alcance dos alunos na sala de aula de Matemática e (ii) em que medida os professores se mostram receptivos relativamente a esta perspectiva e capazes de a concretizar com sucesso na sua prática profissional.

### **As investigações como tarefas matemáticas**

Na sala de aula, os professores de Matemática podem propor tarefas de natureza muito diversa. Se o objectivo é que os alunos realizem investigações matemáticas, importa analisar o modo como estas tarefas se distinguem de outras bem conhecidas, como exercícios e problemas.

Uma clara distinção entre exercício e problema foi formulada por Pólya (1945). Para este autor, um problema é uma questão para a qual o aluno não dispõe de um método imediato de resolução, ao passo que um exercício pode ser resolvido usando um método ou algoritmo já conhecido. Os exercícios podem ser mais fáceis ou mais difíceis, requerendo, por exemplo, a aplicação de vários métodos. Os problemas também podem

ter um grau de dificuldade maior ou menor. Em vez de uma dicotomia, é vantajoso considerar um *continuum* entre exercício e problema e ter presente que o seu interesse educativo não depende só do seu grau de dificuldade mas de muitos outros factores.

Há uma característica comum aos exercícios e problemas – em ambos os casos o enunciado indica claramente o que é dado e o que é pedido, sem quaisquer ambiguidades. O professor sabe de antemão a solução e a resposta apresentada pelo aluno ou está certa ou está errada. Numa investigação é diferente. O ponto de partida é uma situação aberta, ou seja, a questão não está completamente definida, cabendo a quem investiga um papel fundamental na sua concretização. Sendo possível concretizar de vários modos os pontos de partida, os pontos de chegada, naturalmente são também diferentes. Ao requerer a participação activa do aluno na própria formulação das questões a estudar, favorecemos o seu envolvimento na aprendizagem.

Qualquer um dos conceitos, exercício, problema, investigação, é sempre relativo ao sujeito a quem é proposto. Uma mesma tarefa pode ser um problema difícil para uma pessoa, que nem sequer compreende o que é pedido, e um exercício trivial para outra, que já a resolveu diversas vezes. Do mesmo modo, para uma dada pessoa, uma certa tarefa pode ser o ponto de partida para uma investigação ou uma situação evocativa de investigações e aprendizagens já realizadas. É com esta noção em mente que devemos olhar para os exemplos indicados na figura 2.

<i>Tarefas matemáticas</i>	<i>Exemplos</i>	<i>Sujeitos</i>
Exercício	Resolve a equação: $2x+23=-3+7x$	Alunos do 8º ano
Problema	Calcular a diagonal de um paralelepípedo rectângulo do qual são conhecidos o comprimento, a largura e a altura. (Pólya, 1945)	Alunos do 8º ano
Investigação	Escreve em coluna os 20 primeiros múltiplos de 5. Repara nos algarismos das unidades e das dezenas. Que observas? E o que acontece com os múltiplos de 4 e de 6? E com os múltiplos de outros números?	Alunos do 5º ano

Figura 2 – Diferentes tipos de questões matemáticas

O conceito de tarefa de investigação pretende assim trazer para a sala de aula o espírito da actividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação dos seus resultados e na sua discussão e argumentação com os colegas e o professor.

Esta perspectiva tem-se confrontado com duas críticas: (i) antes de poder investigar, o aluno tem de aprender os conceitos e procedimentos básicos e (ii) a inserção institucional do matemático e do aluno são de tal modo diferentes que entre eles não é possível estabelecer qualquer paralelo. Veremos, mais adiante, o que a investigação empírica diz sobre estas questões. Assinalemos, apenas, que do ponto de vista teórico é possível rebater ambas as críticas. Na verdade, nada nos diz que as aprendizagens de ordem cognitiva superior, pelo menos a partir de certa altura, não se possam desenvolver em paralelo às aprendizagens elementares, em vez de sequencialmente (Abrantes, 1994). Além disso, o papel das metáforas é precisamente o de estabelecer relações entre domínios à primeira vista afastados, sem com isso pretender que eles sejam totalmente idênticos. A História da Matemática mostra como esta ciência tem sido desenvolvida por pessoas nos mais diversos papéis institucionais, que vão da dedicação exclusiva à simples actividade amadora. Sendo a curiosidade e o gosto por perceber a força determinante da actividade investigativa, não será razoável circunscrever essa actividade apenas a alguns grupos sociais (os “investigadores profissionais”). Podemos alargá-la aos seres humanos em geral, incluindo alunos e professores.

### **As investigações matemáticas como proposta curricular**

#### **A evolução do currículo: Do cálculo às capacidades de ordem superior**

O currículo de Matemática sofreu uma significativa evolução na segunda metade do século XX. Como referem Ponte, Boavida, Graça e Abrantes (1997), durante muito tempo, previamente à sua entrada na universidade, os alunos estudavam Aritmética, Geometria e Álgebra. Assim, em meados do século passado, a Aritmética (quatro

operações básicas com números inteiros e fraccionários) começava a ser ensinada na escola primária. Nos primeiros anos do liceu, estudava-se um pouco mais de Aritmética (números negativos e irracionais), iniciava-se o estudo da Álgebra (polinómios e equações) e abordava-se a Geometria à maneira dos *Elementos* de Euclides. No final do ensino liceal, continuava-se com a Álgebra e estudava-se Geometria Analítica, Trigonometria e Aritmética Racional.

Os programas pouco mais eram que uma lista de conteúdos a tratar. Em todos os níveis, a grande ênfase do ensino era o treino das técnicas de cálculo. Ao cálculo numérico seguia-se o cálculo com expressões algébricas, as regras de derivação e a resolução de equações trigonométricas, culminando com os laboriosos cálculos com logaritmos. A própria Geometria Analítica prestava-se à realização de exercícios de cálculo como determinação de distâncias, intersecção e posições relativas de rectas, de rectas e circunferências, etc. Apesar do ensino da Matemática em Portugal ser essencialmente orientado para a aprendizagem do cálculo, eram muitas as críticas que sublinhavam a reduzida competência dos alunos neste campo (Ponte, Matos e Abrantes, 1998). O mesmo se passava em muitos outros países.

Como indicam Ponte *et al.* (1997), o ensino universitário começou a sofrer mudanças significativas, com a introdução de novos temas da investigação matemática, como Álgebra Abstracta, Topologia, Teoria das Probabilidades, Teoria dos Conjuntos e Lógica Matemática. Os grandes êxitos científicos e tecnológicos e a nova ordem mundial do pós-guerra originaram uma assinalável euforia entre os cientistas, levando-os a contestar, de modo cada vez mais enérgico, o crescente fosso entre os conhecimentos ministrados aos alunos no ensino liceal e os conhecimentos que consideravam que estes deviam ter no início dos estudos superiores. No final dos anos 50, após o lançamento do primeiro satélite artificial pela União Soviética, intensificou-se a pressão para a modernização do ensino da Matemática e das Ciências. A nova abordagem da Matemática escolar deveria apresentar esta disciplina de um modo unificado, recorrendo à linguagem dos conjuntos e privilegiando o papel das estruturas matemáticas. Argumentavam os proponentes que, por um lado, isso correspondia à própria essência da Matemática e que, por outro lado, era consistente com as investigações psicológicas sobre o desenvolvimento cognitivo da criança.

Inicia-se então o movimento da Matemática moderna. Este movimento procurou usar conceitos e processos unificadores para enquadrar os diversos tópicos escolares, introduziu novos tópicos vistos como relevantes e eliminou alguns dos tópicos tradicionais, considerados obsoletos. Pretendia-se proporcionar aos alunos uma melhor compreensão das ideias matemáticas e, ao mesmo tempo, melhorar as suas competências de cálculo. Argumentava-se que as dificuldades destes resultavam, em grande medida, de não relacionarem os diversos conceitos. O estudo das estruturas unificadoras e o uso de uma linguagem comum poderiam ter, nesta perspectiva, uma influência benéfica no próprio domínio do cálculo.

De acordo com Ponte *et al.* (1997), conjuntos, relações binárias, estruturas matemáticas e lógica passaram a desempenhar um forte papel nos programas. O conceito de função numérica foi colocado em segundo plano, adquirindo proeminência a noção mais geral de aplicação. A trigonometria deixou de ser um assunto autónomo, passando a ser estudada como parte da análise infinitesimal, com uma abordagem algébrica em vez de geométrica. A Geometria Analítica quase desapareceu, sendo substituída pela iniciação à Álgebra Linear. Introduziram-se noções elementares de Estatística e de Teoria das Probabilidades. A Matemática moderna não se limitou a mudanças ao nível dos conteúdos. Também se preocupou com os métodos a usar, defendendo-se o ensino “por descoberta”. Vários autores argumentavam que os alunos deviam ter um papel tanto quanto possível activo na redescoberta dos conceitos.

Em Portugal, a Matemática moderna conheceu dois períodos distintos. Nos anos 60, teve uma fase experimental, conduzida por José Sebastião e Silva, em turmas especiais do 3º ciclo do ensino liceal. A partir dos anos 70, deu-se a sua generalização aos alunos de todos os níveis de ensino, sendo elaborados novos programas e novos manuais escolares. Esses programas, com pequenos reajustamentos após o 25 de Abril, acabaram por vigorar até 1991. Como indicam Ponte *et al.* (1997), no nosso país, o treino do cálculo com expressões algébricas e a prática de exercícios artificiosos com limites e derivadas, nunca chegaram a perder por completo o seu lugar. Em vez de uma substituição da Matemática tradicional pela Matemática moderna, verificou-se a integração das duas.

Desde muito cedo foram feitas críticas à Matemática moderna (e.g., Ahlfors *et al.*, 1962). O simbolismo carregado e a ênfase em estruturas abstractas revelavam-se, afinal,

de difícil compreensão para os alunos. A preocupação com o rigor de linguagem dava origem a novos tipos de exercícios, muitas vezes estéreis e irrelevantes. E, o que era pior, as competências dos alunos no raciocínio, na resolução de problemas e no próprio cálculo não mostravam progressos. Nos Estados Unidos da América verificou-se mesmo um declínio dos resultados dos alunos nos testes de admissão à universidade. No início dos anos 70 explodia, em diversos países, um movimento de revolta contra a Matemática moderna conhecido por *back to basics*. Começou a reclamar-se um regresso à ênfase nas competências básicas e ao estabelecimento de níveis de competência mínima em exames para passagem de ano e para concessão do diploma final do ensino secundário.

Este movimento não chegou a ter expressão no nosso país. É verdade que encontramos recomendações de reforço do ensino das competências de cálculo em estudos sobre o desempenho dos alunos portugueses feitos no final dos anos 70 (Ponte, Matos e Abrantes, 1998). Mas também é verdade que, apesar da enorme importância que ganhou o tema da Lógica, o estudo dos temas de Álgebra e Análise conservou-se com poucas alterações. Entre nós não se verificaram os exageros que ocorreram noutros países e não havia muita razão para reclamar mais atenção às competências de cálculo porque elas nunca deixaram de estar no centro das atenções, constituindo o elemento fundamental dos exames, nomeadamente do 12º ano (Ponte *et al.*, 1997).

O movimento *back to basics* encontrou forte oposição, logo desde o seu início, da parte dos educadores matemáticos. Estes argumentavam que as competências básicas em Matemática não se limitam ao simples domínio do cálculo mas incluem outros aspectos, entre os quais a resolução de problemas (NCSM, 1976). Com base nesta ideia, a partir dos anos 80, começa a desenvolver-se um novo movimento de reforma do ensino desta disciplina. O seu início é marcado pelo surgimento da *Agenda for action* do NCTM (1980), onde se proclama que a resolução de problemas deve ser o foco da Matemática escolar. Outra publicação importante é *Mathematics counts* (Cockcroft, 1982), que propõe a diversificação das actividades de aprendizagem, com relevo, igualmente, para a resolução de problemas. Posteriormente, surgiram muitos outros documentos em que a resolução de problemas ocupa um lugar de relevo. De entre todos, é de destacar as *Normas para o currículo e avaliação da matemática escolar*, também do NCTM (1991). Traduzido em diversas línguas, entre as quais o português, este documento

salienta que o principal objectivo da disciplina de Matemática é levar o aluno a desenvolver o seu “poder matemático”.

A resolução de problemas está na base das novas orientações curriculares que se afirmam nas décadas de 80 e 90 no panorama internacional e que influenciaram fortemente os programas portugueses de 1991. Esta noção, embora frequente na literatura educacional desde o início do século, foi teorizada e aprofundada por Pólya (1945) como um aspecto essencial da actividade matemática. A ideia fundamental deste autor é que, para aprender Matemática, não basta ao aluno fazer exercícios. É preciso desafiá-lo com problemas interessantes, de modo a ter uma experiência matemática genuína, semelhante à dos matemáticos.

A resolução de problemas assume assim o papel de conceito curricular fundamental. No entanto, acabou por se constatar que os problemas a propor podem ser de muitos tipos, estando longe de terem todos o mesmo interesse educacional (Abrantes, 1988). Uma análise das potencialidades dos diferentes tipos de problemas levou a um interesse cada vez maior pelas questões abertas, susceptíveis de dar origem a actividades de investigação matemática por parte dos alunos.

Neste período, as novas tecnologias começam a assumir também uma importância muito significativa no currículo. O uso da calculadora e do computador podem alterar fortemente o ensino de diversos conceitos, possibilitando uma abordagem experimental, em que os alunos exploram conceitos e situações matemáticas. O surgimento destas tecnologias nas escolas – sobretudo nas mãos dos alunos – favoreceu, igualmente, o desenvolvimento de uma perspectiva investigativa no currículo de Matemática (Ponte, 1995).

Tanto a resolução de problemas como as investigações apelam à imaginação e à criatividade, requerendo capacidades que se situam muito para além do cálculo e da memorização de definições e procedimentos. Estas capacidades, frequentemente designadas de “ordem superior”, surgem associadas à comunicação, ao espírito crítico, à modelação, à análise de dados, às demonstrações e a outros processos de natureza metacognitiva (Abrantes, 1994). A ênfase neste tipo de capacidades apoia-se em muitos argumentos, desde os que sublinham o seu papel formativo no desenvolvimento intelectual do indivíduo e na sua preparação para uma cidadania crítica e consciente, até

aos de cunho utilitário, relacionados com as possíveis necessidades matemáticas dos empregos do futuro.

### **O conceito de investigação no currículo de vários países**

A referência à realização de actividades de investigação pelos alunos, na aula de Matemática está presente de um ou outro modo, no currículo de numerosos países. Este ponto analisa o que dizem a este respeito os documentos oficiais e outra literatura curricular nos Estados Unidos da América, Inglaterra, França e Portugal.

*Estados Unidos da América.* Não existindo neste país um currículo nacional, analisamos documentos programáticos como as Normas para o currículo e avaliação em matemática escolar (NCTM, 1991), as Normas profissionais para o ensino da matemática (NCTM, 1994) e os Principles and standards for school mathematics (NCTM, 2000). Estes documentos representam a visão do National Council of Teachers of Mathematics acerca do que os alunos devem aprender nesta disciplina.

Na perspectiva das *Normas para o currículo e avaliação*, o grande objectivo do ensino da Matemática é ajudar todos os alunos a desenvolver o seu “poder matemático” e, para isso, os professores devem envolvê-los na formulação e resolução de uma grande diversidade de problemas, na construção de conjecturas e de argumentos, na validação de soluções e na avaliação da plausibilidade das afirmações matemáticas. Este objectivo vale para todos os alunos e não apenas para aqueles que são considerados “brilhantes”. O documento defende que as boas tarefas são aquelas que não separam o pensamento matemático dos conceitos ou aptidões matemáticas e que apelam para a resolução de problemas, para a investigação e exploração de ideias e para a formulação, teste e verificação de conjecturas.

As *Normas profissionais* são mais explícitas em relação às actividades de investigação quando afirmam que “a verdadeira essência do estudo da Matemática é precisamente uma actividade de exploração, de formulação de conjecturas, de observação e de experimentação” (p. 97). Este documento afirma também que o “espírito de investigação deve estar presente em todo o ensino e aprendizagem da Matemática” (p. 117).

Mais recentemente, nos *Principles and standards for school mathematics*, o NCTM (2000) sublinha a importância de os alunos aprenderem Matemática com compreensão.

Para isso, considera que “as tarefas matemáticas válidas devem ser intrigantes, com um nível de desafio que convida à especulação e ao trabalho árduo” (p. 19).

Embora o termo “investigação matemática” raramente apareça nestes documentos, a ideia está implicitamente presente na importância que é dada à formulação de problemas, à produção e teste de conjecturas, à argumentação e validação e ao próprio processo de “pensar matematicamente”.

**Inglaterra.** Neste país as tarefas de investigação têm uma considerável tradição curricular. No início dos anos 80, já se lia em documentos governamentais (Cockcroft, 1982) que “o ensino da Matemática deve incluir oportunidades para trabalho de investigação” (ponto 243), tendo esta perspectiva assumido um carácter oficial em finais dessa década. O *National curriculum* de Matemática para Inglaterra e País de Gales (DFE, 1995), publicado alguns anos mais tarde, refere que os alunos, entre os 5 e 11 anos, “deverão ser capazes de entender e investigar afirmações gerais assim como investigar casos particulares” (p. 2). Para alunos entre os 11 e os 16 anos, o currículo aponta que eles devem ter “oportunidades de usar e aplicar a Matemática em tarefas práticas, em problemas da vida real e em problemas puramente matemáticos; trabalhar em problemas que constituam um desafio; encontrar e considerar diferentes linhas de argumentação matemática” (p. 11). Nas sucessivas reformulações a que o currículo inglês tem sido sujeito (DFE, 1998) estas ideias continuam presentes. Assim, entre os objectivos para os alunos de 5-7 anos, surge o de colocar questões do tipo “o que acontece se” e “compreender afirmações gerais (...) e investigar se elas se verificam em casos particulares”. Para os alunos de 7-11 anos, surge de novo “compreender e investigar afirmações gerais” e para os alunos de 11-14 e 14-16 anos aparece como objectivo “compreender afirmações gerais, levando à realização e teste de generalizações; reconhecer exemplos particulares, e apreciar a diferença entre uma explicação matemática e evidência experimental” (p. 11).

**França.** O ensino secundário neste país inicia-se com a *Classe de Seconde* (correspondente ao 10º ano em Portugal), que faz parte do ensino obrigatório, e prossegue com as *Classes de Première* e *Terminale*, divididas em diversos ramos. Os programas em vigor foram estabelecidos entre Abril de 1990 e Maio de 1997 (Ministère de l'Éducation Nationale, de la Recherche et de la Technologie, 1997). O programa da *Classe de Seconde* indica ser sua intenção “habituar os alunos à prática do trabalho

científico, desenvolvendo conjuntamente as capacidades de experimentação e de raciocínio, de imaginação e análise crítica” (p. 13). A resolução de problemas é indicada como “objectivo essencial”, na sequência do que acontece no chamado *Collège*, o ciclo de ensino anterior (p. 16). Orientações idênticas surgem nos programas da *Classe de Première* e da *Classe de Terminale*.

No que respeita à organização do trabalho na aula, os programas da *Classe de Seconde* apontam entre os seus objectivos principais:

Habituar os alunos à actividade científica e promover a aquisição de métodos: a aula de Matemática é antes de mais um lugar de descoberta, de exploração de situações, de reflexão e de debate sobre as estratégias seguidas e os resultados obtidos, de síntese que proporcione claramente algumas ideias e métodos essenciais, indicando o respectivo valor. (p. 16)

Verificamos, deste modo, uma assinalável importância da ideia de investigação, como núcleo central da actividade científica, nos grandes objectivos e orientações dos programas franceses da disciplina de Matemática. Esta importância não se torna, no entanto, muito evidente no corpo dos programas, estruturados essencialmente em torno dos conteúdos matemáticos.

**Portugal.** No nosso país, os currículos de Matemática do 2º e 3º ciclos do ensino básico presentemente em vigor (publicados em 31 de Julho de 1991), encontram-se algumas referências directas ou indirectas a tarefas de natureza investigativa e/ou a desempenhos típicos dos alunos neste tipo de tarefas. Assim, nos programas do 2º ciclo do ensino básico (Ministério de Educação, 1991a) afirma-se que:

- O estudo do tema Geometria deverá assentar “em actividades que permitam aos alunos manipular, observar, comparar, descobrir, construir, traçar (...) é necessário que o aluno tenha oportunidade de ensaiar, errar, recomeçar, corrigir” (p. 155);
- Também o estudo do tema Números e Cálculo deverá ter como base a “realização de actividades sugestivas que incentivem os alunos a fazer conjecturas, a querer descobrir, a discutir estratégias...” (p. 158);
- No subcapítulo das orientações metodológicas diz-se que a resolução de problemas “como actividade, estimula o espírito de pesquisa, dando aos alunos oportunidade de observar, experimentar (...) fazer conjecturas, argumentar, concluir e avaliar” (p. 164).

Deste modo, embora não se fale em investigações, refere-se várias vezes a importância da formulação de conjecturas, um dos aspectos mais importantes do processo de

investigação. Significativo é também o destaque dado à criação do espírito de pesquisa (um termo com um significado muito próximo do de “investigação”), bem como o realce dado à argumentação, discussão, descoberta e avaliação. Referências semelhantes encontram-se no programa do 3º ciclo do ensino básico (Ministério de Educação, 1991b).

No programa de Matemática do ensino secundário, publicado mais recentemente (Ministério da Educação, 1997), entre as finalidades da disciplina no ensino secundário surge a seguinte: “desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas, de comunicar, assim como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade” (p. 3). No tópico referente ao desenvolvimento do raciocínio e pensamento científico há uma referência explícita à necessidade do aluno “validar conjecturas” (p. 4). Mais à frente, no capítulo das orientações metodológicas, pode-se ler:

Destaca-se a importância das actividades a seleccionar, as quais deverão contribuir para o desenvolvimento do pensamento científico, levando o aluno a intuir, conjecturar, experimentar, provar, avaliar e ainda o reforço das atitudes de autonomia e de cooperação. (p. 8)

Relativamente aos recursos é referido que o uso de calculadoras gráficas permitirá a “condução de experiências matemáticas, concepção e testagem de conjecturas” (p. 11) e cada aluno deverá realizar “investigação e exploração de várias ligações entre diferentes representações...” (p. 11). Por outro lado, o uso dos computadores, pelas suas potencialidades permitirá “actividades (...) de exploração e pesquisa...” (p. 11). Identificamos, no espaço reservado às indicações metodológicas uma referência explícita a tarefas de investigação: “no estudo das famílias de funções os alunos podem realizar pequenas investigações” (p. 20).

O mais recente documento oficial português, o *Currículo nacional do ensino básico*, refere diversas competências a desenvolver nos alunos, entre as quais raciocinar matematicamente, procurar regularidades, fazer e testar conjecturas e formular generalizações (Ministério da Educação, 2002, p. 57) Este documento dá grande destaque às actividades de investigação como uma das experiências de aprendizagem que devem ser regularmente proporcionadas aos alunos.

Verificamos, assim, que de todos os documentos portugueses, o *Currículo nacional* e os programas do ensino secundário são os que fazem referências mais explícitas à realização de actividades de investigação pelos alunos. Os restantes programas, sem o

indicarem com tanta clareza, apontam também para a importância dos processos matemáticos associados à realização deste tipo de tarefas.

Concluimos, assim, que existe uma forte presença da perspectiva investigativa nos currículos de Matemática de Inglaterra, França e Portugal e também nos documentos programáticos norte-americanos. Esta perspectiva, está presente nas grandes orientações destes programas e documentos, nuns casos de modo mais explícito e noutros de modo mais difuso. O programa francês é muito explícito quando sublinha a iniciação dos alunos à actividade científica, com referência clara ao processo de descoberta. O currículo inglês inclui aspectos directamente relacionados com o trabalho investigativo numa das suas grandes áreas (“*using and applying mathematics*”). Os programas portugueses do ensino básico contemplam indirectamente este trabalho quando se referem à realização de actividades de exploração e pesquisa ou à elaboração de conjecturas pelos alunos e o *Currículo nacional* valoriza-o explicitamente. Os programas do ensino secundário incluem sugestões concretas para a realização deste trabalho.

### **O conceito de investigação na Didáctica da Matemática em Portugal**

O conceito de actividade de investigação na educação matemática portuguesa, remonta aos anos 80, aparecendo inicialmente associado à resolução de problemas. Numa comunicação apresentada num dos primeiros encontros realizados o nosso país sobre o ensino da Matemática, Ponte e Abrantes (1982) apresentavam o conceito de problema como uma “questão em que o estudante não dispõe de nenhum processo rotineiro conhecido para a resolver, mas que lhe excita a curiosidade e o seu desejo de a solucionar” (p. 205). Ao mesmo tempo, aqueles autores afirmavam que ao resolver um problema o estudante “é chamado a uma participação activa. Ele próprio tem de ser o matemático. Tem de ser ele a enfrentar cada nova situação, a pensar por si mesmo, a tomar as suas decisões e a avaliar o trabalho feito” (pp. 201-2). Sem usar explicitamente o termo investigação, sugerem assim que o estudante pode realizar uma actividade comparável à do matemático profissional.

A grande variedade de tarefas que podem ser apresentadas como problemas tornou este conceito algo incómodo para os educadores matemáticos. Procurando contribuir para a sua clarificação, Abrantes (1998) distingue entre sete tipos diferentes de problemas, analisando o respectivo valor educativo. Para ele, entre os problemas mais interessantes

estão as “situações problemáticas” e os “problemas da vida real” – exactamente aqueles que considera serem mais ignorados nas práticas de ensino da Matemática. Nota-se aqui um parentesco entre a ideia de situação problemática e a de actividade de investigação. Na mesma altura, um Seminário, realizado em Vila Nova de Milfontes, que marca um momento fundamental na afirmação de uma perspectiva curricular da educação matemática em Portugal, fala-se tanto em “resolução e formulação de problemas” como em “actividades de exploração, investigação e descoberta” (APM, 1988, p. 43).

Para além do interesse pela resolução de problemas, a década de 80 inaugura igualmente um período de exploração das potencialidades das novas tecnologias de informação e comunicação em relação ao ensino da Matemática – em particular, da linguagem LOGO e da folha de cálculo e, mais tarde, da calculadora gráfica e dos programas de Geometria Dinâmica. Um dos aspectos que mais se salienta é que estas tecnologias – nomeadamente através da construção de micromundos específicos – favorecem uma abordagem exploratória e investigativa no ensino-aprendizagem desta disciplina. É no contexto de micromundos em LOGO que se discutem os conceitos de investigação e de problema, que aparecem estreitamente interligados:

A resolução de problemas é um processo complexo que compreende diversos momentos: a exploração da situação, o reconhecimento da situação como problema, a formulação mais precisa do mesmo, a colocação em marcha de um conjunto de actividades para a sua resolução, a frequente reestruturação das concepções implicadas no problema e a eventual obtenção de uma resposta para o problema. O termo investigação designa esse conjunto de processos. Trata-se de uma estratégia de conhecimento e actuação, que está presente tanto na actividade científica como na prática do quotidiano, variando em cada caso o tipo de problemas colocados e os processos utilizados na sua resolução. (Matos, 1991, p. 46)

No início dos anos 90, o conceito de problema continuava a aparecer como francamente problemático aos educadores matemáticos, como se verifica em diversos textos do I Encontro de Investigação em Educação Matemática, promovido pela Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Assim, Fernandes (1992), ao fazer o ponto da situação sobre a investigação em resolução de problemas, refere que existem “dificuldades resultantes das interpretações, que variam largamente entre os investigadores, associadas aos conceitos mais utilizados em resolução de problemas” (p. 45), entre os quais indicava o próprio conceito de problema. E Boavida (1992) vai ao ponto de afirmar que:

... Se se pretende que a resolução de problemas constitua o foco organizador da educação matemática [é preciso questionar] conceitos, entre os quais estão os próprios termos *problema* e *resolução de problemas* que não são compreendidos do mesmo modo por diferentes autores (itálicos no original). (p. 106)

O conceito de investigação matemática é discutido de modo aprofundado num artigo de Ponte e Matos (1992). De novo, se retoma a ideia que numa investigação “os alunos são colocados no papel dos matemáticos” (p. 239). Para os autores, é o que acontece quando eles procuram compreender uma situação complexa, descobrir padrões, relações, semelhanças e diferenças, de forma a conseguir chegar a generalizações. Na sua perspectiva, as investigações matemáticas incluem uma variedade de situações, desde tarefas complexas que podem levar um certo tempo a resolver, até a questões relativamente simples que surgem na sala de aula. Neste artigo afirma-se que:

As investigações matemáticas têm aspectos comuns com outros tipos de actividades de resolução de problemas. Envolvem processos de raciocínio complexos e requerem um elevado grau de empenhamento e criatividade por parte do aluno. Envolvem, no entanto, também alguns processos característicos. Enquanto os problemas matemáticos tendem a caracterizar-se por assentarem em dados e objectivos bem concretos, as investigações têm um ponto de partida muito menos definido. Assim, a primeira tarefa do aluno é tornar a questão mais precisa, um traço que as investigações matemáticas têm em comum com a formulação de problemas. (p. 239)

Este artigo indica igualmente diversos momentos característicos do processo de investigação matemática, como a definição das questões, a realização de experiências, a formulação e teste de conjecturas e a sua eventual prova. As investigações matemáticas aparecem aqui, pela primeira vez, assumidamente diferenciadas dos problemas. É este conceito de actividade de investigação que irá servir de referência aos estudos que se desenvolveram nos anos 90 em Portugal, em particular no que viria ser o projecto mais significativo nesta área – o *Projecto Matemática para Todos*.

Na perspectiva deste projecto, a integração das actividades de investigação no currículo de Matemática justifica-se por diversas razões:

- Constituem uma parte essencial do trabalho em Matemática, estando intimamente ligadas à natureza da actividade matemática e ao processo de produção de conhecimento nesta disciplina. Para que os alunos desenvolvam uma visão geral da Matemática, é necessário que se envolvam em processos característicos das actividades de investigação, tais como formular problemas, explorar hipóteses, fazer e testar conjecturas, generalizar e provar resultados.

- Favorecem o envolvimento do aluno no trabalho que realiza na aula de Matemática. Sem esse envolvimento, dificilmente o aluno realizará uma aprendizagem significativa.
- Fornecem múltiplos pontos de entrada para alunos de diferentes níveis de competência matemática. Com efeito, uma tarefa de natureza investigativa, na sala de aula, pode ser abordada e desenvolvida de vários modos e em diversos graus de profundidade.
- Estimulam um pensamento globalizante que não se resume à aplicação de conhecimentos ou procedimentos pré-determinados e isolados mas que, pelo contrário, implica normalmente que se relacionem diversos tópicos. Este modo de pensar, característico do raciocínio matemático, representa uma competência essencial nesta disciplina.
- Podem ser inseridas, naturalmente, em qualquer parte do currículo, representando na verdade um tipo de trabalho que tem um carácter transversal na disciplina de Matemática.
- Embora lidando com aspectos complexos do pensamento, reforçam as aprendizagens mais elementares. Estas aprendizagens, aliás, dificilmente se consolidam ou perduram na ausência de processos de pensamento e resolução de problemas que lhes dêem significado. (Abrantes, Ponte, Fonseca e Brunheira, 1999, p. 1)

### **Estudos centrados nos alunos**

Passamos aos estudos empíricos, considerando os que dizem directamente respeito aos alunos. Começamos pelas competências e dificuldades que eles mostram em realizar investigações, incluindo o seu entendimento deste processo e o seu desempenho nas diversas fases do trabalho. De seguida, damos atenção à relação entre o trabalho investigativo e o desenvolvimento de conceitos matemáticos. Em terceiro lugar, analisamos as suas atitudes e concepções relativamente às investigações, à Matemática e ao ensino-aprendizagem. Por fim, consideramos as implicações do trabalho investigativo nas práticas de aprendizagem dos alunos.

### **Competências de investigação e processos usados pelos alunos**

Começamos por considerar o desempenho dos alunos na realização de actividades de investigação. Um estudo que dá indicações a este respeito foi efectuado por Irene Segurado (1998, 2002), numa sua turma do 6º ano de escolaridade, que envolveu a realização de quatro tarefas de investigação, ao ritmo de uma por mês. Segundo a professora, os alunos desenvolveram a sua capacidade de observar, estabelecer relações,

conjecturar, testar, justificar e argumentar, mostrando uma assinalável criatividade. Na terceira tarefa, os alunos revelaram já um certo espírito investigativo, formularam de forma autónoma as suas conjecturas, testaram-nas experimentando vários exemplos e revelaram persistência na procura de novos caminhos quando necessário. Foi, contudo, na realização da última tarefa que se tornou mais evidente que eles começavam a compreender a importância da organização dos dados, da procura de regularidades e padrões, da formulação de conjecturas, da sua validação através de exemplos e da necessidade de defender os seus pontos de vista com argumentos. A autora conclui que

é possível proporcionar a alunos deste nível de escolaridade uma experiência matemática de natureza investigativa. Os alunos conseguem abordar as tarefas e evoluem no sentido de se tornarem confiantes nas suas capacidades, de aumentarem a sua capacidade de resolver e formular problemas e de comunicar e raciocinar matematicamente. (2002, p. 72)

Olívia Sousa (2002) realizou, em colaboração com outra professora, um estudo com base numa investigação estatística com alunos do 6º ano de escolaridade. Este trabalho, que decorreu ao longo de sete sessões (algumas de 90 minutos, outras de menor duração), diferencia-se bastante da maioria dos estudos referidos neste artigo, dado o facto de se tratar de uma investigação extra-matemática, subordinada ao tema: “Quais as características de um aluno típico da minha turma?” A autora indica que a formulação das questões específicas a investigar – tanto a ideia inicial como o seu aperfeiçoamento – foi feita com a colaboração dos alunos. No seu entender, as questões formuladas foram pouco diversificadas, não tendo gerado debates polémicos. A recolha de dados ultrapassou as expectativas das professoras:

Os alunos organizaram-se e, enquanto uns mediam, outros perguntavam, observavam e registavam os dados que iam recolhendo. Ainda antes do final da aula já todos os grupos tinham recolhido os seus dados e a sala estava pronta para a aula seguinte. (p. 86)

A discussão foi particularmente animada quando se discutiram os resultados sobre frequência de alunos louros na turma, manifestamente discrepantes de grupo para grupo. Tornou-se evidente que alguns alunos usaram na recolha de dados um conceito mais alargado e outros um conceito mais restritivo do que se entende por uma pessoa “loura”, tendo-se concluído a necessidade de definir com rigor este tipo de conceito antes de se recolher quaisquer dados.

Um outro estudo foi realizado por Alexandra Rocha (2002), com a sua turma do 7º ano de escolaridade, ao longo do ano, num total de cinco tarefas. A autora indica que a

primeira tarefa de investigação matemática que propôs aos alunos constituiu para eles uma situação completamente nova. À medida que foram realizando tarefas deste tipo, os alunos mostraram compreender de forma progressiva o papel a assumir numa investigação. Segundo a professora,

notou-se que, com o desenrolar do trabalho, os alunos conseguiram um maior domínio de certos processos matemáticos inerentes a esta actividade. Por exemplo, os alunos foram adquirindo uma certa perspicácia e destreza na procura e determinação de padrões e regularidades de números. O desenvolvimento desta competência foi gradual e fez-se sentir durante a realização da tarefa um, um pouco na tarefa três, tendo atingido o seu auge durante a actividade desenvolvida na realização da tarefa cinco. (p. 120)

A professora analisa, também, o desempenho dos alunos nas várias etapas do processo investigativo. Consta que estes sentiram inicialmente dificuldades em formular questões mas, com o tempo, evidenciaram uma evolução significativa – enquanto que, na realização da primeira tarefa, foi preciso o seu apoio, mais tarde já conseguiam formular questões e problemas concretos para investigar. A professora também observou que, de um modo geral, os alunos compreenderam o que é uma conjectura e desenvolveram competência na sua formulação. Refere, ainda, que a formulação de conjecturas surgiu dum modo quase espontâneo e natural durante a realização das tarefas mais abertas que, na sua perspectiva, lhes proporcionaram “momentos de maior criatividade e liberdade” (p. 121). Contudo, apesar de os ter questionado em diferentes momentos com o intuito de provarem as suas conjecturas, a maior parte dos alunos mostrou não perceber a diferença entre verificar uma conjectura para alguns casos e demonstrá-la para todos.

Com base num estudo que envolveu três alunos do 8º ano na realização tarefas de investigação num micromundo construído em LOGO, Ponte e Matos (1992) sugerem que os alunos necessitam de ter duas características fundamentais para trabalhar em tarefas de investigação: por um lado, perspicácia na formulação de objectivos, e, por outro lado, flexibilidade na a escolha, avaliação e mudança de estratégias. Os autores analisam ainda as dificuldades sentidas pelos alunos, que, no seu entender, podem surgir (i) por deficiência de conhecimentos de base, (ii) nos processos de raciocínio, e (iii) no comportamento perante o problema e na sua atitude.

Joana Brocardo (2002) realizou um estudo ao longo de todo um ano lectivo, em colaboração com outra professora, numa turma do 8º ano. Ao todo foram realizadas 13

tarefas de investigação. Reportando-se ao entendimento que os alunos mostram deste tipo de tarefas, a autora indica que eles, inicialmente, tinham tendência para transformar as primeiras experiências de recolha de dados num fim em si mesmo e mostraram alguma dificuldade em entender a investigação como um todo. No entanto, com a experiência continuada de realização de novas tarefas, os alunos passaram a relacionar as observações iniciais e a procurar clarificar o foco da investigação. Deste modo, acabaram por alcançar uma boa compreensão deste tipo de trabalho.

Num estudo realizado no início dos anos 90, Margarida Junqueira (1996) realizou uma experiência de ensino numa turma do 9º ano de escolaridade, de um outro professor, usando um programa de Geometria Dinâmica (*Cabri-Geomètre*). A experiência, que versou a unidade Geometria no Plano, ocupou 24 aulas de 50 minutos. A autora adoptou uma abordagem intencionalmente não directiva. Consta que “de início, a investigação das construções pelos alunos entregues a si próprios revelou-se uma actividade quase sempre aleatória...” (p. 31). Os alunos mostravam-se fascinados pelas múltiplas possibilidades do *software* e demoraram algum tempo até o usarem de forma produtiva. Como diz a investigadora, “os alunos precisaram de considerável orientação e apoio para se habituarem a manipular as construções de forma sistematizada e ordenada e a reflectirem sobre o *feedback* devolvido pelo *software*” (p. 93). A autora conclui que “a proposta de investigação de certas construções de forma muito aberta, sem um objectivo explícito para os alunos, pareceu provocar-lhes alguma insegurança. Apenas se apropriaram dessas actividades quando começaram a descortinar que conclusões poderiam obter” (p. 94). Na verdade, com o decorrer do tempo, a actividade dos alunos foi melhorando de qualidade. Segundo refere a autora, eles começaram por formular conjecturas restritas, isto é, baseadas na observação de um número reduzido de casos, mas a análise de exemplos levou-os ao estabelecimento de conjecturas genéricas.

Helena Fonseca (2000) realizou um estudo com o objectivo de analisar os processos matemáticos utilizados por alunos do 10º ano em tarefas de investigação. A observação incidiu sobre cinco tarefas, realizadas na turma de uma professora que aceitou colaborar. A investigadora conclui que, com o decorrer do tempo, os alunos foram-se envolvendo mais profundamente nas investigações, tornaram-se mais autónomos, passaram a valorizar tanto as respostas como os processos usados e passaram a considerar várias hipóteses de resposta para cada questão. A investigadora indica que o processo de formulação de conjecturas surge com grande frequência e de forma muito

natural e que os processos de justificação e prova têm uma presença mais fraca, raramente surgindo de modo espontâneo. Identifica diversos factores que podem influenciar os processos matemáticos dos alunos: a natureza da tarefa, o material utilizado, a interacção com os colegas, a interacção com o professor e o conhecimento e experiência prévia. A autora conclui, ainda, que as tarefas mais estruturadas podem ajudar os alunos pouco familiarizados com este tipo de trabalho a ter novas ideias, permitindo-lhes avançar mais na investigação, sugerindo que isso pode estar relacionado com o facto de eles precisarem de algumas indicações concretas, pelo menos numa fase inicial. Refere, ainda, que as novas tecnologias se revelaram um bom auxiliar da actividade de investigação e que a interacção com os colegas conduziu à emergência de certos processos, muito embora o trabalho individual também se tenha mostrado produtivo.

Num outro estudo realizado com os seus alunos do 10º ano de escolaridade, Ercílio Mendes (1997) propôs quatro tarefas de investigação, cada uma das quais foi realizada numa aula e discutida na aula seguinte. Segundo o autor, os alunos conseguiram realizar com sucesso as investigações matemáticas, desenvolvendo actividades como manipular, experimentar, conjecturar, argumentar e provar.

Vejamos, mais em pormenor, os resultados da investigação sobre o desempenho dos alunos nas várias fases do trabalho de investigação. Diversos estudos mostram que eles, muitas vezes, não sentem necessidade de explicitar claramente a questão inicial e, outras vezes, mudam sem dar por isso a sua questão de partida, tornando-se confuso, até para eles próprios, saber o que querem investigar (Ponte e Matos, 1992; Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira e Varandas, 1998). No mesmo sentido, Brocardo (2002) refere que os alunos mostram não dar muita importância à explicitação das suas questões, mesmo quando já têm uma experiência razoável na realização de investigações e uma certa compreensão deste processo.

Em contrapartida, a formulação de conjecturas parece não constituir uma etapa tão problemática. Isso é indicado, por exemplo, por Ponte *et al.* (1998), a partir de um trabalho colaborativo realizado com alunos do 3º ciclo, no qual os alunos demonstraram capacidades de (i) usar e integrar estratégias geométricas e aritméticas para chegar a conjecturas, (ii) usar estratégias de variação e generalização para formular conjecturas, assim como analisar casos extremos na sua argumentação; e (iii) alterar e adaptar

conjecturas a partir de contra-exemplos. No entanto, Brocardo (2002) refere que os alunos explicitam com facilidade conjecturas, mas demoram, com frequência, a compreender o seu estatuto – tomando as conjecturas como conclusões. Afirmar esta investigadora:

É muito forte nos alunos a ideia que uma tarefa matemática implica a procura de respostas/conclusões e que a evolução para uma postura realmente investigativa em que formulam conjecturas e desenvolvem vários ciclos de confirmação ou refutação destas, é um processo demorado e que tem de ser objecto de um trabalho explícito por parte do professor (p. 540).

Esta autora estudou em detalhe os casos de três alunos. Segundo ela, estes alunos mostram tendência para encarar uma investigação como uma actividade linear em que (i) recolhem uns tantos dados, (ii) organizam esses dados e (iii) analisam-nos de modo a tirar conclusões. Progressivamente, à medida que foram fazendo tarefas de investigação, os alunos foram compreendendo a não linearidade do processo investigativo e a importância e significado da prova. Esta evolução processou-se, no entanto, em ritmos bastante diversos de aluno para aluno, sendo mais lenta no caso dos alunos, como Rita, marcados por uma visão mecanicista da actividade matemática (como a aplicação de procedimentos sem se deter muito no seu significado e implicações) e mais rápida no caso dos alunos, como Eva, com maior gosto na realização de tarefas abertas.

Brocardo indica, ainda, que “numa fase inicial os alunos da turma encararam a prova das suas conjecturas como uma ‘complicação’ desnecessária introduzida pela professora” (p. 544). Para eles, uma conjectura que tinha resistido a vários testes era certamente verdadeira, não sentindo qualquer necessidade de a provar. Numa segunda fase, vários alunos foram percebendo o que significava justificar as suas conjecturas, mas encaravam isso como algo exterior à própria investigação. Finalmente, nas últimas tarefas, “a grande maioria dos alunos tinha a clara noção de que se deveria pensar na prova das suas conjecturas antes de dar por concluído o seu trabalho” (p. 544). Para esta evolução, segundo a autora, terá contribuído de modo decisivo o facto de ter sido feito um trabalho continuado ao longo do ano “em que este aspecto foi sistematicamente retomado” (p. 546). Vários outros estudos mostram que os alunos, por si sós, sentem pouca necessidade de apresentar justificações das suas conjecturas e muito menos de apresentar provas de natureza mais formal (e.g., Fonseca, 2000; Oliveira, 1998b; Rocha, 2002).

Vários estudos, no entanto, mostram que a qualidade da argumentação dos alunos pode melhorar com a redacção continuada de relatórios escritos. Por exemplo, Fonseca (2000) afirma que, com o decorrer do trabalho, a qualidade dos relatórios dos alunos do 10º ano melhorou significativamente. Para além disso, a elaboração de relatórios contribuiu para desencadear a utilização de determinados processos, aprofundar a investigação e melhorar a organização das ideias. Também Varandas (2001) e Brocardo (2002) referem que os alunos tendem a melhorar a qualidade dos relatórios que produzem sobre as suas investigações à medida que vão adquirindo experiência na sua realização. Numa fase inicial os alunos apresentam sobretudo respostas curtas, incidindo muito nos resultados, mas mais tarde já elaboram textos que explicam com algum pormenor o trabalho realizado.

Não há estudos sobre actividades de investigação na ensino superior na actualidade. No entanto, num estudo de natureza histórica, Malonek, Silva e Costa (2002) analisam as dissertações realizadas por alunos da Universidade de Coimbra no Século XIX, trabalhos que, muitas vezes, constituíam pequenas investigações. Os autores indicam que “o tema da dissertação era escolhido pelo aluno mas devia ter a aprovação do professor. O professor corrigia ainda uma primeira versão do texto da dissertação e no exame o tempo dedicado à análise da dissertação não podia ser inferior a um quarto de hora” (p. 171). Entre estas dissertações encontra-se um estudo original de Francisco Gomes Teixeira, um dos grandes matemáticos portugueses, que veio a ser considerado muito interessante por outros matemáticos da época. O facto da realização destas dissertações se ter mantido durante bastante tempo, sugere que elas eram vistas com um significativo potencial educativo.

Os estudos realizados mostram que, para muitos alunos, as actividades de investigação constituem uma experiência nova. No entanto, devidamente apoiados pelo professor e com a continuação do trabalho, os alunos, pelo menos a partir do 2º ciclo, conseguem compreender, pelo menos em termos gerais, o que é uma investigação e o papel que lhes cabe assumir nesta actividade.

Podemos resumir as dificuldades dos alunos em dois grupos. Algumas são de natureza geral. Assim, sem outras indicações, muitos alunos procuram realizar uma investigação usando as estratégias que empregam na resolução de exercícios. Na verdade, muitos alunos parecem ter uma visão linear do trabalho a realizar, indo rapidamente da recolha

à organização dos dados e desta à formulação de conclusões. Outras dificuldades respeitam a aspectos específicos do trabalho investigativo. Por exemplo, a colocação de questões é uma etapa a que os alunos tendem a prestar pouca atenção, as conjecturas são por vezes entendidas desde logo como conclusões e a necessidade de justificação das conjecturas não chega a ser compreendida por muitos deles. A sua tendência natural é considerarem que a verificação de diversos exemplos é suficiente para comprovar a validade de uma afirmação matemática. No entanto, com uma experiência prolongada na realização de investigações, a maioria dos alunos evidencia progressos significativos na ultrapassagem destas dificuldades. Em particular, a realização de relatórios escritos parece ser uma boa estratégia para os levar a melhorar a sua capacidade de argumentar e justificar os resultados matemáticos obtidos.

### **Aprendizagens de Matemática e de objectivos curriculares transversais**

Para além de aprenderem a realizar investigações matemáticas, interessa saber até que ponto, ao trabalhar nestas tarefas, os alunos mobilizam e consolidam os seus conhecimentos de conceitos e procedimentos ou desenvolvem novas aprendizagens matemáticas.

Ema Mamede (2001) efectuou uma investigação numa turma do 4º ano de escolaridade, tendo em vista compreender como é que a calculadora é usada em investigações numéricas, na resolução de tarefas de estimação e de aplicação da Matemática à vida real e quais são as concepções dos alunos sobre esta disciplina. Entre as conclusões que enuncia relativamente às potencialidades da calculadora neste tipo de contextos educativos, refere que este instrumento (i) torna possível a identificação de propriedades numéricas, o estabelecimento de generalizações e a determinação de padrões numéricos; (ii) ajuda a desenvolver o raciocínio dedutivo dos alunos, bem como a capacidade de generalização; e (iii) permite que os alunos trabalhem com números mais elevados que o habitual, facilitando a descoberta de algumas propriedades.

No estudo que realizou com alunos do 6º ano do ensino básico, Segurado (2002) indica ter sido bem visível, “durante a realização das tarefas, o domínio que os alunos têm de alguns conceitos anteriormente leccionados nomeadamente, potências, fracções, dízimas, números primos, divisores, múltiplos e da utilização da calculadora” (p. 72). Afirma ainda esta professora:

Os conhecimentos adquiridos tomam valor para os alunos, quando estes sentem que precisam deles para poderem realizar as tarefas que lhes são propostas. Com estes alunos foi notório o interesse com que se apropriaram de alguns conceitos necessários à consecução das tarefas. (p. 72)

A professora indica que os alunos desenvolveram a sua autonomia e capacidade de comunicação. Refere, também, o empenho com que se envolveram nas tarefas de investigação alguns alunos tidos por mais fracos. O facto de lhes ter sido permitido observar e descobrir relações entre os números, sem que para isso necessitassem de muitos conhecimentos prévios, deu-lhes confiança. Indica que tanto ela como os alunos ficaram agradavelmente surpreendidos com o seu desempenho nestas tarefas.

Segurado e Ponte (1998) reportam-se ao caso concreto de um aluno, Francisco, com um bom desempenho em Matemática. Os autores indicam que a realização destas tarefas mostra como ele se apropriou de certos conceitos e técnicas operatórias, evidenciando segurança em alguns aspectos mas também, tendo em conta as suas capacidades, uma surpreendente dificuldade noutros aspectos. Os autores sublinham que os conhecimentos mais básicos podem ser desenvolvidos no decurso deste tipo de actividade e que o seu domínio imperfeito por parte dos alunos não constitui factor impeditivo para o seu trabalho.

Num estudo centrado numa investigação estatística, também com alunos do 6º ano de escolaridade, Sousa (2002) indica que

a realização desta tarefa, constituiu uma experiência de aprendizagem significativa, de carácter experimental, onde foram trabalhados de forma integrada conteúdos matemáticos de dois domínios: “Estatística” e “Números e Cálculo”. Os números decimais, obtidos através da medição de grandezas associadas ao seu corpo, deixaram de ser entidades abstractas e ganharam significado. A manipulação destes números em contexto significativo, envolvendo comparação, ordenação, agrupamento e operação, contribuiu para que os alunos melhorassem a sua compreensão global dos números. Quanto aos conteúdos estatísticos, o contacto com diferentes tipos de variáveis e com diversos modos de recolher, organizar e representar informação relevante e significativa, promoveu nos alunos um entendimento e compreensão da linguagem e dos conceitos e métodos estatísticos que ultrapassou a sua memorização.

As investigações estatísticas constituem um campo privilegiado para promover a interdisciplinaridade, mobilizando conteúdos de outras disciplinas. Se o seu objecto de estudo for orientado para questões sociais, ambientais ou sanitárias, os alunos serão envolvidos em debates e reflexões imprescindíveis para o seu desenvolvimento pessoal e social. (p. 94)

Para esta professora, os alunos, ao discutir as características a estudar, ao formular hipóteses para o perfil do aluno típico da turma e ao procurar tirar conclusões quanto a esse perfil, estiveram envolvidos em experiências importantes para o desenvolvimento de competências no âmbito da comunicação e argumentação e para o seu próprio desenvolvimento pessoal. Na sua perspectiva, a necessidade de defender as suas ideias e de as confrontarem com as opiniões dos outros fomentou o desenvolvimento de hábitos de reflexão e de capacidade crítica, importantes para o exercício de uma cidadania activa e responsável. Os alunos tendiam a analisar os problemas tomando-se a si próprios como referenciais, o que está de acordo com o seu estágio de desenvolvimento. Deste modo, a professora considera que as investigações estatísticas podem contribuir para que os alunos desenvolvam a capacidade de ler e interpretar a realidade, descentrando-se da sua própria imagem.

Rocha (2002), conclui do seu estudo com alunos do 7º ano, que estes se sentiram mais à vontade nas tarefas que não envolviam pré-requisitos de conteúdos matemáticos de outros anos escolares. Isto mostra como os alunos, na realização de investigações, têm muitas vezes dificuldades em mobilizar aprendizagens matemáticas anteriores, possivelmente por insegurança ou por estarem habituados a usar os conceitos e procedimentos matemáticos de modos muito restritos.

Na sua experiência de ensino com alunos do 9º ano, Junqueira (1996) indica que

o longo tempo despendido na investigação de algumas construções proporcionou a ultrapassagem de obstáculos visuais que, de início, impediram uma análise adequada das figuras, e permitiu, em alguns casos, a identificação de relações invariantes, a descoberta da respectiva justificação, e a generalização de certos conceitos geométricos estudados. (p. 94).

A autora identifica três níveis na forma como os alunos manipularam as construções e interpretaram o *feedback* do computador: “esses níveis evoluem do reconhecimento das figuras através da aparência das construções, para o reconhecimento empírico de propriedades de figuras e para o relacionamento de propriedades” (p. 96). A investigadora reconhece nestes três níveis uma relação com os três primeiros níveis da teoria de van Hiele sobre o pensamento geométrico dos alunos.

Para Mendes (1997) que, como já referimos, realizou uma experiência com os seus alunos do 10º ano, as actividades de investigação ajudam a desenvolver capacidades como a criação de “soluções pessoais para problemas novos, o desenvolvimento do

espírito crítico e um sentido de uma maior cooperação” (p. 221). Para este autor, a “argumentação e discussão com colegas e/ou com o professor suscita a obtenção de significados mais ricos dos conceitos interiorizados por cada um dos intervenientes possibilitando que através das situações vividas os alunos tendam a construir gradualmente novos saberes matemáticos” (p. 222).

Verifica-se, assim, que a realização de investigações matemáticas pode constituir uma ocasião para os alunos mobilizarem e consolidarem os seus conhecimentos matemáticos, para desenvolverem capacidades de nível superior e até para promoverem novas aprendizagens. No entanto, a realização destas actividades também demonstra fragilidades no conhecimento matemático dos alunos, por vezes em conceitos e ideias que se supõem bem aprendidos. É de crer que a realização continuada destas actividades ajude a promover nos alunos novas aprendizagens matemáticas. Trata-se, no entanto, de um campo onde é necessário realizar mais investigação. Na maioria dos estudos, a realização de investigações matemáticas pelos alunos ocorreu em contextos de trabalho que envolvem colaboração em pequeno grupo, discussão com toda a turma, prestações escritas e orais. Nestas condições, estas actividades tendem a promover diversos objectivos curriculares transversais como a capacidade de comunicação e argumentação, a autonomia e o espírito crítico.

### **As atitudes e as concepções dos alunos**

A investigação em educação matemática realizada tanto em Portugal como noutros países sugere que as concepções e as atitudes dos alunos sobre a Matemática e a aprendizagem constituem um factor que interfere, pela positiva ou pela negativa, com o modo como eles se envolvem nas actividades na sala de aula (Ponte, Matos e Abrantes, 1998). Reciprocamente, as experiências que os alunos têm na aula de Matemática podem influenciar as suas concepções e atitudes. Vejamos o que se passa relativamente às investigações matemáticas.

Na verdade, verifica-se que os alunos mais novos, mostram frequentemente muito entusiasmo na realização de investigações matemáticas na sala de aula. É o que transparece, por exemplo, da seguinte narrativa de Segurado:

As descobertas surgiam agora em catadupa e não havia aluno que não se empenhasse em dar a sua contribuição, o que me dificultava, por vezes, o registo e a sistematização:

*O algarismo das unidades é sempre 0, 6, 2, 8 e 4.*

*O algarismo das unidades é sempre um número par.*

*O algarismo das dezenas não se repete de 5 em 5.*

Fui refreando esse entusiasmo com pedidos e exclamações: *Calma! Vamos verificar se o que o colega afirmou é verdade; Atenção; Vejam!; Olhem que interessante o que o colega descobriu!*

A Sónia de repente afirmou: *São os mesmos algarismos que para os múltiplos de 4.* E mesmo antes desta afirmação fazer sentido para mim já a Vânia declarava: *Estão é por outra ordem.* Percebi então que estavam a comparar os múltiplos de 4 e 6, o que expliquei à turma.

*Começa na mesma por zero,* constatou o Pedro que neste dia se encontrava bem acordado.

*Os outros algarismos estão ao contrário,* referiu a Ana.

*Há múltiplos de 4 que também são múltiplos de 6.*

*Os múltiplos de 6 a partir do 12, são alternadamente também múltiplos de 4.*

...

As descobertas vinham agora como as cerejas, umas atrás das outras, ultrapassando todas as minhas expectativas quanto às respostas que os alunos dariam. Eu não tinha previsto a hipótese de comparar os múltiplos dos diferentes números, pois nunca os colocara em paralelo. Vivi por isso as suas descobertas com enorme entusiasmo. Um aluno mais perspicaz observou: *A professora está muito contente connosco não está?* E estava! (Ponte, Oliveira, Cunha e Segurado, 1998, pp. 67-71)

Também Rocha (2002), afirma que os alunos do 7º ano reagiram muito bem às investigações matemáticas que lhes propôs. Durante este estudo, notou uma evolução na predisposição dos alunos para se envolverem neste tipo de actividade, confirmada, de resto, pelos seus comentários. De acordo com esta professora, ao longo da sua experiência, mesmo os alunos mais fracos procuraram participar mais activamente no trabalho do grupo.

Segundo Brocardo (2002), que trabalhou com alunos do 8º ano, estes reagem bem à exploração continuada de investigações: “ao longo de todo o ano, foi notório o entusiasmo da grande maioria dos alunos nas aulas em que eram exploradas tarefas de investigação” (p. 553). Inicialmente, a motivação dos alunos parecia estar sobretudo relacionada com aspectos “exteriores” à actividade de investigação: o uso de materiais diferentes e o trabalho em grupo. Segundo a autora, nessa fase ainda inicial, “embora a

grande maioria dos alunos se empenhasse bastante na exploração das tarefas (...) também manifestavam algum desagrado por considerarem tratar-se de um trabalho que exigia uma grande persistência pessoal” (p. 554), uma vez que as explorações eram invariavelmente consideradas incompletas pela professora. Para Brocardo, o cuidado posto na valorização do trabalho dos alunos e a sua experiência continuada neste tipo de actividade, levou-os a “experienciar um verdadeiro prazer em explorar diferentes possibilidade e relações, gostando de viver a ‘tensão da descoberta’” (p. 554), ou seja, a sentir-se motivados por razões intrínsecas à própria natureza das tarefas.

Brocardo (2002) estudou em detalhe os casos individuais de três alunos. Um deles (Eva) era uma aluna que à partida mostrou interesse em explorar tarefas não rotineiras. Os outros dois alunos (Rita e Lino), por razões diferentes, no início do ano revelavam grande dificuldade em entender o seu papel neste tipo de tarefas, mas no final do ano, segundo a investigadora, era visível o modo como eles gostavam das aulas em que se propunham investigações e se empenhavam na sua realização. Brocardo (2001) sugere que o sucesso e a receptividade dos alunos a este tipo de tarefas sofre avanços e recuos, estando intimamente relacionado com as formas de organização do trabalho e com o ambiente de aprendizagem da turma. A autora argumenta ainda, que, com a sua realização, a confiança dos alunos na sua capacidade de realizar investigações evolui num sentido positivo.

Para Mendes (1997), que trabalhou com uma turma do 10º ano, “com o decorrer dos trabalhos os alunos interessam-se fortemente por aquilo que estão fazendo sentindo-se responsabilizados porque o trajecto foi por eles escolhido livremente, existindo um comprometimento nos percursos definidos segundo a sua vontade” (pp. 211-212). Segundo o autor, os alunos mostram “bastante satisfação” com este tipo de trabalho, “o que tende a desenvolver a auto-confiança e envolvimento na aprendizagem da Matemática tornando-a assim viável” (p. 212).

No entanto, alguns estudos documentam casos de alunos que manifestam reacções menos favoráveis em relação à realização de tarefas de investigação. No estudo de Varandas (2001), efectuado com alunos do ensino secundário, estes, na sua maioria, mostram valorizar o trabalho investigativo que encaram como um trabalho em que eles aprendem por si mesmos e não por transmissão de conhecimentos do professor. Como diz um aluno: “É mais natural a aprendizagem quando somos nós a concluir e a

aprender por nós próprios” (p. 210). Em contrapartida, há alunos que manifestam preferir as aulas de tipo tradicional, em que o professor expõe matéria e os alunos resolvem exercícios. Como argumenta um deles: “Eu penso que é preferível a professora dar a matéria e em seguida colocar os exercícios para nós fazermos. Primeiro o teórico e depois exercícios” (p. 211). As duas turmas que participaram neste estudo tinham características bastante diversas. Na turma A os alunos estavam habituados a realizar trabalho experimental e a fazer relatórios, ao contrário dos da turma B, que evidenciavam uma visão muito tradicional sobre o ensino da Matemática, e a verdade é que a turma A aderiu bastante melhor às propostas de trabalho investigativo do que a turma B.

Tal como as atitudes dos alunos, também as suas concepções podem mudar com a realização de investigações matemáticas. Assim, o artigo de Segurado e Ponte (1998) relata o caso de Francisco, um aluno do 6º ano de escolaridade, que constitui um caso paradigmático de mudança de concepções.

No início do estudo, Francisco encara a Matemática essencialmente como uma ciência onde o cálculo tem um papel preponderante. Para ele, o professor constitui a autoridade dominante na sala de aula, sendo o seu papel transmitir conhecimentos e avaliar os alunos. Estes, por sua vez, têm de estar com atenção nas aulas e estudar se querem aprender. No entanto, já nesta fase, Francisco revela gosto pela resolução de problemas e manifesta uma certa originalidade no modo de encarar as tarefas que lhe são propostas. Deste modo, a visão bastante limitada que apresenta da Matemática e da sua aprendizagem não está completamente de acordo com a sua maneira de ser e o seu gosto pessoal mas parece ser, sobretudo, o resultado da sua adaptação ao meio escolar e, muito especialmente, ao ensino da Matemática que tem recebido. (p. 33)

Segundo os autores, no decurso do ano, Francisco mostra grande interesse pelas actividades de exploração e investigação. Nas primeiras tarefas, o seu raciocínio é francamente limitado, não indo além da formulação de conjecturas cuja validação pede ao professor. Progressivamente começa a realizar testes, a refinar as conjecturas em função dos seus resultados que obtém e, finalmente, ensaia justificações para as conjecturas que lhe parecem verdadeiras. Vai revelando maior ousadia nos seus raciocínios e vai exibindo crescente autonomia e confiança. O trabalho efectuado à volta das tarefas de exploração e investigação parece assim ter ajudado este aluno a desenvolver as suas capacidades de raciocínio e a sua criatividade matemática.

A realização de diversas actividades de exploração e investigação por Francisco contribui para que ele assuma uma nova perspectiva sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática. Assim, passa a considerar que (i) a Matemática é uma ciência em desenvolvimento, onde o processo de investigação tem um papel importante; (ii) o papel do professor é o de orientador, procurando motivar e incentivar os alunos e dar-lhes espaço para fazerem a sua Matemática; e (iii) as tarefas, para além de levarem os alunos a aprender, devem também ajudar a criar um ambiente de aprendizagem estimulante.

Francisco é um aluno com uma relação especial com a Matemática. No início do estudo, mostra saber que há maneiras de resolver um problema que ele próprio pode descobrir, para além das que a professora ensina. Mas não as valoriza muito, subordinando-se à professora; procura ir de encontro ao que ela indica. Com o decorrer do estudo passa a confiar na sua capacidade de decidir da validade dos seus raciocínios. A sua inclinação especial para a descoberta é estimulada pela realização de investigações que o ajudam a perceber novas dimensões do raciocínio matemático – testar, refinar, justificar – que ele antes não aprofundava dada a sua dependência da validação da professora.

Segundo os autores, o trabalho proposto a este aluno está na base destes resultados. A natureza aberta e desafiante das tarefas criou oportunidades de raciocínio, de exploração, de interacção que o aluno aproveitou. O trabalho em pequeno grupo fomentou situações de interacção, diálogo e colaboração que o levaram a compreender que, apesar da sua grande facilidade em Matemática, podia beneficiar com o diálogo com os seus colegas. O modo como a professora exerceu o seu papel, não dando respostas imediatas às solicitações feitas pelos alunos, mas estimulando-os a pensarem e aprofundarem as suas ideias, foi também importante para ele perceber que podia ter um papel próprio na validação dos resultados matemáticos. Por fim, as discussões gerais realizadas ao terminar cada actividade – que ele encara com grande expectativa – mostram-se importantes, para Francisco, como momento de aprofundamento e de consolidação das aprendizagens. Os autores concluem que

este estudo mostra que é possível proporcionar uma experiência matemática significativa envolvendo a formulação de conjecturas, o seu teste e refinamento, e a própria elaboração de justificações de relações matemáticas que se considera serem verdadeiras pelo menos a alguns alunos deste nível de escolaridade. Mostra, além disso, como este trabalho pode levar a um significativo enriquecimento das concepções dos alunos no que respeita à Matemática e até a uma mudança de perspectiva do que consideram ser o

seu papel e o do professor no processo de ensino-aprendizagem desta disciplina. (p. 35)

Francisco é um caso fora do comum. Trata-se de um aluno com uma inclinação natural para a Matemática, para quem as tarefas propostas, num ambiente estimulante, parecem perfeitamente adequadas. Não será assim, certamente, com todos os alunos. Torna-se necessário, por isso, estudar o modo como outros alunos, com outras características, do mesmo e de outros níveis de escolaridade, se envolvem neste tipo de trabalho e de que modo isso contribui ou não para a mudança das suas concepções sobre a Matemática e a aprendizagem desta disciplina.

Segurado (1998) analisou igualmente as concepções de outros três alunos do 6º ano e os seus desempenhos em tarefas de investigação. No início, e apesar do entusiasmo e empenho com que eles receberam as novas tarefas, a investigadora detecta algumas dificuldades na sua concretização. Relaciona estas dificuldades com as concepções iniciais dos alunos sobre a Matemática e o papel do professor. Segundo a professora, os alunos consideram que cada questão Matemática tem uma e uma só resposta e é o professor que estabelece a sua validade. Indica, também, que estas concepções se foram alterando positivamente ao longo do estudo e, com elas, o desempenho dos alunos, verificando-se uma melhoria da sua capacidade de observar, conjecturar, testar, justificar, assim como da capacidade de comunicar matematicamente.

Brocardo (2002) considera que, como consequência do trabalho realizado ao longo do ano, os alunos “estabeleceram uma forte ligação entre a Matemática e as investigações matemáticas e realçaram os aspectos experimentais e indutivos” (p. 556). Esta autora documenta como os alunos passaram de uma visão da Matemática muito ligada ao cálculo, para uma visão que integra aspectos como o “pensar” e a resolução de problemas. Segundo afirma, os alunos que participaram nesta experiência, no fim do ano, “consideram que podem investigar e descobrir relações em Matemática e mostram uma clara preferência por um processo de aprendizagem em que participam activamente” (p. 560).

Os estudos realizados documentam com clareza que os alunos, dos diversos níveis de ensino se envolvem muitas vezes com entusiasmo na realização de investigações. Estas actividades parecem, assim, ter capacidade de desafiar a curiosidade natural dos alunos. No entanto, também se verificam atitudes de reserva ou mesmo de rejeição por parte dos alunos mais velhos, em especial no ensino secundário. Neste nível, a pressão da

preparação para o exame atinge grande intensidade. Esta atitude negativa em relação às tarefas de investigação pode ter por base a percepção que estas tarefas são diferentes das que surgem nos testes e exames, que têm grande importância para eles, uma vez que dos resultados que obtiverem depende o seu futuro escolar.

Além disso, como sugerem diversos autores (Brocardo, 2001; Matos, 1991; Segurado, 1997), esta atitude negativa de alguns alunos pode resultar também do facto de eles verem a Matemática como consistindo essencialmente num conjunto de definições e regras e considerarem que a aprendizagem resulta de ouvir as explicações do professor e praticar as regras que ele indica. Estas concepções tendem a induzir nos alunos falta de autonomia e a causar-lhes dificuldades na realização destas tarefas.

Finalmente, os estudos empreendidos mostram que a realização continuada de investigações, num quadro de discussão e reflexão sobre o significado dos resultados obtidos e dos processos empregues, é susceptível de influenciar de modo muito significativo as concepções dos alunos. Estes podem alterar a sua visão do trabalho investigativo, das características da Matemática, do modo de aprender Matemática e dos papéis do professor e do aluno, desenvolvendo o gosto pela disciplina e a sua confiança neste tipo de trabalho.

### **Mudanças nas práticas de aprendizagem**

Diversos estudos relatam mudanças significativas no modo como os alunos participam nas actividades da sala de aula e nas suas práticas de aprendizagem. Por exemplo, Segurado (2002) indica que, no decorrer das aulas de actividades de investigação, foi manifesta a forma como se foi alterando o ambiente de trabalho e o modo de estar dos alunos. Estes, numa primeira fase mostravam grande dependência da professora mas mais tarde tornaram-se bastante independentes. Foram também evidentes alterações no modo de encarar as tarefas. Inicialmente, os alunos tendiam a responder estritamente às perguntas apresentadas, não valorizando a sua capacidade de formular novas questões, que só se manifestou, claramente, na execução das últimas tarefas. Foi notório o entusiasmo manifestado pelos alunos nas tarefas menos estruturadas, onde têm maior liberdade de actuação. As discussões, numa primeira fase bastante orientadas pela professora, foram-se gradualmente tornando mais participadas. Paralelamente, os alunos melhoraram a sua capacidade de comunicar matematicamente, com destaque para o seu modo de argumentação.

Reportando-se ao caso de Francisco, um aluno do 6º ano de escolaridade, Ponte e Segurado (1998), indicam que, durante a realização das primeiras tarefas, ele trabalhou principalmente de modo individual, integrando-se pouco no grupo e mostrando dificuldade em pensar com os colegas. A realização das tarefas de exploração e investigação levou-o a sentir-se gradualmente mais à vontade no papel de elemento de um grupo. No fim do estudo ele já interagiu bastante com os colegas, colocando as suas ideias ao grupo e aproveitando as ideias dos outros para avançar na realização das tarefas. Inicialmente muito dependente da professora para a validação das respostas, foi reconhecendo que ele e os seus colegas podem também assumir o papel de autoridades matemáticas. Nos momentos de discussão geral, revelou-se sempre um aluno reservado e nunca se ofereceu para expressar as opiniões do grupo perante a turma. Contudo, seguia com manifesta atenção as discussões, intervindo com pertinência sempre que considerava necessário. A realização das tarefas de investigação em grupo trouxe a Francisco uma visão mais positiva deste modo de trabalho. A necessidade de interagir com os colegas levou-o a aperceber-se do valor da partilha de ideias na realização de trabalho investigativo.

Nas conclusões do seu estudo, Rocha (2002), indica que os alunos desenvolveram alguma autonomia em certos momentos da actividade investigativa continuando, no entanto, ainda presos à presença da autoridade da professora como detentora do saber matemático. Notou que os motivos que conduziram os alunos a solicitar a sua presença variaram de tarefa para tarefa. Numa primeira fase era chamada a orientar os alunos desde a interpretação da tarefa até à formulação de conjecturas e respectiva prova. Numa fase posterior interveio, sobretudo, para explicar um pouco melhor a tarefa e para colocar questões relacionadas com a validade das conjecturas formuladas pelos alunos.

Diz esta professora:

Os alunos aperfeiçoaram o modo de trabalhar em grupo procurando, sempre que possível, distribuir tarefas pelos seus membros de forma a contribuir para verdadeiras discussões matemáticas, geradoras de mais conhecimento.

Os alunos, de um modo geral, evidenciaram alguma melhoria na forma de comunicar as suas ideias, quer oralmente quer por escrito. Este facto reflectiu-se na redacção dos seus relatórios e na apresentação para toda a turma das conclusões obtidas no fim das tarefas, onde foram confrontados por mim e pelos colegas de outros grupos, no sentido de explicitarem melhor as suas conclusões e provarem as suas conjecturas.

Na fase de discussão e institucionalização de conhecimentos, os alunos mostraram ter compreendido o que é fundamental num momento como este: dar a conhecer aos colegas as conclusões do grupo, o que experimentaram, o que conjecturaram e como provaram. Contudo, só surgiu uma verdadeira discussão matemática após a realização da tarefa cinco, onde face à riqueza das conjecturas formuladas pelos diferentes grupos, foi possível promover uma conversa animada entre os alunos que se esforçaram para convencer os colegas e a professora da validade das suas conjecturas. (p. 122)

Segundo Brocardo (2002), a realização de investigações na sala de aula pode ajudar a estabelecer um ambiente em que os alunos participam activamente, facilita a compreensão dos processos e ideias matemáticos e da actividade matemática. Considerando a postura da turma e da professora nas aulas de investigação e o seu ambiente, a autora conclui que houve uma evolução dos alunos na participação no discurso na sala de aula. As aulas de discussão das tarefas foram caracterizadas por um grande envolvimento dos alunos e permitiram-lhes prolongar as suas investigações, utilizar certos processos matemáticos ou ficar com ideias para explorações posteriores.

Esta autora refere que dois dos alunos que estudou, “mostraram inicialmente muitas dificuldades em trabalhar cooperativamente com os seus colegas” (p. 551). No entanto, com o decorrer do ano assistiu-se a uma evolução muito significativa e no final os alunos mostravam-se perfeitamente integrados no trabalho dos respectivos grupos. Segundo afirma a autora, no contexto da realização de trabalho investigativo, “é possível trabalhar no sentido dos alunos viverem e reconhecerem as potencialidades deste tipo de trabalho” (p. 552).

Num outro estudo, que envolveu alunos do 5º ao 9º ano, Ponte, Oliveira, Cunha e Segurado (1998) evidenciam o trabalho de grupo como uma forma de organizar os alunos que promove a comunicação, uma melhor explicitação das conjecturas e realização de testes. Também, o trabalho com o grupo-turma impõe uma maior formalização do raciocínio e conduz os alunos a um desempenho mais maduro quando argumentam junto do professor e colegas.

Ao referir-se às práticas de aprendizagem dos alunos do 10º ano, como resultado da sua experiência, Mendes (1997) afirma que:

Ao envolverem-se em actividades de investigação e exploração os alunos interessam-se por aquilo que estão fazendo, criando por vezes, cada um, o seu método de enfrentar o problema e estabelecendo percursos distintos para chegar às soluções. Durante estes percursos, os alunos partilham ideias,

discutem as situações, avançando para patamares mais avançados do percurso, por vezes após negociação de significados, mais precisos e concretos do que habitualmente, que expliquem as situações abordadas (p. 211).

Este autor considera que o trabalho em actividades de investigação na aula de Matemática leva os alunos a uma participação e envolvimento activos que ajuda a criar um ambiente de trabalho estimulante.

Os estudos evidenciam, em muitos casos, o desenvolvimento por parte dos alunos de novas práticas de aprendizagem no seu trabalho com investigações. Isso não significa a ausência de problemas neste campo. Na verdade, numa fase inicial, os alunos tendem a trabalhar individualmente e a pedir insistentemente apoio ao professor para superar as suas dificuldades (Brocardo, 2001; Rocha, 2002; Santos, Brocardo, Pires e Rosendo, 2002; Segurado, 1997). O mesmo notam Ponte e Matos (1992), que documentam como a interacção entre três alunos durante uma investigação assumiu assimetrias notáveis, proporcionando experiências de valor bastante desigual para cada um deles.

O trabalho investigativo, pela sua riqueza e complexidade, e pelo facto de permitir uma grande variedade de formas de trabalho – individual, em pequeno grupo, em grupo-turma – pode ser um bom contexto para o desenvolvimento de novas práticas de aprendizagem por parte dos alunos. Para que isso aconteça, é necessário que o professor saiba ter em conta as concepções, as práticas e os hábitos dos alunos e, a partir dessa realidade, vá introduzindo elementos de uma cultura da sala de aula marcada por novas regras e responsabilidades de participação.

### **Estudos centrados nos professores**

Como actores fundamentais do processo educativo, os professores têm uma palavra fundamental a dizer quanto ao interesse e à viabilidade da presença de um forte elemento investigativo no ensino da Matemática. Abordamos, assim, a natureza da relação que eles tendem a estabelecer com as investigações matemáticas, como conceito e como prática, o conhecimento profissional e a perspectiva curricular que mobilizam na sua realização e o modo como se enquadram em dispositivos de formação onde esta noção é valorizada.

### **Relação com a ideia de investigação matemática**

Vejam a relação que os professores têm com a noção de investigação matemática, como actividade a realizar pessoalmente e como proposta de trabalho a levar para a sala de aula. Consideramos questões como: Que atitudes manifestam em relação às actividades de investigação matemática? Que importância lhe atribuem? Que estilo de trabalho evidenciam na realização de uma investigação? Que confiança sentem na condução deste tipo de actividade na sala de aula? De que factores pode depender a relação dos professores com as investigações matemáticas?

*Atitudes em relação às investigações matemáticas.* Não há muitos estudos descritivos sobre a generalidade dos professores em serviço. O relatório *Matemática 2001* (APM, 1998), que constitui o estudo sobre concepções e práticas de professores desta disciplina mais completo entre os realizados em Portugal, não se refere directamente a actividades de investigação mas sim a actividades de exploração. De acordo com as respostas dos professores dos diversos ciclos de ensino, estas actividades assumem uma expressão modesta nas suas práticas profissionais. Na verdade, afirmam usá-las “sempre” ou “em muitas aulas” 18% dos professores inquiridos do 2º ciclo do ensino básico, 12% do 3º ciclo e 14% do ensino secundário (p. 33). É de registar a assinalável uniformidade destas percentagens que, apesar de tudo, traduzem valores bem mais significativos, por exemplo, do que os que se verificam em relação ao trabalho de projecto (1%, 2% e 3% para os mesmos grupos de professores).

Tem-se vindo a desenvolver um certo movimento de professores interessados em actividades de investigação que conduzem, analisam e divulgam experiências realizadas nas suas aulas. De um modo geral, trata-se de experiências empreendidas no âmbito de cursos de pós-graduação, mas em alguns casos estes professores começaram a interessar-se por esta perspectiva em espaços associativos (Mendes, 1997, 1998; A. Rocha, 2002; H. Rocha, 1996; Segurado, 1998, Sousa, 2002). Estes professores revelam um forte entusiasmo por esta perspectiva curricular e as suas experiências tendem a ser muito positivas.

Diversos professores têm também sido chamados a colaborar em estudos realizados por investigadores. Por exemplo, no estudo de Hélia Oliveira (1998a, 1998b) são descritas as atitudes de duas professoras já bastante experientes do 3º ciclo do ensino básico. Uma delas, Teresa, segue, segundo a investigadora, um modelo de ensino de descoberta guiada e abordagem exploratória, usando uma variedade de tarefas e materiais. Esta

professora – que se distingue pela sua forte participação associativa – procura que os alunos sejam matematicamente activos e propõe, por vezes, actividades de investigação nas suas aulas, embora se sinta limitada pelo facto do programa estar estruturado em termos de conteúdos. Outra professora, Isabel, vê aspectos positivos na realização de investigações matemáticas na sala de aula. No entanto, manifesta bastante receio que, em diversos tópicos, esta actividade ocupe demasiado tempo, impossibilitando o cumprimento do programa. Além disso, considera um obstáculo o tempo que é necessário para preparar este tipo de actividades. A investigadora considera natural que muitos professores “não se disponham a fazer das investigações matemáticas uma actividade permanente nas suas aulas”, uma vez que não estão “em contacto com um corpo de conhecimentos sobre o assunto, nem [têm] oportunidade de partilhar as suas dúvidas e os seus sucessos com outros [professores]” (p. 95).

Helena Cunha (1998), realizou um estudo com duas professoras do 2º ciclo. Estas professoras viam as investigações de modo diferente. Para uma delas, tratava-se de propostas de trabalho que não se enquadram nos programas. Para a outra, estas tarefas não só estão consonantes com os programas, como permitem atingir importantes finalidades curriculares. Para a autora, o modo como as professoras encaram as actividades de investigação resulta, sobretudo, da sua visão sobre (i) a Matemática, (ii) os currículos, (iii) o ensino e a aprendizagem e ainda (iv) a sua actividade profissional. No que se refere à Matemática, uma visão mais próxima das posições absolutistas tende a desvalorizar o interesse deste tipo de tarefas, enquanto que uma visão da Matemática como actividade tende, pelo contrário, a legitimar a sua importância. Relativamente ao currículo e ao ensino-aprendizagem, as posições que valorizam os conteúdos e os procedimentos de cálculo, tendem, naturalmente a desvalorizar estas tarefas, ao contrário das posições que destacam a importância de outros objectivos curriculares e sublinham a necessidade de percursos de aprendizagem diferenciados. Finalmente, indica como o desencanto com a actividade profissional e assumir a actividade do professor como solitária e a sua formação como dependente das oportunidades exteriores são factores que surgem associados a uma menor adesão às tarefas de investigação no ensino da Matemática.

Num outro estudo, Luísa Selas (2002) debruça-se sobre o caso de um professor do 2º ciclo muito experiente que assume uma atitude bastante desfavorável em relação a este tipo de actividade. Embora reconheça que os alunos podem motivar-se fortemente, este

professor aponta diversas dificuldades que lhe parecem difíceis de superar: a falta de tempo para fazer este tipo de trabalho e cumprir o programa, a gestão do apoio a prestar aos alunos, o modo de lidar com eventuais situações imprevisíveis e o modo de avaliar os alunos. Parecem ser as suas concepções sobre o currículo (que vê como uma listagem de conteúdos) e sobre processo de aprendizagem (que vê como aquisição directa da informação transmitida pelo professor), que o levam a desvalorizar o interesse educativo das actividades de investigação. Trata-se de concepções que foi formando ao longo da sua carreira profissional e, possivelmente, até muito antes, como resultado das suas experiências como professor e como aluno.

No que se refere aos alunos dos cursos de formação inicial de professores, vários estudos sugerem que, depois de realizarem algum trabalho neste campo, eles manifestam alguma simpatia por esta perspectiva e, nalguns casos, até bastante interesse (Brunheira, 2000; H. Fonseca, 2002; L. Fonseca, 2002). Assim, por exemplo, Lina Brunheira (2000) realizou um estudo com três professores estagiários ao longo de todo um ano lectivo. Todos eles atribuíram importância à realização de aulas de trabalho investigativo, mas os seus argumentos foram mudando à medida que iam vivendo novas experiências. A autora afirma que no final do ano eles valorizavam mais a realização de trabalho investigativo do que no seu início. A grande importância que estes jovens professores dão ao cumprimento do programa parece, no entanto, poder limitar de maneira bastante forte a expressão desta perspectiva na sua prática lectiva futura. A autora sugere que existe uma influência do conhecimento matemático nas suas atitudes face à realização de aulas de trabalho investigativo e no seu conhecimento didáctico. Por outro lado sublinha a influência do conhecimento didáctico naquelas atitudes.

Em resumo, alguns professores, em especial os mais envolvidos em actividades associativas e em programas de pós-graduação, começam a ter familiaridade com o conceito de investigação como actividade de aprendizagem e a desejar experimentá-lo na sua prática. No entanto, tudo indica que a maioria dos professores tende a ver esta perspectiva como bastante problemática de introduzir na sua prática profissional, dada a sua percepção que a realização destas actividades dificulta fortemente o cumprimento do programa. Os alunos dos cursos de formação inicial de professores mostram interesse nestas actividades, mas manifestam também uma percepção que a sua realização na aula vai contra o cumprimento do programa.

***Estilo de trabalho e competências na realização de investigações matemáticas.*** Vários estudos têm dado indicações sobre as competências dos jovens alunos dos cursos de formação inicial de professores no que se refere à resolução de problemas e a outros aspectos do raciocínio matemático. Assim, por exemplo, num trabalho realizado por Lina Fonseca (2002), alunos de um curso de formação de professores de Matemática e Ciências da Natureza de uma escola superior de educação reconheceram que a sua experiência anterior não lhes tinha proporcionado o hábito de reflectir e relacionar diversos assuntos de Matemática. Já noutra estudo sobre processos usados na resolução de problemas por alunos do 4º ano do mesmo curso, se tinham evidenciado dificuldades em defender raciocínios, conjecturar, generalizar e avaliar a razoabilidade das respostas (Fonseca, 1997). A autora considera que estas dificuldades podem dever-se ao domínio insuficiente dos conceitos matemáticos. Conclui que alguma formação em resolução de problemas pode não ser suficiente para as ultrapassar dada a persistência de uma concepção da Matemática centrada na reprodução de procedimentos e na obtenção de respostas para os exercícios propostos.

Helena Fonseca (2002) realizou um estudo com alunos de uma licenciatura em ensino de Matemática de uma universidade numa disciplina do 4º ano do curso. Na parte inicial do semestre, vários destes futuros professores mostraram alguma dificuldade em investigar. De acordo com a investigadora, alguns deles mostraram-se “perdidos” ao realizarem as primeiras investigações, sem saberem muito bem o que fazer. No entanto, foi possível ultrapassar esta situação: “a pouco e pouco, [os alunos] foram ganhando familiaridade com o trabalho proposto e passaram a saber investigar e a ter gosto por fazê-lo” (p. 183).

Os três professores estagiários que participaram no estudo de Brunheira (2000), revelaram, no início do ano lectivo, fortes limitações na sua capacidade de lidar com investigações matemáticas. Segundo a investigadora, eles manifestaram preferência pela utilização de métodos analíticos em detrimento de estratégias informais, revelando, ao mesmo tempo, uma quase ausência de estratégias geométricas. No entanto, durante o ano, foi notória a sua progressiva utilização de estratégias diferentes para resolver a mesma tarefa, utilizando processos nuns casos mais intuitivos, noutros mais formais.

De um modo geral, os candidatos a professores dos cursos de formação inicial, tanto das escolas superiores de educação como das universidades não parecem ter uma formação

matemática adequada para realizarem autonomamente pequenas investigações matemáticas. Presos a uma concepção de Matemática centrada no uso de métodos analíticos, na execução de procedimentos e na aplicação de “receitas”, não demonstram possuir a flexibilidade de raciocínio necessária para este tipo de trabalho. Mostram, no entanto, poder evoluir neste campo. Quanto aos professores em serviço, não há estudos que documentem o seu estilo na realização de investigações matemáticas.

**Confiança.** O problema da confiança do professor relativamente às investigações matemáticas coloca-se em dois planos: ao lidar matematicamente com este tipo de questões e ao gerir a situação de ensino-aprendizagem na sala de aula. Este problema põe-se tanto para professores principiantes como para professores já com bastantes anos de serviço, uma vez que se trata de situações que estes não enfrentam habitualmente. Vários resultados apontam nesse sentido. Por exemplo, o professor do estudo de Selas (2002), apesar dos seus 23 anos de serviço, evidencia claramente a sua insegurança quando lhe foi proposto realizar na aula uma actividade deste tipo. No estudo de Oliveira (1998a, 1998b), a professora Isabel manifesta alguns receios quanto à receptividade dos alunos a este tipo de actividade e à sua capacidade para desempenhar adequadamente o papel de professora, que considera bastante mais exigente que o seu papel usual na sala de aula. No estudo de José Manuel Varandas (2000), uma estratégia de segurança é a escolhida por professoras com muitos anos de ensino e já com bastante experiência de realização de investigações matemáticas na sala de aula, ao mostrarem preferência por realizar tarefas que já anteriormente tinham experimentado, em vez de proporem tarefas novas.

A confiança que os três professores estagiários que participaram no estudo de Brunheira (2000) foram evidenciando na preparação e condução das aulas com tarefas de investigação evoluiu significativamente ao longo do ano. Inicialmente, todos estavam bastante inseguros. Segundo a investigadora, isso pode dever-se a três motivos principais: (i) fracas expectativas sobre o desempenho e motivação dos alunos, (ii) percepção sobre a complexidade do seu papel, e (iii) consciência da sua inexperiência. Na perspectiva da investigadora, para a evolução positiva da confiança dos estagiários muito contribuiu o trabalho conjunto realizado na preparação das aulas e os resultados encorajadores das suas primeiras experiências.

A construção de dispositivos que proporcionem confiança ao professor parece ser assim fundamental para este se abalançar na realização destas actividades na sua aula. Além disso, experiências positivas de realização de actividades de investigação, tendem a promover a sua auto-confiança neste campo.

Para além disso, a relação que os professores e os futuros professores têm com as actividades de investigação parece depender das suas experiências anteriores neste campo e das suas concepções curriculares. Por exemplo, no estudo de Oliveira (1998a, 1998b), uma professora parece ter formado as suas perspectivas sobre o trabalho de investigação matemática enquanto aluna do ensino superior. Outra tinha já ouvido falar bastante acerca do assunto em contextos associativos. Os estagiários que participaram no estudo de Brunheira (2002) evoluíram nas suas perspectivas e nas suas atitudes em relação às actividades de investigação como resultado das experiências positivas que foram tendo na sala de aula bem como do trabalho preparatório e de reflexão realizado com a orientadora. Assim, experiências positivas de realização de investigações matemáticas ou de condução deste tipo de trabalho na sala de aula, enquadradas ou não em actividades de formação inicial ou contínua, parecem ser importantes para melhorar esta relação. Por outro lado, uma perspectiva curricular que encara o programa como uma simples listagem de conteúdos e o papel do professor como o de um transmissor desses conteúdos deixa pouca margem para que os professores decidam ocupar tempo lectivo na realização destas actividades. Pelo contrário, uma perspectiva curricular que valoriza objectivos educacionais mais amplos, entre os quais o desenvolvimento do raciocínio matemático e o pensamento independente, e o papel do professor como o de criador de situações de aprendizagem tende, de forma natural, a valorizar a importância deste tipo de actividades na sala de aula.

### **Conhecimento profissional**

O conhecimento profissional do professor respeitante à realização de actividades de investigação pode ser analisado no plano instrucional – considerando a selecção e preparação das actividades, a sua apresentação aos alunos, a condução do trabalho na aula, a discussão e partilha de estratégias e resultados e a avaliação dos alunos – e no plano curricular – considerando a articulação com o currículo oficial e a gestão curricular. Procuraremos analisar o que nos diz a investigação sobre todas estas questões.

***Seleção e preparação das actividades.*** A fase de planificação envolve a selecção, adaptação ou construção de situações para os alunos investigarem. Isso está longe de ser simples – pelo contrário, como afirmam Oliveira, Ponte, Santos e Brunheira (1999), “é um trabalho criativo (para o qual não há receitas)” (p. 100). Este trabalho envolve a ponderação de diferentes aspectos, tais como as potencialidades e interesses dos alunos, os conhecimentos prévios necessários e os materiais a usar.

Há professores que se mostram capazes de criar tarefas de investigação para usar nas suas aulas. Essa capacidade, no entanto, demora a adquirir. Segundo Santos, Brocardo, Pires e Rosendo (2002), a experiência do *Projecto Matemática para Todos* sugere

que, numa primeira fase, é natural que os professores comecem por utilizar tarefas produzidas por outros, introduzindo-lhes pequenas alterações para as ajustarem aos seus alunos, se for caso disso, e só posteriormente com a aquisição de alguma experiência neste tipo de trabalho é de esperar que comecem a criar novas tarefas de investigação. (p. 90)

As professoras que participaram no estudo de Cunha (1997) mostraram nesta fase grande dificuldade em avaliar o tempo necessário para a realização das tarefas, em perceber como as articular com os conteúdos programáticos e em antever a reacção dos alunos. De algum modo isto é natural, dada a sua total falta de experiência com este tipo de tarefas na sua prática profissional.

Mesmo os professores com experiência sentem necessidade de fazer uma preparação cuidada deste tipo de aulas. Por exemplo, no estudo de Varandas (2000), as duas professoras tiveram facilidade em concordar na escolha das tarefas a realizar, mas sentiram necessidade de discutir em pormenor a sua formulação. Em especial, deram muita atenção ao grau de estruturação das questões considerando que uma tarefa mais estruturada poderia limitar a actividade de investigação de alguns alunos mas também poderia ser vantajosa para os alunos menos habituados a este tipo de trabalho.

Brunheira (2000), no seu estudo com três professores estagiários, observou que o grau de estruturação das tarefas que eles elaboravam foi diminuindo à medida que adquiriam experiência. Além disso, o foco de atenção também foi variando. Numa primeira fase, começaram a atender sobretudo à resolução da tarefa com vista à previsão dos cenários que poderiam surgir na aula; numa segunda fase, levaram a cabo uma preparação mais cuidada em termos do apoio a dar aos alunos; e, finalmente, centraram-se na preparação da apresentação e da discussão final da tarefa.

Planificar aulas com investigações matemáticas não envolve apenas seleccionar ou construir tarefas para os alunos investigarem. Como indicam Santos *et al.* (2002), é igualmente necessário pensar o modo de apresentar a tarefa, escolher a metodologia de trabalho, decidir como questionar os alunos, definir o modo de eles apresentarem o seu trabalho e como reflectir após as aulas para corrigir eventuais problemas que se evidenciem.

Diversos factores poderão influenciar a escolha das tarefas. No estudo de Varandas (2000), a pressão sentida pelas professoras relativamente ao cumprimento dos programas condicionou as suas opções, levando, nomeadamente, à escolha de tarefas com uma relação estreita com os conteúdos previstos para leccionar em cada momento e à necessidade de reajustar o calendário.

**Realização na aula.** A realização de uma actividade de investigação na sala de aula envolve em geral três momentos distintos: a introdução da tarefa, o desenvolvimento do trabalho e a discussão final (Christiansen e Walther, 1986; Ponte, Oliveira, Cunha e Segurado, 1998). A apresentação da tarefa pode ser feita dando mais ou menos informação e pode assumir a forma escrita, oral ou mista (Fonseca, Brunheira e Ponte, 1999). Com alunos mais novos, esta apresentação poderá ser constituída por uma leitura para toda a turma, acompanhada por um algum comentário que o professor julgue pertinente ou por questões que ajudem a verificar se os alunos estão ou não a entender a proposta (Tudella, Ferreira, Bernardo, Pires, Fonseca, e Varandas, 1999). Como alertam estes autores há, por um lado, o risco de se dar demasiada informação, conduzindo os alunos num determinado sentido; por outro lado, dando pouca informação, corre-se o risco da tarefa não ficar suficientemente clara para os alunos, o que pode comprometer desde logo o trabalho a realizar.

Para além do problema da quantidade de informação a dar, há o problema da necessidade de criar desde o início um ambiente de envolvimento dos alunos. É, certamente, mais cómodo distribuir uma folha de papel com um enunciado e esperar que os alunos comecem a trabalhar. Embora isso possa resultar em certas turmas – nomeadamente nas turmas já habituadas a este tipo de trabalho – não deixa de ser uma forma problemática de iniciar este tipo de actividade na sala de aula. Para além de traduzir um relacionamento algo frio e impessoal, dificulta a possibilidade de construir,

pelo diálogo, um sentido comum sobre a natureza do trabalho a desenvolver (Ponte *et al.*, 1998).

Durante o desenvolvimento de uma investigação, a criação de um ambiente de aprendizagem estimulante, em que os alunos se sintam à vontade para pensarem, se questionarem e questionarem os colegas e o professor é uma condição fundamental para o sucesso do trabalho. Particular importância assumem as interações professor-aluno. Por exemplo, H. Fonseca (2000) refere que o papel da professora que participou no seu estudo teve uma influência decisiva sobre os processos matemáticos usados pelos alunos. As suas orientações, fornecendo indicações, sugerindo a selecção de informação e a formulação de questões, contribuíram para que estes analisassem mais casos e propusessem e verificassem conjecturas. Em particular, o incentivo dado pela professora no sentido de fundamentarem a validade das suas conjecturas foi determinante para que os alunos sentissem necessidade de as justificar.

Ponte, Ferreira, Varandas, Brunheira e Oliveira (1999) desenvolveram uma investigação em que analisaram o trabalho do professor durante a realização de investigações matemáticas. Distinguem dois processos de raciocínio didáctico: (i) a recolha de informação, na qual o professor avalia a situação do trabalho, e (ii) a promoção da aprendizagem, que se desenvolve a partir de três acções distintas – explicar, apoiar e sintetizar. A acção do professor pode decorrer nos modos afirmativo, interrogativo ou de gestão. Os dois primeiros incidem directamente sobre o conteúdo matemático e o terceiro tem a ver com o funcionamento da aula. Assim, no modo afirmativo, o professor faz uma afirmação ou clarifica o sentido de afirmações anteriores, explica conceitos ou procedimentos ou valida afirmações dos alunos. No modo interrogativo, pede clarificações, questiona de forma específica, questiona de forma aberta ou pede justificações. E, finalmente, no modo de gestão, gere a situação de ensino-aprendizagem.

Noutro estudo, os mesmos autores (Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira e Varandas, 1998) indicam que o professor é chamado a desempenhar seis papéis fundamentais numa aula em que os alunos realizam actividades de investigação. Um deles, pensar matematicamente em frente dos seus alunos, decorre directamente da própria natureza aberta da tarefa. Dois outros papéis são dar informação e promover a reflexão, e decorrem das duas dimensões fundamentais do currículo, a dos objectivos gerais e a dos

conteúdos particulares. E, finalmente, os três papéis restantes, desafiar os alunos, apoiá-los e avaliar o seu progresso, decorrem da lógica do desenvolvimento de toda a actividade educativa.

No estudo de Cunha (1997), uma das principais dificuldades sentidas pelas professoras diziam respeito ao apoio a prestar aos alunos. Solicitada a esclarecer as suas dúvidas, uma das professoras (Ema) “refere que foi dando indicações que permitiram que os alunos saíssem do impasse a que chegavam. No entanto (...) constatou ter induzido os alunos a seguirem determinados caminhos ou a optarem por certos procedimentos em detrimento de outros” (p. 172). A outra professora “tentou sempre não dar demasiadas instruções aos seus alunos, evitando assim que eles tornassem a realização do trabalho muito dependente da sua presença e dos seus esclarecimentos” (p. 172).

Na verdade, a questão do apoio a prestar aos alunos durante a realização de uma actividade de investigação é uma questão problemática. Uns acham que se deve dar bastante apoio, outros acham que se deve dar pouco, outros, ainda, acham que o apoio a dar depende sobretudo das circunstâncias (Ponte *et al.*, 1998).

A questão do apoio a dar aos alunos é referida no estudo de Oliveira (1998a, 1998b) como uma das principais áreas de dificuldades das duas professoras que participaram no seu estudo. Isso acontece apesar de elas terem estilos de relacionamento com os alunos bastante diferentes – uma delas, Isabel, controla mais o seu trabalho e outra, Teresa, dá-lhes grande autonomia. Isabel, assumindo a necessidade de dar apoio directo aos alunos, considera ser um “desafio encontrar a sugestão adequada para cada situação” (p. 92). Indica sentir-se dividida entre o desejo de dar aos alunos um papel activo no trabalho e o receio que este se prolongue por demasiado tempo. Segundo a investigadora, esta professora “acabou por resolver esse seu conflito diminuindo o grau de exigência quanto às realizações dos alunos, o que observou estar de acordo com os objectivos delineados à partida para essa tarefa” (p. 91). A outra professora, Teresa, indica sentir dificuldade em acompanhar devidamente todos os alunos, dada a dimensão da turma. Considera-se satisfeita com o modo como consegue fomentar a sua autonomia, mas, mesmo assim, acha que por vezes lhes dá sugestões específicas para os ajudar a sair de impasses, o que considera contraditório com o que vê como o seu papel desejável. Nas palavras da investigadora: “porque pretende que a actividade do aluno seja totalmente

independente de si, interroga-se (...) sobre a legitimidade e a pertinência do apoio a conceder [aos alunos] nos momentos de bloqueio” (p. 92).

Noutro estudo, Ponte e Oliveira (em publicação), referem o caso de Catarina, uma professora estagiária empenhada na realização de actividades de investigação nas suas aulas. Esta jovem professora preocupa-se muito em não dar demasiado apoio aos seus alunos do 7º ano de escolaridade, mas revela bastante frustração com a reduzida quantidade de trabalho por eles produzido e mostra-se bastante insegura quanto às suas reais aprendizagens.

Algumas destas posições parecem sugerir que os alunos só trabalharão de modo autónomo se o professor não lhes der qualquer apoio. No entanto, parece recolher um largo consenso o princípio geral, já enunciado por Pólya (1945) no campo da resolução de problemas, que o professor tem de dosear o seu apoio, de modo a que este não seja nem demasiado nem insuficiente. A sua concretização nas diversas situações concretas permanece um campo aberto à discussão. Mais investigações que abordem criticamente esta questão poderão trazer novas achegas em relação a este ponto.

A realização de uma discussão final é uma etapa indispensável para que o conhecimento produzido pelos alunos – trabalhando em grupo ou individualmente – possa ser partilhado por toda a turma. Para além da apresentação de resultados, é importante que possa existir um confronto sério de ideias, justificando as afirmações que se fazem e questionando a validade dessas justificações (Ponte *et al.*, 1998). Trata-se de uma fase particularmente delicada, exigindo do professor boas competências de gestão de discussões bem como boas capacidades de raciocínio matemático. Evitar que os alunos falem todos ao mesmo tempo e mostrem pouco interesse em ouvir os outros são situações que a maioria dos professores procura a evitar. Como indica Brunheira (2000), conduzir estas discussões de forma eficaz, abrindo amplo espaço para a participação dos alunos e sem assumir um protagonismo excessivo, não é uma tarefa fácil.

Não será de admirar, portanto, que a discussão constitua uma fase em que muitos professores manifestam dificuldades. Por exemplo, Teresa, uma das professoras que participou no estudo de Oliveira (1998b), “considera que o seu papel é o de estimular e sustentar a participação dos alunos e gerir as suas intervenções”, e indica que isto tem sido difícil para si (p. 94). Isabel, a outra professora que participou nesse estudo, manifestou “algum receio de não conseguir estimular e gerir a participação dos alunos,

uma vez que possuía uma experiência muito limitada em aulas deste tipo” (p. 94). Ao reflectir sobre um episódio de discussão que tinha dirigido, esta professora justifica o facto de ter existido “pouca interacção entre os alunos e pouca oportunidade para explicarem” o que fizeram com “as limitações de tempo” (p. 94).

Os trabalhos realizados evidenciam um conjunto de cuidados que o professor deve ter na apresentação da tarefa, na sua interacção com os alunos no decorrer da sua realização e na fase de discussão e partilha de resultados. A decisão sobre a informação inicial a dar aos alunos e sobre o apoio a proporcionar-lhes quando sentem dificuldades tem de ser tomada, em cada caso concreto, em função das características dos alunos e da experiência de trabalho que o professor tem com a turma. A condução da discussão final requer do professor boa preparação matemática e capacidade de gestão da dinâmica colectiva, requerendo uma atenção especial em programas de formação.

***Avaliação dos alunos.*** Ao introduzir nas suas aulas actividades de investigação matemática, uma das questões que o professor tem que enfrentar é a da avaliação dos alunos. Estes precisam de receber *feedback* quanto ao seu desempenho nestas actividades. Além disso têm natural expectativa em ver como é que o seu trabalho é tido em conta na avaliação formativa e sumativa periodicamente realizada pelo professor.

Um estudo, realizado por Varandas (2001), centrou-se principalmente nesta questão. Participaram duas turmas de 10º ano e as respectivas professoras que trabalharam de uma forma colaborativa com o investigador. Foram experimentados quatro modos de avaliação: (i) trabalho em grupo e relatório em grupo; (ii) trabalho em grupo e relatório individual; (iii) trabalho em grupo e apresentação oral; e (iv) trabalho individual e relatório individual, em tempo limitado. Como suporte geral da avaliação foi desenvolvida uma tabela de descritores de diversos níveis de desempenho dos alunos.

Segundo as professoras, todos os instrumentos, embora com características e potencialidades diversas, provaram ter valor como fonte de informação, contribuindo para a clarificação da imagem que eles formam dos seus alunos. Os descritores usados em conjunto com os quatro instrumentos, revelaram-se de muito interesse na avaliação do trabalho investigativo e na elaboração dos comentários para os alunos. Além de uma visão global sobre a forma como os alunos realizaram a investigação, permitiram uma avaliação sobre aspectos específicos tais como o conhecimento matemático, o conhecimento das estratégias e as competências de comunicação.

As professoras seguiram metodologias diferentes de avaliação e estas não sofreram grandes alterações com o seu envolvimento no estudo. Uma delas afirmou que o modo de avaliação (iv) foi o que lhe permitiu avaliar melhor o processo investigativo de cada aluno. Contudo, para uma avaliação global do trabalho da turma, a sua escolha recaía sobre o modo (iii). Para si, este modo, envolvendo a participação obrigatória de todos os alunos do grupo, permitiu uma recolha de elementos que seria difícil de obter por outro processo, orientar a fase de discussão da tarefa e combater a influência de terceiros nos trabalhos realizados em casa. A outra professora valorizou sobretudo a diversidade das formas de avaliação experimentadas. Revelou, ainda, que a forma como os vários modos de avaliação foram surgindo lhe pareceu a mais indicada. Considerando a avaliação na perspectiva de obter uma classificação para os alunos, a sua preferência seria também o modo (iv).

Para o investigador, o estudo evidenciou a forte influência que o sistema de ensino exerce tanto nas professoras como nos alunos. Acreditando fortemente na vertente formativa da avaliação mas sentindo-se constrangidas a realizar uma avaliação sumativa, as professoras criaram o seu próprio sistema de avaliação, que nem sempre se tornou muito claro para os alunos, apesar de elas disponibilizarem ocasiões para o explicarem.

A elaboração de relatórios finais sobre o trabalho desenvolvido em actividades de investigação tem sido, de longe, a forma de avaliação mais comum em estudos realizados em Portugal (por exemplo, Brunheira, 2000; Fonseca, 2000; Oliveira, 1998a). Os relatórios obrigam os alunos a reflectir sobre o trabalho realizado na sua investigação levando-os a aprofundar e clarificar, muitas vezes, aspectos menos conseguidos. Santos *et al.* (2002), no entanto, fazem notar “que o pedido sistemático de relatórios [pode], aos olhos dos alunos, tornar-se uma tarefa demasiado exigente e como tal causar uma reacção menos favorável da sua parte” (p. 102). Outra forma também usual de levar os alunos a sistematizar o seu trabalho são as apresentações orais à turma (Sousa, 2002; Varandas, 2000). Num estudo realizado por Brocardo (2002), foram ainda usadas com bastante sucesso uma sessão pública de apresentação do trabalho a pessoas exteriores à turma e uma sessão prática para professores de Matemática da escola.

É de notar que os relatórios escritos podem ajudar os alunos a estruturar ideias ao mesmo tempo que constituem para o professor um meio de recolher informação sobre o nível de consecução dos objectivos definidos. Isto assume consequências muito

diferentes no quadro de uma avaliação sumativa ou formativa. Se os alunos sentem que o que entregam ao professor constitui uma base para serem classificados, evitam incluir os erros e pistas falsas que exploraram e mais tarde abandonaram. Isso mesmo foi verificado no estudo realizado por Oliveira (1998a), cujas professoras insistiam na necessidade dos alunos fazerem registos e no final da aula recolhiam essas folhas. Esta investigadora sugere que isto pode ser muito mais problemático do que o que parece à primeira vista, uma vez que a percepção que a sua classificação está em jogo leva, naturalmente, os alunos a retraírem-se bastante relativamente ao que escrevem nas suas notas.

***Perspectiva curricular e gestão curricular.*** A dificuldade de compatibilização das actividades de investigação com a existência de um programa nacional para a disciplina de Matemática é um tema que emerge, recorrentemente, em numerosos estudos. É o caso, por exemplo, dos professores que participaram nas investigações de Brunheira (2000), Cunha (1998), Oliveira (1998a, 1998b), Selas (2002) e Varandas (2000). Eles consideram que o tratamento dos temas estabelecidos nos programas constitui uma responsabilidade prioritária e que as actividades de investigação, ou conduzem a uma progressão mais lenta, ou não ajudam a aprendizagem daqueles temas. Esta dificuldade mostra, sobretudo, que a visão do currículo como uma listagem de temas a tratar continua a ser dominante, não só entre os professores do ensino secundário, mas também entre os professores dos 2º e 3º ciclos do ensino básico. Como sinal positivo, verifica-se que alguns professores que participaram naqueles estudos reconhecem que as actividades de investigação se enquadram nos objectivos gerais dos programas. Só que, para estes professores, tais objectivos são secundários face aos conteúdos.

Para os professores que têm vindo a realizar experiências com actividades de investigação nas suas aulas, o enquadramento curricular tende a surgir de modo diferente. É o que acontece nos trabalhos de Alexandra Rocha (2002), Irene Segurado (2002) e Olívia Sousa (2002), onde se valoriza mais os objectivos gerais do que os temas específicos dos programas e se usa esse argumento para justificar a atenção dada a estas actividades. Também se pode argumentar que a realização de actividades de investigação permite mobilizar conhecimentos de diversos tópicos programáticos (Ponte *et al.*, 1998; Ponte e Segurado, 1998; Sousa, 2002), traduzindo-se portanto num reforço das aprendizagens e não numa perda de tempo.

Para além de assumir uma dada perspectiva curricular, todo o professor realiza uma gestão curricular. Esta inclui questões como a importância que as actividades de investigação assumem nas práticas lectivas e o modo como se articulam com actividades de outros tipos. Inclui, igualmente, a forma como as actividades de investigação são abordadas na sala de aula.

Na verdade, uma das questões que o professor tem de decidir é o modo como os alunos vão trabalhar: colectivamente como turma, individualmente ou em pequenos grupos e, neste caso, como constituir os grupos. De resto, as formas de trabalho podem variar ao longo das diversas fases. Nas investigações realizadas em Portugal, tem sido muito comum começar por apresentar a tarefa a toda a turma, depois organizar os alunos em pequenos grupos para a explorar e apresentar e, finalmente, discutir os resultados com os alunos de novo colectivamente, com toda a turma. É o que acontece, por exemplo, nos estudos de Ponte, Oliveira *et al.* (1998), Oliveira (1998a), Brunheira (2000), Fonseca (2000) e Brocardo (2001a). O trabalho em pequenos grupos permite a exploração de ideias matemáticas num ambiente em que os alunos se sentem muito à vontade (Brocardo, 2001a; Fonseca, 2000). A exploração de tarefas com toda a turma pode ser vantajosa em certos momentos, permitindo discussões aprofundadas e ajudando à institucionalização de certos significados (Brocardo, 2001a; Ponte, Ferreira *et al.*, 1998; Ponte, Oliveira *et al.*, 1998). O próprio trabalho individual pode ter o seu papel. A este respeito, Varandas (2000), relata que as professoras que participaram no seu estudo tinham à partida a convicção que o trabalho individual era inadequado para a realização de investigações. Contudo, tendo experimentado a sua realização, passaram a reconhecer-lhe aspectos positivos. Também Fonseca (2000) conclui do seu estudo realizado com alunos do 10º ano que o trabalho individual deve ser tido em conta nas actividades de investigação. Assim, a questão de saber o lugar que o trabalho individual pode ter na realização destas actividades, particularmente com alunos de níveis etários mais avançados, mereceria, possivelmente, mais atenção em futuras investigações.

Durante a realização de uma investigação na sala de aula, muitas questões se podem colocar. Uma é a de saber quando dar por terminada a exploração de uma certa questão e passar à questão seguinte (Goldenberg, 1999). O professor move-se entre o risco de se parar cedo demais, não permitindo que o aluno faça todas as descobertas que estariam ao seu alcance ou prolongar demais a actividade, criando desmotivação e cansaço

desnecessários (como, de resto, refere a professora Teresa do estudo de Oliveira, 1998b).

Associado a esta questão está o problema de saber até onde ir na justificação das conjecturas apresentadas pelos alunos – o professor deve satisfazer-se com justificações informais ou pedir aos alunos provas matemáticas das suas afirmações? Oliveira (1998b) considera que este é um campo de dificuldades de ambas as professoras do seu estudo. Uma assume-o explicitamente e a outra por não dá muita atenção a esta questão:

Outro aspecto que se revelou problemático para Teresa foi estabelecer o que seria razoável pedir para os alunos justificarem ou provarem. (...)

No caso de Isabel, embora procurasse, em algumas situações, que os alunos justificassem as suas afirmações, a questão da prova nunca foi explicitamente discutida no decorrer das suas aulas com as actividades de investigação (...) [A professora] identifica esse facto como uma lacuna... (p. 92)

Outra questão é a do tempo necessário para realizar este tipo de trabalho. As aulas de 50 minutos revelaram-se insuficientes para iniciar e terminar uma investigação matemática (Oliveira, 1998a) e, em muitos casos, os professores usam duas ou três aulas para este tipo de actividade (A. Rocha, 2002; Segurado, 2002). Por vezes, quando a investigação é bastante complexa, mais tempo é necessário. Por exemplo, Sousa (2002) relata uma investigação estatística cuja realização, inicialmente prevista para cinco aulas de 90 minutos, acabou por ocupar seis aulas e uma sessão extra adicional.

Finalmente, a questão de como articular as actividades de investigação relativamente a outros tópicos e a importância geral que elas podem assumir não tem sido directamente abordada em investigações empíricas. Nos estudos de Alexandra Rocha (2002) e Irene Segurado (2002) estas actividades surgiam ao ritmo de uma por mês. No estudo de Brocardo (2002) surgiam em média quinzenalmente. Num artigo de natureza teórica, Silva, Veloso, Porfírio e Abrantes (1999) sugerem que a sua presença pode ser ainda mais forte, mas são necessárias experiências concretas para o demonstrar.

### **Actividades de investigação na formação inicial de professores**

As actividades de investigação matemática têm estado em foco em algumas experiências realizadas em disciplinas de cursos de formação inicial de professores. Uma dessas experiências, realizada por Lina Fonseca (2002), que assumiu os papéis de professora e investigadora, teve lugar num curso de formação de professores de

Matemática e Ciências da Natureza do 2º ciclo do ensino básico de uma escola superior de educação. Participaram todos os alunos de duas disciplinas, Geometria (2º ano) e Transformações Geométricas (4º ano). Nestas disciplinas foi dada grande ênfase à resolução de problemas e também à realização de explorações e investigações matemáticas, com recurso às novas tecnologias, nomeadamente ao programa *The Geometer's Sketchpad* (GSP). Os futuros professores consideraram a metodologia adoptada inovadora e vantajosa para a sua aprendizagem. Segundo a autora,

Eles são unânimes em dizer que aprenderam “muitas coisas” e de modo diferente do habitual... “aprendemos a pensar, a reflectir”. Aprenderam que o mesmo problema se pode resolver de vários modos, que na resolução de tarefas “tanto raciocínio como explicação são importantes” e ainda que “diferentes assuntos podem ser relacionados”. Pelo facto de se envolverem muito mais parece que os futuros professores compreendem melhor os assuntos que trabalham. (p. 220)

Além disso, eles reconheceram a importância dos momentos de discussão colectiva realizados nas aulas; na sua maioria, revelaram sentir-se motivados para expor os seus pensamentos nessas discussões mas, em contrapartida, alguns mostraram-se pouco à vontade para o fazer. A maioria dos participantes achou as tarefas interessantes mas alguns consideraram que o ritmo das aulas era demasiado intenso e as tarefas algo difíceis. A investigadora considera que houve uma notória evolução na sua capacidade de formularem e avaliarem conjecturas, principalmente quando trabalhavam com o GSP.

Noutro estudo, Helena Fonseca (2002), leccionou uma disciplina num curso de formação inicial de professores de uma universidade inteiramente consagrada à realização de investigações matemáticas na sala de aula. Uma decisão importante foi a de organizar esta disciplina de modo a evitar que assumisse um carácter escolar, tornando-se ela própria, uma aprendizagem por investigação. A disciplina desenvolveu-se em três grandes segmentos: (i) investigar as investigações matemáticas; (ii) investigar as aulas de investigação e o trabalho do professor; e (iii) investigar um tema matemático. Segundo a professora, que assumiu também o papel de investigadora sobre a sua prática, no início do semestre os futuros professores tinham um conhecimento reduzido sobre a realização de investigações, mas no final perceberam as suas potencialidades e saíram com mais confiança para o pôr em prática. Na sua perspectiva, o balanço que os participantes fazem desta disciplina é muito positivo, porque gostaram

de realizar este tipo de tarefas ou porque acharam que elas são adequadas como ponto de partida para a aprendizagem dos seus futuros alunos.

Outros estudos têm-se debruçado sobre a fase do estágio. Por exemplo, Ponte (2001) refere um projecto, realizado por um grupo de professoras estagiárias, sobre o papel das actividades de investigação no ensino da Matemática. Estas professoras, depois de recolherem alguma informação sobre as potencialidades deste tipo de tarefas na sala de aula e sobre o modo de as conduzir, decidiram implementá-las com os seus alunos. Durante a sua realização foram recolhendo dados para reflectir sobre o trabalho, que sistematizam num relatório final. Na sua conclusão, as estagiárias referem:

O trabalho que desenvolvemos durante este ano lectivo fez-nos considerar que as actividades de investigação são estimulantes para os alunos assim como para nós. Isto é porque pensamos que esta abordagem é uma “verdadeira actividade matemática” e desenvolve capacidades, atitudes e valores que outras estratégias pedagógicas não desenvolvem tão eficazmente. (p. 64)

Brunheira (2002a), nos papéis de orientadora pedagógica da universidade e de investigadora, conduziu um estudo com três professores estagiários que assumiram o projecto de realizar actividades de investigação nas suas aulas e reflectir sobre elas. No fim do ano, os estagiários fizeram um balanço global bastante positivo. Consideram as suas atrapalhações iniciais algo caricatas e reconhecem que terão ainda muito para aprender, em particular no que respeita às aulas de trabalho investigativo. Destacam sobretudo três aspectos: (i) a importância do trabalho colaborativo realizado no seio do núcleo que, na sua perspectiva, favoreceu o aumento das suas competências profissionais em vários aspectos relacionados com o trabalho investigativo; (ii) a evolução na sua forma de encarar as investigações, a que atribuem agora mais importância, compreendendo melhor o seu papel na realização na sala de aula e sentindo mais confiança; e (iii) o seu próprio desempenho em aulas de trabalho investigativo.

Analisando em especial o caso de Ana, uma futura professora, Brunheira (2002b) refere que a experiência realizada durante o estágio reforçou algumas das suas ideias iniciais e alargou a sua visão relativamente às potencialidades destas actividades. Apesar das dificuldades que ela e os seus alunos tiveram nesta experiência, a estagiária faz um balanço positivo da evolução que eles revelaram neste tipo de tarefas. O seu desempenho e as reacções dos seus alunos deram também mais confiança à professora. Ana enuncia diversas aprendizagens que realizou. Inicialmente, quase ignorou as fases

de introdução da tarefa e da discussão dos resultados. No final do ano, já dava bastante importância à discussão final que, na sua perspectiva, “serve para os alunos apresentarem o que fizeram, como o fizeram e o que é que se pode saber com o que se descobriu” (p. 14). A fase de realização da investigação pelos alunos foi a que exigiu maior preparação da sua parte. Esta jovem professora, que manifesta abertura para reflectir sobre a sua prática, apresenta quatro aspectos que contribuíram para a evolução do seu conhecimento e atitudes relativas à realização de actividades de investigação na sala de aula: (i) a experiência, (ii) a reflexão, (iii) a interacção com colegas e orientadoras e (iv) a leitura de textos sobre o tema.

Noutro trabalho, Fernanda Perez (2002) relata uma experiência realizada durante o estágio, envolvendo um projecto de investigação-acção de duas professoras estagiárias, cujo objectivo era ver se a inclusão de actividades de investigação-exploração nas aulas de Matemática tinha potencialidades para promover o sucesso dos alunos na aprendizagem. A autora, que assumiu os papéis de orientadora de estágio por parte da escola e investigadora, relata um episódio em que se fez no núcleo a análise de uma tarefa, *a posteriori*, tendo-se verificado que esta tinha muito mais potencialidades do que as que tinham sido inicialmente percebidas e exploradas pelas estagiárias. Segundo ela, a oportunidade para esta reflexão foi dada pela realização do trabalho de investigação-acção. Em termos gerais, considera que este projecto teve um balanço positivo, permitindo concretizar uma intenção de formação assente na reflexão e na capacidade de resolver problemas da prática. Na sua perspectiva, o projecto foi prejudicado por ter sido objecto de avaliação pela orientadora pedagógica da universidade. Apesar disso, no seu entender, o projecto proporcionou importantes aprendizagens às professoras, (i) relativamente ao seu desempenho nas fases de selecção das tarefas, na realização da actividade e nas discussões finais, e (ii) levando-as a reforçar o reconhecimento da sua importância, embora de forma bastante condicionada pela preocupação em cumprir todo o programa. As estagiárias indicam que, no seu desenvolvimento profissional, este projecto não assumiu uma expressão muito forte. Elas consideram que reflectir sobre a prática é importante mas dão a entender que, para isso, não será necessário fazer investigação-acção. Segundo a investigadora, no entanto, a realização do projecto contribuiu para que as estagiárias construíssem uma postura de profissionais reflexivas.

Nestes estudos, os investigadores tiram também conclusões relativamente ao seu papel como formadores – enquanto professores de disciplinas da instituição de formação ou orientadores de estágio. Assim, Lina Fonseca (2002) indica ter aprendido que organizar o ensino com esta metodologia é difícil, a três níveis:

É matematicamente difícil porque não é possível “preparar” todas as dificuldades que os alunos podem vir a apresentar, visto que não se sabe que caminhos irão trilhar, se esses caminhos são produtivos e o que os faz ser assim. É pedagogicamente difícil porque é necessário decidir quando intervir, como intervir, que sugestões dar a cada aluno ou a cada grupo sempre que surge uma situação de impasse e como gerir o tempo necessário para as tarefas. É pessoalmente difícil pelo facto de, por vezes, o professor se sentir na posição de não saber, o que é desconfortável e pouco usual. (p. 220)

Na sua auto-análise, a autora nota que nem sempre actua de acordo com as suas intenções iniciais e que, tal como os professores do ensino não superior, também sofre uma pressão para o cumprimento do programa. No entanto, na sua perspectiva, os resultados conseguidos mostram que vale a pena procurar trazer “os princípios para a prática”.

Por seu lado, Helena Fonseca (2002), no seu balanço como professora, afirma ter reforçado a sua convicção que, para dotar os futuros professores de uma formação sobre o trabalho de investigação, é necessário que eles tenham oportunidade de o realizar de forma continuada. Reconhece que a lógica investigativa em que a disciplina foi construída resultou muito bem e considera que os três segmentos foram todos importantes. Na sua perspectiva, os futuros professores fizeram um conjunto de aprendizagens significativo sobre as investigações e ficaram com uma atitude favorável a seu respeito. Considera, no entanto, que esta experiência, provavelmente, foi insuficiente para que eles venham a pôr em prática este tipo de trabalho nas suas aulas. Para que isso tenha mais possibilidades de acontecer, recomenda que o trabalho investigativo assuma uma maior presença noutras disciplinas da formação inicial.

Brunheira (2002a) reflecte, também, sobre as suas aprendizagens enquanto orientadora de estágio por parte da universidade. Assume que o seu trabalho constituiu uma forma de investigação-acção. Indica o modo cuidadoso como discutiu com os estagiários o trabalho a realizar de forma a que estes sentissem viável incluir estas actividades nas suas aulas. Em congruência com o indicado por Ponte *et al.* (1999) relativamente aos professores do ensino básico, refere também que o seu papel como orientadora se

desenvolveu em três modos: apoiar, desafiar e promover a reflexão. Indica ter reforçado a sua perspectiva que os professores estagiários devem aproveitar o contexto colaborativo do estágio para investirem na resolução de problemas emergentes da sua prática lectiva. Esta investigadora acha que o trabalho realizado pelos estagiários se aproximou de uma investigação-acção e apresenta uma proposta mais elaborada nesse sentido para trabalho futuro.

Finalmente, Perez (2002), ao analisar o seu desempenho como orientadora de estágio, considera que este trabalho a levou a tomar uma nova atitude. Segundo refere, em vez de agir em função dos acontecimentos, passou a ter uma linha de trabalho mais estruturada, o que permitiu um constante repensar da sua acção como orientadora.

Serrazina, Vale, Fonseca e Pimentel (2002) consideram que os projectos de investigação sobre a prática profissional poderão vir a assumir um papel significativo na formação inicial de professores. No entanto, sublinham que, para isso, será necessário criar condições favoráveis ao seu envolvimento nestes projectos e conciliá-los com o sistema de avaliação.

Em termos gerais, verificamos que as actividades de investigação têm vindo a ser introduzidas em diversos momentos da formação inicial de professores, sendo acolhidas por vezes com algumas reservas, outras vezes de modo favorável pelos futuros professores. As suas resistências surgem, por vezes, por estes não se sentirem bem na realização destas actividades, dada a sua experiência anterior de aprendizagem da Matemática, muito mais baseada em actividades fechadas e repetitivas. Outras vezes surgem por sentirem que se trata de actividades pouco valorizadas no currículo oficial e no sistema de avaliação e pouco presentes na prática profissional, e além disso, cuja realização em aula coloca muito mais problemas ao professor do que as actividades mais tradicionais, como a exposição de matéria e a realização de exercícios. Em contrapartida, como notam Serrazina, Vale, Fonseca e Pimentel (2002), as reacções favoráveis às tarefas de investigação parecem ser “tanto mais positivas quando mais eles se envolvem pessoalmente na sua realização” (p. 50).

Embora seja importante que os cursos de formação inicial de professores façam uma sensibilização neste campo, não nos devemos esquecer que no processo de socialização profissional os jovens professores irão ainda ser sujeitos a muitas experiências, algumas delas marcantes e possivelmente contraditórias com estas perspectivas. O papel que esta

perspectiva curricular poderá assumir nas suas práticas depende, por isso, tanto do trabalho que for feito nesta altura como do modo como se processar a sua integração profissional.

É interessante verificar como, nos anos mais recentes, estas actividades não só têm vindo a ser introduzidas na formação inicial de professores, como os respectivos docentes se têm vindo a preocupar com o modo como podem melhorar o seu alcance, numa lógica de investigação sobre a sua própria prática profissional. Na verdade, como apontam Serrazina, Vale, Fonseca e Pimentel (2002), um dos pontos de convergência dos estudos realizados neste campo em Portugal é que “a formação de professores sobre as potencialidades do trabalho investigativo deve revestir, também ela, uma natureza investigativa” (p. 50).

### **Actividades de investigação na formação contínua de professores**

Ponte, Ferreira *et al.* (1998) referem diversas exigências que a realização de aulas investigativas colocam aos professores. Na sua perspectiva, estes precisam de

- (a) perspectivar a Matemática não como uma actividade em que se memorizam definições e obtêm as respostas correctas, mas em que as acções de questionar, pensar, corrigir, confirmar são características essenciais;
- (b) ser competentes na realização de investigações matemáticas, sentindo-se à vontade quando confrontados com situações complexas e imprevisíveis;
- (c) valorizar um tipo diferente de objectivos curriculares, como um vasto leque de capacidades, muito para além da destreza no cálculo e do conhecimento de factos matemáticos básicos;
- (d) desenvolver a sua criatividade curricular a fim de conceber e adaptar tarefas adequadas para os alunos;
- (e) assumir uma perspectiva da aprendizagem dos alunos baseada na actividade, na interacção e na reflexão; e
- (f) ser capazes de conduzir uma aula com uma dinâmica muito diferente da aula usual, sem orientar os alunos de forma excessiva ou insuficiente (...), proporcionando-lhes uma experiência de aprendizagem mais autónoma mas também mais interactiva (tanto no trabalho do grupo como em discussões colectivas). (1998, p. 13)

Para estes autores, isso estará ao alcance dos professores desde que se cumpram duas condições: que este tipo de ensino seja assumido como um objectivo pessoal pelo

professor e que este tenha apoio de diversas fontes, desde a sua escola às autoridades educacionais.

Diversas experiências com actividades de investigação têm sido realizadas por professores que assumem investigar a sua prática ou por equipas colaborativas de professores e investigadores. Assim, Rocha (2002) realizou uma experiência continuada nas suas aulas, ao longo do ano lectivo. No seu balanço, conclui que, como professora, evoluiu na forma de conduzir as suas aulas, adquirindo uma melhor compreensão da actividade dos alunos, o que lhe permitiu gerir melhor o tempo a dedicar a cada momento de investigação. Considera, ainda, que desenvolveu a sua competência no modo de questionar os alunos e indica que o seu receio inicial que os alunos pudessem fazer-lhe perguntas a que não soubesse responder foi desaparecendo progressivamente. As situações inesperadas em que se envolveu em exploração e investigação com os alunos ajudaram-na a desenvolver a capacidade de os ouvir sem interromper os seus raciocínios. Inicialmente, a selecção das tarefas constituiu um trabalho árduo que se foi tornando mais fácil à medida que aumentava o seu conhecimento dos alunos e da sua actividade. Finalmente, este estudo permitiu-lhe observar que os alunos são capazes de se envolver em actividades de investigação, e que isso influenciou o modo como perspectivam a aprendizagem da disciplina e o papel do professor.

Num outro estudo, Sousa (2002) colaborou com outra professora, na realização de investigações estatísticas, num regime de “par pedagógico”. Considera que este funcionamento apresentou vantagens para os alunos e para as professoras. Os alunos receberam um apoio mais eficaz, uma vez que as professoras, não estando pressionadas pelas solicitações simultâneas de vários grupos, tiveram mais tempo para os questionar e orientar. Além disso, a redução dos tempos de espera para o esclarecimento das suas dúvidas permitiu melhorar a qualidade e o ritmo do seu trabalho. Para as professoras, este funcionamento permitiu tirar partido das potencialidades do trabalho colaborativo na preparação e na concretização da experiência. Assim, foi possível antever uma maior quantidade e diversidade de ocorrências e reflectir sobre os modos de as resolver. Além disso, a reflexão conjunta, no final de cada aula, proporcionou uma melhor compreensão do modo como os alunos viveram a experiência e permitiu o ajustamento dos planos sempre que necessário. Considera ainda que este tipo de funcionamento também se mostrou vantajoso para a sua investigação permitindo (i) minimizar a interferência provocada pela sua presença na sala de aula, (ii) efectuar uma recolha de

dados mais consistente, sendo a sua observação enriquecida e completada com a perspectiva da professora da turma, e (iii) estabelecer um contacto mais próximo com os alunos, levando-a a aperceber-se das dificuldades que sentiam e do modo como as ultrapassavam, e assim compreender melhor o seu desempenho.

Esta professora considera que, ao longo deste estudo, percorreu um longo caminho em termos do seu desenvolvimento profissional. Entre as coisas que aprendeu, destaca as metodologias de investigação. Durante esta experiência, observou algumas das potencialidades das investigações estatísticas não apenas como forma de ensinar os conteúdos estatísticos mas como modo privilegiado de pôr em prática um ensino integrado, proporcionando aos alunos contextos de aprendizagem significativos, onde podem discutir temas interessantes ao mesmo tempo que aprendem e consolidam conceitos e procedimentos matemáticos. A forma entusiasta como os alunos aderiram a esta tarefa fê-la reflectir sobre a sua prática, onde considera utilizar ainda demasiado tempo no treino repetitivo, isolado e sem significado de procedimentos. A professora afirma ter consciência das dificuldades envolvidas na realização de investigações estatísticas, desde a procura de temas até à orientação de discussões envolvendo toda a turma. No entanto, mostra-se convencida que este tipo de tarefas no futuro terá uma maior expressão nas suas aulas.

Ponte, Oliveira e Segurado (2003) descrevem um trabalho colaborativo de longa duração, orientado para a realização de investigações matemáticas na sala de aula. Segundo indicam, o sucesso deste trabalho resulta em grande parte de terem desenvolvido objectivos comuns. Consideram que, embora tivessem por base o conhecimento e a experiência individual de cada um dos membros do grupo, construíram em conjunto algo que era bastante diferente da simples soma das partes. Os autores concluem que o trabalho colaborativo dos professores com formadores e com outros professores é uma forma natural de se envolverem na realização de investigações matemáticas na sua prática profissional.

Porfírio e Abrantes (1999) discutem as condições que contribuíram para o êxito de um trabalho de colaboração prolongado entre uma professora e uma investigadora. Em primeiro lugar, indicam o facto de a investigação se centrar no currículo e na prática lectiva, sendo o desenvolvimento curricular visto como um processo contínuo de adaptação e aperfeiçoamento. Em segundo lugar, referem que a professora gostava de

acompanhar o desenvolvimento dos resultados e ideias da investigação. Em terceiro lugar, sublinham a perspectiva que a professora assume sobre o seu desenvolvimento profissional, encarando a sua participação no projecto como uma forma de transformar ideias teóricas em acções práticas, reconhecendo, além disso, o valor do trabalho de equipa. E, em quarto lugar, apontam o facto desta experiência se ter integrado num projecto mais amplo que envolve professores e investigadores, num ambiente que favorece a discussão e a reflexão.

No campo da formação contínua de professores, Santos e Ponte (2003) documentam a realização de um círculo de estudos, no formato de educação a distância. Nesta acção de formação, os professores – dos mais diversos pontos do país e até alguns do Brasil – trabalhavam em grupos de dois elementos, lendo e discutindo textos sobre assuntos relacionados com as actividades de investigação e a sua realização na sala de aula e realizavam tarefas que pressupunham reflexão crítica, pesquisa e experimentação na sala de aula. Os autores indicam que a grande maioria dos participantes considera que este círculo de estudos foi uma experiência positiva de desenvolvimento profissional, tendo-os ajudado a reflectir sobre diversas questões e ajudado a compreender melhor o papel das investigações no currículo, valorizando muito a possibilidade de trabalhar autónoma e colaborativamente.

A experimentação de novos suportes de formação a distância, permitindo chegar a públicos mais diversificados e ensaiar novas formas de interacção profissional é um desenvolvimento interessante no campo da formação contínua de professores. No entanto, o aspecto mais saliente neste campo é o surgimento de estudos realizados por professores no âmbito da sua própria prática profissional, envolvendo o tema das investigações matemáticas. São os próprios professores, interessados em experimentar esta abordagem que procuram conceber as formas de a concretizar e de avaliar os seus efeitos, por vezes de modo individual, mas mais frequentemente vezes em colaboração com colegas ou integrados em equipas mistas de professores e investigadores. Isto sugere que, mais do que cursos formais, será sobretudo através do apoio a projectos e experiências, que se deve perspectivar o desenvolvimento profissional dos professores neste domínio.

## **Conclusão**

Existe em Portugal um corpo significativo de estudos sobre o tema das investigações matemáticas, como perspectiva curricular e como proposta de formação de professores. Grande parte destes trabalhos tem sido feita no quadro de teses de mestrado havendo, também, uma tese de doutoramento consagrada a este tema (Brocardo, 2002) e várias outras onde ele é abordado com algum relevo (Abrantes, 1994; Matos, 1991). É ainda de assinalar a existência de alguns projectos nesta área, com destaque para o *Matemática para Todos* e o lugar virtual *Investigar e Aprender* (<http://ia.fc.ul.pt>), que promove o círculo de estudos a distância *Aprender Matemática Investigando*. Além disso, este tema foi o núcleo temático de um encontro anual da Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação e tem vindo a ser regularmente debatido noutros seminários de investigação e encontros profissionais de professores.

A legitimidade conceptual desta proposta apoia-se sobretudo no testemunho de matemáticos que reflectem sobre a sua experiência de investigação e consideram que ela, com as necessárias adaptações, está ao alcance da generalidade dos alunos. Para isso, naturalmente, é preciso subscrever um conceito amplo de investigação, que valoriza sobretudo a importância das questões e da atitude questionante e não tanto os aspectos técnicos ou formais da actividade investigativa referenciada às práticas dos investigadores profissionais. Na Matemática escolar, as investigações constituem um tipo de tarefa com características bem definidas, ao lado dos exercícios e dos problemas. Na sua realização reconhecem-se diversos momentos, como a colocação de questões, a formulação, teste e refinamento de conjecturas e a sua justificação. De especial importância é a articulação entre investigação e demonstração, dado o papel central que esta última assume na actividade matemática.

A legitimidade curricular das investigações matemáticas apoia-se, antes de mais, nas formulações escritas dos documentos curriculares. Tanto em Portugal como noutros países existe um amplo acolhimento desta perspectiva nos textos oficiais. No entanto, ela não constitui um eixo central destes textos e não é vista como tal pela generalidade dos professores. Além disso, trata-se de uma perspectiva que não é fácil de compatibilizar com as práticas tradicionais de avaliação, baseadas sobretudo em testes e exames escritos. Deste modo, podemos dizer que esta perspectiva vive num quadro de ambiguidade curricular, sendo valorizada por alguns núcleos de professores e ignorada

por muitos outros. Para os alunos e para a sociedade em geral, as investigações são uma ideia com reduzida visibilidade, que aceitam ou rejeitam conforme o seu grau de abertura a perspectivas educacionais inovadoras e a sua valorização de indicadores tradicionais da excelência matemática, como a proficiência no cálculo numérico ou algébrico.

Apesar desta legitimidade conceptual e curricular, há uma questão ainda não completamente clarificada sobre a natureza das actividades de investigação: há vantagem em que estas se situem em contextos essencialmente matemáticos, ou elas devem ser, pelo contrário, estendidas a contextos realísticos? Por outras palavras, a actividade inspiradora deve ser sobretudo a do matemático puro ou a do engenheiro? Skovsmose (2000), por exemplo, defende a coexistência dos dois tipos de situações. A realização de investigações no quadro de situações contextualizadas pode contribuir para atingir importantes objectivos curriculares, mas, por outro lado, coloca ao professor problemas didácticos e curriculares bastante complicados. Trata-se de uma questão a merecer mais reflexão teórica e mais atenção em futuros trabalhos.

Nos estudos realizados no nosso país, existem numerosos exemplos que atestam o grande entusiasmo e envolvimento dos alunos na realização de investigações matemáticas. Este envolvimento constitui uma base fundamental para a aprendizagem e esta tem sido bem documentada no que respeita às diversas fases da realização de investigações matemáticas, a diversos objectivos transversais (em especial, a capacidade de comunicação oral e escrita, o desenvolvimento da autonomia e a capacidade de trabalhar em grupo), bem como no que se refere à mudança das concepções dos alunos. No entanto, as aprendizagens concretas dos alunos em tópicos matemáticos específicos não têm sido abordados com igual profundidade, se exceptuarmos o trabalho de Junqueira em Geometria e Sousa em Estatística. Trata-se de um ponto que merece ser aprofundado. Do mesmo modo, a passagem da fase de teste e refinamento de conjecturas à fase de justificação e produção de provas matemáticas merece maior atenção da investigação.

É ainda de registar que a grande maioria dos estudos foram realizados no 2º e 3º ciclos do ensino básico e no ensino secundário. Apesar de haver bastantes relatos de experiências positivas no 1º ciclo e até no Jardim de Infância na literatura profissional (Martins, Menino, Rocha e Pires, 2002), descontando o estudo de Mamede (2002), não

se encontram outros estudos nestes níveis. Também não surgem trabalhos realizados no ensino superior, a não ser com futuros professores. Trata-se de lacunas a serem tidas em conta em trabalhos futuros.

A maior parte dos estudos realizados neste campo em Portugal teve a sua incidência principal nos professores de Matemática. Este trabalho ajudou a perceber os aspectos do conhecimento profissional do professor fundamentais na realização de actividades de investigação matemática na sala de aula. O modelo da aula em três fases – introdução, desenvolvimento, discussão – permitiu evidenciar os problemas específicos de cada uma delas e chamar a atenção para a importância decisiva da fase final para a construção de significados partilhados e a institucionalização de novo conhecimento. As experiências no campo da avaliação mostraram a utilidade dos relatórios escritos e orais. Estes estudos evidenciaram também que esta perspectiva é bastante estranha para um largo sector dos professores, muito centrado no cumprimento do programa e na realização de exercícios. No entanto, mostrou igualmente que ela tem um potencial considerável para interessar os professores, sendo muitos os que se apropriaram desta ideia e fazem dela eixo de projectos de inovação.

Na formação inicial de professores, a perspectiva investigativa tem sido ensaiada com resultados encorajadores. Alguns formandos estranham este tipo de tarefas, quando lhes são propostas pela primeira vez, mas a pouco e pouco vão reconhecendo o seu interesse matemático e educativo. Disciplinas ou módulos dedicados a este tema, têm tido um acolhimento favorável por parte dos futuros professores, muito embora estejam por experimentar abordagens transdisciplinares que dêem uma expressão mais profunda e coerente a esta perspectiva de trabalho. Na formação contínua, existem igualmente experiências inovadoras (como o ensino a distância), com resultados positivos, muito embora ainda em pequena escala.

O problema da integração das actividades de investigação nas práticas de gestão curricular é o que se tem mostrado mais complicado de resolver. Como é evidente, não está em causa reduzir todo ensino da Matemática a actividades de investigação. Estas têm um papel a desempenhar, permitindo atingir certos objectivos curriculares, mas não há qualquer evidência que permitam alcançar todos os objectivos da disciplina. Tanto as decisões de nível global (Que peso dar a este tipo de tarefas? Como as articular com outros tipos de trabalho?) como questões de nível local (De que modo introduzir estas

tarefas? Até onde levar a sua exploração? Como e quando levar a justificação à produção de provas matemáticas?) têm sido pouco trabalhadas, excepção feita aos estudos de Brocardo (2002) e Abrantes (1994). Trata-se de questões que requerem um tempo de investigação bastante significativo, na maturação das questões e na recolha de dados, e em relação às quais será necessário maior atenção no futuro.

Em conclusão, estendendo a perspectiva curricular da resolução de problemas e procurando tirar partido das potencialidades das novas tecnologias de informação e comunicação, as investigações matemáticas revelaram-se uma proposta curricular interessante para o ensino da disciplina. As experiências em pequena escala evidenciaram as suas potencialidades com suporte para o desenvolvimento de diversos objectivos curriculares. No entanto, o seu alcance como suporte para o desenvolvimento de conhecimentos e competências matemáticas está ainda por explorar, bem como as suas possibilidades de integração nas práticas de gestão curricular. Estes são os principais desafios que presentemente se colocam neste campo da Didáctica da Matemática.

### Referências

- Abrantes, P. (1988). Um (bom) problema (não) é (só)... *Educação e Matemática*, 8, 7-10 e 35.
- Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática: A experiência do projecto MAT<sub>789</sub>* (Dissertação de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Abrantes, P., Ponte, J. P., Fonseca, H., & Brunheira, L. (Eds.). (1999). *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. Lisboa: APM e Projecto MPT.
- Ahlfors, L. V. *et al.* (1962). On the mathematics curriculum of the high school. *The Mathematics Teacher*, 55, 191-195.
- APM (1988). *A renovação do currículo de matemática*. Lisboa: APM.
- APM (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*. Lisboa: APM.
- Boavida, A. M. (1992). Resolução de problemas: Que rumos para a educação matemática? *Educação matemática: Temas de investigação* (pp. 105-114). Lisboa: IIE e SPCE.
- Braumann, C. (2002). Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, & A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na*

- aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 5-24). Lisboa: SEM-SPCE.
- Brocardo, J. (2001). Investigações na aula de matemática: A história da Rita. In I. C. Lopes, J. Silva, & P. Figueiredo (Eds.), *Actas ProfMat 2001* (pp. 155-161). Lisboa: APM.
- Brocardo, J. (2002). *As investigações na aula de Matemática: Um projecto curricular no 8º ano* (Tese de doutoramento, Univ. Lisboa). Lisboa: APM. (<http://ia.fc.ul.pt>)
- Brunheira, L. (2000). *O conhecimento e as atitudes de três professores estagiários face à realização de actividades de investigação na aula de matemática* (Tese de mestrado, Univ. de Lisboa). Lisboa: APM. (<http://ia.fc.ul.pt>)
- Brunheira, L. (2002a). O estágio e o projecto de formação em didáctica da matemática: Uma experiência. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 189-214). Lisboa: APM.
- Brunheira, L. (2002b). O conhecimento didáctico e as atitudes de uma professora estagiária face à realização de actividades de investigação na aula de matemática. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 183-206). Lisboa: SEM-SPCE.
- Caraça, B. (1958). *Conceitos fundamentais da matemática* (3ª edição das partes I, II e III). Lisboa: Sá da Costa.
- Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.
- Cockcroft, W. H. (1982). *Mathematics counts*. London: HMSO.
- Cunha, M. H. (1998). *Saberes profissionais de professores de matemática: Dilemas e dificuldades na realização de tarefas de investigação*. (Tese de mestrado, Univ. de Lisboa). Lisboa: APM.
- Fernandes, D. (1992). Resolução de problemas: Investigação, ensino e formação de professores, *Educação matemática: Temas de investigação* (pp. 45-104). Lisboa: IIE e SPCE.
- Fonseca, H. (2000). *Os processos matemáticos e o discurso em actividades de investigação na sala de aula* (Tese de mestrado, Univ. de Lisboa). (<http://ia.fc.ul.pt>)
- Fonseca, H. (2002). Aprender a ensinar Investigando. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 177-188). Lisboa: APM.
- Fonseca, H., Brunheira, L., & Ponte, J. P. (1999). As actividades de Investigação, o professor e a aula de Matemática, *Actas do ProfMat 99* (pp. 91-101). Lisboa: APM.
- Fonseca, L. M. (1997). Processos utilizados na resolução de problemas por futuros professores de matemática. In D. Fernandes, F. Lester, A. Borralho, & I. Vale (Eds.), *Resolução de problemas na formação inicial de professores de matemática* (pp. 39-70).

- Fonseca, L. M. (2002). Olha p'ro que eu digo mas não olhes p'ro que eu faço. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 207-222). Lisboa: SEM-SPCE.
- Goldenberg, E. P. (1999). O currículo de matemática e as actividades de investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 35-50). Lisboa: APM e Projecto MPT.
- Hadamard, J. (1945). *Psychology of invention in the mathematical field*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Junqueira, M. (1996). Exploração de construções geométricas em ambientes computacionais dinâmicos. *Quadrante*, 5(1), 61-108.
- Malonek, H., Silva, J. C., & Costa, T. (2002). Alunos/investigadores no ensino superior no século XIX. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 169-181). Lisboa: SEM-SPCE.
- Mamede, E. (2001). A calculadora e o currículo de matemática para o 1º ciclo: Uma experiência de sala de aula. In I. Lopes, J. Silva, & P. Figueiredo (Eds.), *Actas do ProfMat 2001* (pp. 221-225). Vila Real: APM.
- Martins, C., Menino, H., Rocha, & Pires, M. V. (2002). O trabalho investigativo nas aprendizagens iniciais da matemática. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 59-82). Lisboa: SEM-SPCE.
- Matos, J. F. (1990). Investigar para aprender. In H. M. Guimarães & E. Veloso (Eds.), *Actas do ProfMat 89* (pp. 411-422). Lisboa: APM.
- Matos, J. F. (1991). *Logo na educação da matemática: Um estudo sobre as concepções e atitudes dos alunos* (Tese de doutoramento, Univ. de Lisboa). Lisboa: Projecto MINERVA, DEFCUL.
- Mendes, E. (1997). *Actividade matemática escolar numa perspectiva investigativa e exploratória na sala de aula: Implicações para a aprendizagem* (Tese de mestrado, Univ. de Lisboa). Lisboa: APM.
- Mendes, E. (1998). A actividade matemática dos alunos em contexto de actividades de investigação matemática, *Actas do ProfMat 98* (pp. 135-147). Lisboa: APM.
- Ministère de l'Éducation Nationale, de la Recherche et de la Technologie (1997). *Mathématiques: Classe de seconde, classes de premières et terminales, séries ES, L, S*. Paris: Centre National de Documentation Pédagogique.
- Ministério da Educação (1991a). *Organização curricular e programas – 2º ciclo do ensino básico* (volume I). Lisboa: Imprensa Nacional.
- Ministério da Educação (1991b). *Organização curricular e programas – 3º ciclo do ensino básico* (volume I). Lisboa: Imprensa Nacional.
- Ministério da Educação (1997). *Matemática: Programas - 10º, 11º e 12 anos*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.
- Ministério da Educação (2002). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

- NCSM (1978). Position statements on basic skills. *The Mathematics Teacher*.
- NCTM (1980). *An agenda for action*. Reston, VA: NCTM.
- NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: NCTM.
- Oliveira, H. (1998a). *Actividades de investigação na aula de matemática: Aspectos da prática do professor* (Tese de mestrado, Univ. de Lisboa). Lisboa: APM. (<http://ia.fc.ul.pt>)
- Oliveira, H. (1998b). Vivências de duas professoras com as actividades de investigação. *Quadrante*, 7(2), 71-98.
- Oliveira, P. (2003). A aula de matemática como espaço epistemológico forte. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 25-40). Lisboa: SEM-SPCE.
- Perez, F. (2002). Investigando sobre a prática na formação inicial de professores. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 215-234). Lisboa: APM.
- Poincaré, H. (1996). A invenção matemática. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 7-14). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton: Princeton University Press.
- Pólya, G. (1981). *Mathematical discovery* (edição original de 1962/1965) ed.). New York: Wiley.
- Ponte, J. P. (1995). Novas tecnologias na aula de Matemática. *Educação e Matemática*, 34, 2-7.
- Ponte, J. P. (2001). Investigating in mathematics and in learning to teach mathematics. In T. J. Cooney & F. L. Lin (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 53-72). Dordrecht: Kluwer.
- Ponte, J. P., & Abrantes, P. (1982). Os problemas e o ensino da matemática. In *Ensino da Matemática: Anos 80* (pp. 201-214). Lisboa: SPM.
- Ponte, J. P., Boavida, A., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da matemática*. Lisboa: DES do ME.
- Ponte, J. P., Ferreira, C., Brunheira, L., Oliveira, H., & Varandas, J. M. (1998). Investigating mathematical investigations. In P. Abrantes, J. Porfirio, & M. Baía (Eds.), *Les interactions dans la classe de mathématiques: Proceedings of the CIEAEM 49* (pp. 3-14). Setúbal: ESE de Setúbal.
- Ponte, J. P., Ferreira, C., Varandas, J. M., Brunheira, L., & Oliveira, H. (1999). *A relação professor-aluno na realização de investigações matemáticas*. Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Ponte, J. P., & Matos, J. F. (1992). Cognitive processes and social interaction in mathematical investigations. In J. P. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos, & D.

- Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies: Research in contexts of practice* (pp. 239-254). Berlin: Springer.
- Ponte, J. P., Matos, J. M., & Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática: Implicações curriculares*. Lisboa: IIE.
- Ponte, J. P., & Oliveira, H. (em publicação). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista de Educação*.
- Ponte, J. P., Oliveira, H., Brunheira, L., Varandas, J. M., & Ferreira, C. (1998). O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. *Quadrante*, 7(2), 41-70.
- Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, H., & Segurado, I. (1998). *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: IIE.
- Ponte, J. P., Oliveira, H., & Segurado, I. (2003). A collaborative project using narratives: What happens when pupils work on mathematical investigations. In A. Peter-Koop et al. (Eds.), *Collaboration in teacher education* (pp. 85-97). Dordrecht: Kluwer.
- Porfírio, J., & Abrantes, P. (1999). Professores, investigação e inovação curricular em matemática. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 215-226). Lisboa: APM e Projecto MPT.
- Ramos, J. S. (1997). Matemática experimental. *Educação e Matemática*, 45, 7-10.
- Rocha, A. (2002). Os alunos de matemática e o trabalho investigativo. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 99-124). Lisboa: APM.
- Rocha, H. (1996). Investigando com a calculadora gráfica. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 183-192). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Santos, L., Brocardo, J., Pires, M., & Rosendo, A. I. (2002). Investigações matemáticas na aprendizagem do 2º ciclo do ensino básico ao ensino superior. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 83-106). Lisboa: SEM-SPCE.
- Santos, L., & Ponte, J. P. (2003). *An experience in distance in-service teacher education*. Paper presented at CERME III, Bellaria, Italy.
- Segurado, I. (1998). *A investigação como parte da experiência matemática dos alunos do 2º ciclo* (Tese de mestrado, Univ. de Lisboa). Lisboa: APM. (<http://ia.fc.ul.pt>)
- Segurado, I. (2002). O que acontece quando os alunos realizam investigações matemáticas? In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 57-74). Lisboa: APM.
- Segurado, I., & Ponte, J. P. (1998). Concepções sobre a matemática e trabalho investigativo. *Quadrante*, 7(2), 5-40.
- Selas, L. C. (2002). *Implementação de uma actividade investigativa para a divisão de fracções com alunos do 6º ano de escolaridade: Desempenho, envolvimento, postura e dificuldades de um professor de matemática* (Tese de mestrado, Univ. do Minho).

- Serrazina, L., Vale, I., Fonseca, H., & Pimentel, T. (2002). Investigações matemáticas e profissionais na formação de professores. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 41-58). Lisboa: SEM-SPCE.
- Silva, A., Veloso, E., Porfírio, J., & Abrantes, P. (1999). O currículo de matemática e as actividades de investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 69-88). Lisboa: APM e Projecto MPT.
- Skovsmose, O. (2000). Cenários de investigação. *BOLEMA*, 14, 69-91.
- Sousa, O. (2002). Investigações estatísticas no 6º ano. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 75-97). Lisboa: APM.
- Tudella, A., Ferreira, C., Bernardo, C., Pires, F., Fonseca, H., Segurado, I., & Varandas, J. (1999). A dinâmica de uma aula de investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 87-96). Lisboa: APM e Projecto MPT.
- Varandas, J. M. (2001). *Avaliação de investigações matemáticas: Uma experiência* (Tese de mestrado, Univ. de Lisboa). (<http://ia.fc.ul.pt>)