A comunidade matemática e as suas práticas de investigação[1]

João Pedro da Ponte[2], *Universidade de Lisboa*

Sumário

Introdução

A actividade dos matemáticos e o modo como realizam as suas descobertas constitui um tema fascinante. Desde há muito que matemáticos e filósofos se ocupam desta questão, em ensaios de cunho filosófico (como os que Henri Poincaré nos deixou em algumas das suas obras[3]), em testemunhos de carácter autobiográfico (como o conhecido livro de G. H. Hardy, *A apologia de um matemático*) ou em trabalhos com uma orientação educacional (como George Pólya em *A arte de resolver problemas*). Neste artigo, iremos analisar três aspectos desta problemática: (i) Em que consiste a experiência matemática? (ii) Quais as variedades de discurso dentro da comunidade matemática e quem a integra? E (iii) como é que os matemáticos encaram a sua actividade de investigação? Em todos estes pontos procuraremos considerar as possíveis implicações para o processo de ensino-aprendizagem.

---

[1] Documento de estudo do Círculo de Estudos "Aprender matemática investigando", elaborado em 2001. Disponível em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/mem/bibliografia.htm
[2] jp@fc.ul.pt.
[3] Ver, por exemplo, Poincaré (1984, 1988).

A experiência matemática

Philip Davis e Reuben Hersh (1995), no seu livro *A experiência matemática*[4], discutem com grande pormenor e de modo muito cativante muitas questões relacionadas com a investigação e o trabalho dos matemáticos, sugerindo que a intuição é um conceito-chave para os compreender. Este livro é em grande medida responsável pela popularização da ideia que saber Matemática é, sobretudo, "fazer" Matemática, ideia que marcou fortemente as *Normas para o currículo e a avaliação da matemática escolar* do NCTM (1991) e, desde então, muitos documentos curriculares relativos ao ensino desta disciplina[5].

Os autores começam por esboçar um quadro da "paisagem matemática", olhando tanto para as áreas que a constituem como para os actores que nela se movimentam e as ferramentas que usam. Discutem o que é a Matemática, apresentando os méritos e limitações da noção largamente difundida que esta é a "ciência da quantidade e do espaço". Indicam, também, tratar-se de uma ciência dedutiva, mas distanciam-se de uma visão exclusivamente "dedutivista" da Matemática[6]. E sublinham que definição de Matemática muda com as épocas.

Ao longo do livro, Davis e Hersh não escondem a sua surpresa pelo facto do computador ser uma ferramenta ainda pouco usada pelos matemáticos. Indicam que este instrumento pode servir, em Matemática para calcular valores aproximados, ajudando a resolver problemas (por exemplo, em Matemática aplicada, Estatística, Engenharia…), para gerar dados com vista à formulação e teste de conjecturas (por exemplo, em Teoria de Números), para fazer cálculos e inferências e, até, para demonstrar (como no Teorema das 4 Cores). Além disso, o computador é uma fonte de problemas (por exemplo, propriedades dos algoritmos) e é, ainda, um meio de comunicação e de apoio ao trabalho cooperativo entre investigadores.

Segundo os autores, apesar de terem existido diversos ramos da Matemática no planeta (nomeadamente, a Matemática ocidental, chinesa, japonesa, hindu e inca-asteca), ela é presentemente uma ciência unificada que é transmitida, na sua maior parte,

[4] A edição portuguesa é de 1995, mas o livro foi originalmente publicado em 1980.

[5] A afirmação "saber Matemática é fazer Matemática", foi feita originalmente por Pólya, um matemático que muito influenciou estes autores.

[6] Ou seja, da noção segundo a qual só temos Matemática quando temos demonstrações – expressa na célebre afirmação de N. Bourbaki: "quem diz Matemática diz demonstração". Para esta perspectiva, tanto a Matemática da Babilónia, do Egipto e de outras civilizações, bem como a Matemática dos matemáticos aplicados e a Matemática dos alunos dos primeiros anos de escolaridade, nada disso seria verdadeiramente Matemática…

de forma aberta e sem segredos. Enquanto que no passado esta ciência atraía a atenção de muitos "amadores", actualmente ela é, sobretudo, praticada por "profissionais", pois, como afirmam, trabalhar em Matemática como simples passatempo já não tem "energia" suficiente para produzir invenções de qualidade.

Vários tipos de experiências matemáticas são analisados por Davis e Hersh. Perguntam onde se encontra a Matemática – e respondem que não é nos livros mas na mente das pessoas. Defendem que a própria Matemática muda de época para época e indicam que o estudo do conhecimento de cada momento está entrelaçado numa complexa rede de motivações, aspirações, interpretações e potencialidades. Subscrevem, portanto, a visão de que a Matemática é fortemente influenciada por factores sociais e culturais[7].

Procurando traçar um retrato do "matemático ideal", os autores sublinham que existem fortes discrepâncias entre o trabalho e a actividade concreta do matemático e a percepção que ele tem do seu trabalho e da sua actividade. Cada matemático pertence a um pequeno grupo que tem uma existência normalmente efémera mas que se vê a si mesmo como trabalhando com objectos e relações que contêm verdades universais e intemporais. Indicam também que o matemático tem uma fé poderosíssima nas demonstrações mas revela, ao mesmo tempo, grande dificuldade em explicar para os não-matemáticos o que é uma demonstração e porque acredita nela. Tudo isto leva os autores a concluir que a noção de demonstração é, ela própria, altamente problemática, exigindo uma discussão muito mais aprofundada do que o que é habitualmente admitido.

Davis e Hersh apresentam diversos exemplos da grande dificuldade que muitas vezes existe em Matemática em distinguir o génio do excêntrico. Sabemos que há muitos casos de génios incompreendidos na sua época que mais tarde viram reconhecido o seu valor (os casos de Abel e Galois são de todos bem conhecidos[8]). Mas também há muitos casos de excêntricos que tentam por todos os meios convencer os outros das suas grandes descobertas, quase sempre triviais ou inexistentes[9]. Esta dificuldade faz-nos pensar no problema dos mecanismos pelos quais são valorizados os trabalhos em Matemática, problema ainda mais agravado pela crescente especialização

[7] Essa é também, recordemos, a posição de Bento de Jesus Caraça (1958), magnificamente expressa no seu prefácio aos *Conceitos fundamentais da matemática*.
[8] Ver Caraça (1970).
[9] Um caso flagrante refere-se à enorme quantidade de pessoas que afirmava ter conseguido demonstrar o Teorema de Fermat, escrevendo repetidas cartas com pseudo-demonstrações para matemáticos famosos e para sociedades matemáticas. Ver, a este respeito, Davis e Hersh (1995, p. 66).

que faz com que os diversos trabalhos tenham de ser avaliados por diferentes matemáticos, usando, muitas vezes, diferentes critérios de comparação e, quase sempre, diferentes interpretações dos mesmos critérios.

Procurando articular a dimensão individual e social, Davis e Hersh caracterizam a Matemática como uma actividade humana com duas componentes: (i) o génio individual e (ii) a aprovação tácita da comunidade. Afirmam que a Matemática como forma de arte é humanística e nas suas aplicações é científico-tecnológica. Recusam como falsa a dicotomia entre indivíduo e cultura, indicando que ambos são decisivos para o progresso das ideias.

Além disso, os autores estabelecem uma distinção entre Matemática "inconsciente" (da natureza, dos animais, dos seres humanos) e Matemática "consciente" (dos seres humanos e dos animais superiores), afirmando que entre elas não há uma linha divisória nítida. Cingindo-se à Matemática consciente afirmam que ela se baseia, sobretudo, em três sentidos: numérico, espacial e cinestético. Na sua perspectiva, a Matemática consciente divide-se em (i) analógica-experimental e (ii) analítica. Indicam que a abordagem analítica deriva muita da sua força da preocupação em manter o discurso no mais alto nível intelectual, o que acaba muitas vezes por se revelar mais importante que resolver problemas específicos. No entanto, fazem notar que "todos nos sentimos melhores quando nos movemos do analítico para o analógico" (p. 288), o que constitui o ponto forte desta última abordagem. Os autores sugerem a existência de uma variedade de estilos cognitivos, apresentando posições a favor e contra a primazia da palavra no pensamento. Indicam, também, testemunhos da importância de elementos visuais no raciocínio matemático de cientistas famosos como Hadamard e Einstein[10].

Noutra parte do livro, os autores discutem as diversas escolas da filosofia da Matemática, com destaque para o platonismo, o logicismo, o construtivismo e o formalismo[11]. O platonismo (por vezes também designado por realismo) encara os objectos matemáticos com existindo num mundo próprio, independente dos seres humanos – o mundo das ideias de Platão. O logicismo, o construtivismo e o formalismo não se debruçam directamente sobre a natureza dos objectos matemáticos mas sobre as

[10] Um autor francês, Moshé Flato (1994), num trabalho mais recente, propõe outras categorias para a caracterização de estilos matemáticos: (i) pitagóricos *versus* newtonianos, conforme dêem primazia, nos seus raciocínios, ao discreto ou ao contínuo; e (ii) *problem solvers versus theory builders*, conforme se dediquem, habitualmente, à resolução de problemas isolados ou à construção de teorias.

[11] Uma discussão aprofundada sobre estas escolas encontra-se em Davis e Hersh (1995, pp. 229-335) e, também, em Ponte, Boavida, Graça e Abrantes (1998, pp. 9-43).

condições de certeza em Matemática. O logicismo procura resolver o problema da certeza reduzindo a Matemática à Lógica, usando para isso uma construção extremamente abstracta e formal, que mais tarde se vem a revelar inviável. O construtivismo (ou intucionismo) encara os números naturais como o dado fundamental da Matemática, só aceitando construções envolvendo processos finitos. Finalmente, para o formalismo só interessam as regras do jogo matemático – as regras de inferência pelas quais se estabelecem as proposições matemáticas – não tendo os conceitos matemáticos qualquer significado em si mesmos.

Os autores indicam, por exemplo, que o platonismo e o formalismo estão em lados opostos em relação à questão da existência da realidade matemática, mas não divergem sobre os modos de raciocínio válidos. Recorrem a um exemplo do desenvolvimento de um modelo matemático para defender a tese que a sua construção depende da suposição platónica que este modelo matemático é um objecto matemático bem definido. Procuram assim ilustrar que o platonismo tanto se pode encontrar nos matemáticos puros como nos matemáticos aplicados. Referem, ainda, que a posição filosófica mais comum entre os matemáticos é a de balançar entre o platonismo e o formalismo.

Qualquer dessas três escolas da Filosofia da Matemática procura encontrar uma forma de mostrar a infalibilidade desta ciência. Por isso, são por vezes designadas por filosofias absolutistas[12]. Davis e Hersh consideram que estas filosofias entroncam no "mito de Euclides", ou seja, na crença que a Matemática contém verdades acerca do Universo. Apresentam também um ponto de vista alternativo, a perspectiva histórico-crítica da Filosofia da Ciência de Carl Popper. Esta perspectiva viria a ser aplicada à Matemática por Irme Lakatos, constituindo a abordagem falibilista que é explicada em pormenor[13].

No final do livro Davis e Hersh retomam o tema da intuição. Para eles, explicar o fenómeno do conhecimento intuitivo em Matemática é o problema básico da epistemologia da Matemática. Assim, começam por notar que este termo por vezes parece ter um estatuto elevado – um resultado "intuitivo" é mais convincente que um não-intuitivo; um livro com uma abordagem "intuitiva" comunica melhor as suas ideias

[12] Querendo isso dizer que encaram a Matemática como um conhecimento absolutamente certo, indubitável.

[13] Os autores indicam, igualmente, algumas questões que Lakatos deixa por responder, nomeadamente: (i) Qual a natureza dos objectos matemáticos nas teorias matemáticas informais? (ii) De onde saem os falsificadores potenciais das teorias matemáticas? E (iii) as deduções são afinal rigorosas ou não?

que outro livro mais formal e abstracto. Outras vezes, pelo contrário, o termo intuitivo surge com um estatuto menorizado – o que é intuitivo é enganador, senão mesmo errado. Trata-se, portanto, de um conceito vago e com múltiplos significados, que os autores procuram inventariar:

- oposto de rigoroso;
- visual;
- plausível ou convincente, na ausência de demonstração;
- incompleto, com forte possibilidade de estar errado;
- apoiado num modelo físico e, neste sentido, quase o mesmo que "heurístico";
- unificado ou integrado, em contraponto com detalhado ou analítico.

Posto isto, Davis e Hersh formulam a tese que a intuição (em teoria) poderá ser dispensável no ensino ou na apresentação de resultados, mas é central na descrição da investigação. E acrescentam três ideias centrais: (i) toda a posição filosófica sobre a Matemática se apoia de um modo essencial numa maneira de ver a intuição; (ii) nenhuma das posições filosóficas clássicas tenta explicar a natureza e o significado da intuição; e (iii) a intuição é, apesar de tudo, explicável e analisável e deveria ser objectivo da Filosofia da Matemática produzir essa explicação.

Os autores argumentam que, para o platonismo, a intuição é um conceito incómodo. Se a Matemática existe num mundo à parte, como se explica que se possa desenvolver uma intuição acerca dos seus objectos? Será que ela é, como dizem, "o contraponto ao nível subjectivo da realidade matemática ideal ao nível objectivo" (p. 363)? Na sua perspectiva, ficamos assim com dois mistérios em vez de um: (i) a relação entre a realidade ideal e a realidade mundana e (ii) a relação entre o matemático-pessoa e a sua intuição. O construtivismo, também designado por "intucionismo", dá um lugar central à intuição dos números naturais. No entanto, não explica como se desenvolve a intuição desses números, baseando-se no dogma (discutível) que eles seriam universais. Finalmente, o formalismo não atribui qualquer papel à intuição, mas também não consegue explicar como chegam os matemáticos a construir um significado para os conceitos matemáticos nem indica como estabelecem as suas conjecturas e descobertas.

Davis e Hersh apresentam então a sua própria perspectiva sobre a intuição. Esta seria o efeito na mente de certas experiências de actividade e manipulação de objectos concretos. Temos intuição porque temos representações mentais de objectos matemáticos. Adquirimos estas representações não através de memorização de fórmulas verbais mas por experiências repetidas, sancionadas por um processo social.

Esta visão da intuição permite aos autores apresentarem então a sua "definição" da Matemática: "No reino das ideias, dos objectos mentais, as ideias cujas propriedades são reproduzíveis são chamadas objectos matemáticos, e o estudo dos objectos mentais com propriedades reproduzíveis é chamado Matemática" (p. 367). Trata-se de uma definição próxima da ideia que a Matemática é a ciência dos objectos abstractos, que não remete directamente para o mundo físico mas para as relações entre objectos do mundo físico e relações entre essas relações. A intuição será então a faculdade pela qual podemos considerar estes objectos mentais. Promover o desenvolvimento da intuição passa a ser, nesta perspectiva, um dos principais objectivos da educação matemática[14].

A comunidade matemática e as suas práticas discursivas

Os matemáticos formam uma comunidade com a sua cultura própria. Como toda a cultura, esta tem os seus conceitos, normas, valores, problemas, métodos e critérios de verdade e de validade, partilhados pelo menos até certo ponto pela generalidade dos seus membros. Uma dada cultura pode ser estudada através dos discursos que nela se produzem. Paul Ernest (1993) propõe uma análise do discurso dos matemáticos em três níveis: sintaxe, semântica e pragmática[15]. A sintaxe diz respeito ao sistema de regras formais (de gramática e de demonstração), a semântica refere-se ao sistema de significados e interpretações e a pragmática estuda o nexo de regras humanas, propósitos e decisões relativas ao uso da linguagem.

Assim, para Ernest, o nível da sintaxe, envolve a "formulação rigorosa da Matemática, consistindo em afirmações formais e demonstração de resultados" (p. 99). Este nível compreende, em Matemática pura, elementos como axiomas, definições, lemas, teoremas e demonstrações e, em Matemática aplicada, elementos adicionais como problemas, algoritmos, métodos e modelos. Este nível inclui a Matemática dos artigos aceites em conferências e revistas e constitui o que é aceite como a Matemática "oficial". É considerado como um nível objectivo e impessoal, onde temos a Matemática "real" dos platonistas. Este é o nível em que o conhecimento matemático

[14] O papel central da intuição na aprendizagem da Matemática foi estudado em profundidade por diversos autores, que destaque para o psicólogo israelita Efraim Fischbein (1975).

[15] Ernest afirma basear-se numa ideia de Charles Morris. No entanto, a distinção entre sintaxe, semântica e pragmática é bem conhecida da Linguística.

assume o estatuto mais elevado, e é também a sua parte mais visível. O autor faz ainda notar que, apesar da grande preocupação com o rigor, este nível não envolve o rigor absoluto, pois isso requereria o uso permanente da lógica e não seria nada funcional para os objectivos dos matemáticos. Ou seja, trata-se de um nível de rigor extremamente elevado mas, apesar de tudo, limitado. O nível de rigor usado pelos matemáticos é, tão só, o nível considerado adequado pela profissão, nível este que, de resto, tem evoluído consideravelmente ao longo da História da Matemática[16].

Em segundo lugar, há o nível semântico da Matemática, que também se pode designar por informal. Este nível inclui, segundo Ernest;

> as formulações heurísticas dos problemas, as conjecturas informais ou não verificadas, as tentativas de prova e a discussão histórica e informal. Este é o nível da Matemática não oficial, respeitante aos significados, relações e heurísticas. Os matemáticos referem-se a comentários[17] neste nível como "motivação" ou "pano de fundo"[18].

Este nível consiste assim no que o autor designa por Matemática pessoal e subjectiva e, como conhecimento matemático, tem um baixo estatuto.

Em terceiro lugar surge o nível do conhecimento pragmático (ou profissional) dos matemáticos e da comunidade matemática. De acordo com Ernest, este nível diz respeito

> às instituições matemáticas, incluindo conferências, locais de trabalho, revistas, bibliotecas, prémios, bolsas, etc. Diz também respeito às vidas profissionais dos matemáticos, as suas especialidades, publicações, posição académica, estatuto e poder dentro da comunidade, recursos, etc. Este nível não é considerado como sendo conhecimento matemático. Este conhecimento não tem estatuto oficial em Matemática dado que não se refere aos conceitos matemáticos propriamente ditos, embora alguns dos seus aspectos se reflictam, por exemplo, em informações e avisos que surgem nas revistas. (p. 99)

Ernest afirma que a prática dos matemáticos se processa nestes três níveis. Como domínios de discurso existe uma hierarquia que vai do nível da sintaxe, mais estreito, especializado e rigoroso até ao nível pragmático, mais abrangente, expressivo e portador

---

[16] A questão do rigor na prática matemática é igualmente discutida por Davis e Hersh (1995), que assumem uma posição semelhante à expressa por Ernest.

[17] *Remarks*, no original. Trata-se de um termo muito usado na gíria matemática, nomeadamente em conferências e debates.

[18] *Background*, no original.

de ambiguidades. O autor nota que os níveis mais expressivos podem referir-se aos níveis menos expressivos, mas o contrário não acontece. Para ele, esta hierarquia traduz igualmente alguns dos valores dos matemáticos. Quanto mais formal, abstracto e impessoal é o conhecimento matemático, mais este é respeitado. Em contrapartida, quanto mais o conhecimento matemático é heurístico, concreto e pessoal, menos é valorizado.

Esta valorização, segundo Ernest, tem as seguintes consequências:

> Os valores descritos acima levam à identificação da Matemática com as suas representações formais (no nível sintáctico). Esta é uma identificação que é feita tanto por matemáticos como por filósofos da Matemática (pelo menos por aqueles que subscrevem as filosofias absolutistas da Matemática[19]). Esta valorização da abstracção na Matemática pode também explicar parcialmente porque razão a Matemática é vista como objectiva. Na medida em que estes valores enfatizam as formas puras e as regras da Matemática, facilitam a sua objectificação e reificação[20] (…) Esta valorização permite que os conceitos tidos como objectivos e as regras da Matemática sejam despersonalizados e reformulados sem grande consideração pela sua propriedade, ao contrário do que acontece com as criações literárias. (p. 100)

O autor, referindo-se a Foucault, indica que os três níveis de prática discursiva podem ser considerados como distintos mas inter-relacionados. Cada um deles tem os seus sistemas simbólicos próprios, o seu corpo de conhecimentos, o seu contexto social e as suas relações de poder, muito embora tudo isso possa estar escondido. Assim, dá como exemplo o nível da sintaxe, no qual regras rigorosas indicando que formas de discurso são aceitáveis são cuidadosamente mantidas pela corporação matemática, muito embora possam mudar com o tempo. Isto tanto pode ser visto como consequência de decisões racionais baseadas em pensamento lógico (se o nosso foco é na sintaxe), como no exercício do poder por um grupo social (se o foco está na pragmática). No seu entender, uma compreensão alargada da Matemática envolve um reconhecimento do que se passa em cada um destes níveis e nas suas inter-relações.

A diferenciação entre os três níveis de prática discursiva em Matemática revela-se muito útil, pois permite ver que esta ciência não é apenas um conjunto de ideias

[19] Ou seja, como referi no ponto anterior, as posições filosóficas segundo as quais a Matemática é um conhecimento absolutamente certo e inquestionável. O contraponto destas filosofias absolutistas são as filosofias falibilistas, segundo as quais a Matemática é falível e sujeita a revisão.

[20] *Objectificação* é o processo de tornar qualquer coisa objectiva. *Reificação* é o processo de conferir a alguma coisa o estatuto de objecto real.

abstractas organizadas logicamente (ou seja, não se reduz ao nível sintáctico). A Matemática é feita por pessoas e grupos, que se envolvem em processos complexos de construção de significado (nível semântico), que actuam com os seus propósitos e intenções em contextos complexos e, muitas vezes, marcados por lutas e tensões contraditórias (nível pragmático).

A discussão de Ernest sobre os diversos níveis de prática matemática suscita naturalmente a questão de saber quem constitui ao fim e ao cabo a comunidade matemática. Muitas pessoas consideram que só pertencem a essa comunidade os matemáticos profissionais, aqueles que fazem da investigação a sua actividade principal, podendo ter ou não uma actividade secundária de ensino. Essa é, implicitamente, a posição assumida pelo nosso autor. No entanto, outras perspectivas incluem os professores de Matemática como pertencendo a esta comunidade e outras, ainda, alargam-na aos alunos e à população em geral. Por exemplo, para Davis e Hersh, "na medida em que todas as crianças aprendem Matemática e uma pequena fracção da Matemática faz parte da linguagem comum, a comunidade matemática e a comunidade em geral são semelhantes" (1995, p. 29).

Como lembra o livro *Everybody counts* (MSEB, 1989), na maioria dos países, se descontarmos a língua materna, a Matemática é a disciplina mais estudada. Nos Estados Unidos, com 250 milhões de habitantes, o seu ensino requer aproximadamente 1 500 000 professores do ensino primário, 200 000 professores do ensino secundário e 40 000 professores do ensino superior. Aproximadamente 5 000 matemáticos, principalmente dos quadros das chamadas *research universities*, dedicam-se à investigação. Em Portugal, com 10 milhões de pessoas, os números serão aproximadamente de 30 000 professores no 1.º ciclo do ensino básico, 8 000 professores nos níveis intermédios (2.º e 3.º ciclos) e 4 000 professores no ensino secundário[21]. O número de matemáticos activos no nosso país, no virar do milénio, segundo uma contagem da SPM, era de 363[22].

Numericamente, a comunidade dos matemáticos profissionais não é muito grande. No entanto, a actividade matemática ao nível da investigação não mostra

[21] Valores estimados a partir dos dados do *Relatório Matemática 2001* (APM, 1989).

[22] Ver Cruzeiro (2001, p. 89). Cusiosamente, por estes números, Portugal, com 36 matemáticos por milhão de habitantes, tem uma comunidade de investigação matemática numericamente mais expressiva que os Estados Unidos (segundo o MSEB, 1989), que só conta com 20 matemáticos por milhão de habitantes.

quaisquer sinais de declínio. Como refere o livro *Everybody counts*, está, pelo contrário, mais activa do que nunca:

> Em nítido contraste com as condições do ensino da Matemática, em processo de erosão, encontramos uma enorme vitalidade e diversidade na amplidão da profissão matemática. Mais de 25 organizações nos Estados Unidos apoiam algum aspecto do trabalho profissional nas ciências matemáticas. Aproximadamente 50 000 artigos de investigação – 20 000 por matemáticos americanos – são publicados por 2 000 jornais de Matemática em todo o mundo. Só ao nível da escola básica e secundária e do ensino superior existem mais de 25 publicações dedicadas a alunos e professores de Matemática. Alunos e docentes participam em actividades de resolução de problemas promovidas por estes jornais do mesmo modo que tomam conhecimento do modo como a presente investigação pode estar relacionada com a mudança curricular. (MSEB, 1989, pp. 39-40)

Numa primeira aproximação podemos distinguir entre três grandes domínios onde se pratica Matemática: (i) o mundo dos matemáticos e daqueles que usam profissionalmente aplicações sofisticadas da Matemática; (ii) o mundo da vida social onde se faz uso corrente de ideias, técnicas e conceitos matemáticos (das contas do supermercado aos algoritmos dos bancos…); (iii) o mundo da sociedade onde se aprende Matemática, ou seja, a escola. Os propósitos dos actores que se movem em cada um destes mundos são diferentes e, por isso, diferente é a sua relação com a Matemática.

Isso não significa que estes mundos não tenham nada a ver uns com os outros. Por um lado, eles usam conceitos, representações e ideias em grande medida comuns. Por outro lado, tanto o mundo da utilização corrente da Matemática como o mundo da escola são dependentes do mundo dos matemáticos.

Tudo seria simples se a Matemática produzida no mundo (i) fosse fácil de ensinar e aprender no mundo (iii) e as pessoas fossem depois capazes de a usar de modo produtivo e não problemático no mundo (ii). No entanto, como todos sabemos, as relações entre estes três mundos são bastante mais complexas. Pelos testemunhos existentes, muito poucos são os que parecem usar a Matemática em situações do dia-a-dia de forma crítica e pertinente[23]. A Matemática tem-se revelado difícil de

[23] Ver, a este respeito, Schoenfeld (1992).

aprender e de ensinar – e os matemáticos, quando ensinam, como acontece no ensino superior, são os professores que obtêm os piores resultados[24].

Aqui interessa-nos particularmente a relação entre o mundo (i) dos matemáticos e o mundo (iii) da escola. Pode argumentar-se que muitos dos problemas que existem no ensino-aprendizagem da Matemática resultam de um excessivo afastamento entre estes dois mundos. Sendo assim, é de todo o interesse procurar perceber como funciona na prática o mundo dos matemáticos e ver que implicações se podem daí tirar em benefício da aprendizagem dos alunos. Para isso, precisamos de ouvir o que nos dizem os matemáticos, muito embora sem aceitar acriticamente tudo o que eles nos dizem, uma vez que, como mostram Davis e Hersh (1995), a imagem que têm de si próprios nem sempre é congruente com a imagem que projectam para o exterior.

A investigação em Matemática vista pelos matemáticos

Ernest (1991) faz uma análise teórica das práticas discursivas dos matemáticos. Como qualquer análise teórica, precisa de ser confrontada com estudos empíricos. Um estudo interessante sobre o modo como os matemáticos constróem o seu conhecimento foi realizado por Leone Burton (2001). Esta autora recolheu testemunhos de 70 investigadores que trabalham em universidade britânicas e irlandesas, metade do sexo feminino e metade do sexo masculino. O seu objectivo é comparar as descrições que estes matemáticos fazem do seu processo de descoberta[25] em Matemática com um modelo teórico que previamente desenvolveu.

O modelo da autora envolve cinco categorias: (i) Relação pessoal e cultural-social; (ii) Estética; (iii) Intuição e *insight*; (iv) Estilos de pensamento; e (v) Conexões. O seu interesse consistia em verificar se estas categorias, tomadas em conjunto, fornecem um quadro global completo sobre o modo como os investigadores matemáticos entendem as suas práticas epistemológicas relativas ao processo de construção do conhecimento. Pretendia também perceber o modo como os matemáticos encaram estas categorias. Por exemplo, a categoria "Estilos de pensamento" foi estabelecida a partir das análises de outros autores, como Davis e Hersh (1995), que

[24] Como elequentemente o mostram as pautas das disciplinas de Álgebra e Análise Infinitesimal da grande maioria dos cursos do ensino superior.
[25] *Coming to know* no original.

identificam dois estilos diferentes – o analítico e o visual[26]. Burton interroga-se, por exemplo, sobre se todos os matemáticos se reconhecem num ou noutro destes estilos.

A autora também procura explorar a relevância do seu modelo para pessoas que designa por menos "sofisticadas". Deste modo, o objectivo deste estudo não incide nos conceitos matemáticos que são desenvolvidos na investigação, mas nos processos que usa quem investiga, ou seja, nos diferentes estados por que passa o conhecimento matemático de quem o desenvolve.

A autora assume que um modelo descrevendo o modo como os matemáticos fazem Matemática deverá ser aplicável a qualquer pessoa desde que se admita que os objectos do conhecimento matemático têm menos importância para a aprendizagem que as práticas nas quais esses objectos surgem. Assume também o que designa por "epistemologia relacional", que vê o conhecimento como socialmente construído por pessoas actuando em contextos sociais bem definidos, em relação umas com as outras. Esta posição leva a identificar e a definir as práticas mais e menos adequadas para conhecer e aprender.

Os dados recolhidos para este estudo provieram de gravações áudio e de notas escritas de 64 entrevistas presenciais e 6 entrevistas telefónicas que duraram, em média, uma hora e meia. Os entrevistados, a quem foi garantido o anonimato, pertenciam a 22 universidades diferentes. Antes da entrevista receberam um guião com os tópicos a abordar, e que diziam respeito à sua "história", às suas práticas presentes de investigação e ao modo como realizam descobertas em Matemática. As notas das entrevistas foram dadas aos participantes para verificar o seu conteúdo, fazer emendas e introduzir eventuais mudanças. As entrevistas decorreram de modo a que os participantes pudessem explorar questões do seu interesse e muitos acabaram por falar de si mesmos como alunos e professores, embora isso não fizesse parte do guião fornecido.

A autora indica que o seu modelo se mostrou ajustado ao modo como os matemáticos discutem as suas descobertas, embora nem sempre estivesse de acordo com as suas expectativas iniciais. Ou seja, as cinco categorias do modelo foram consideradas pelos matemáticos como apropriadas para discutir as suas práticas de investigação. No entanto, tomados um a um, os matemáticos posicionaram-se a si mesmos de modo

[26] Para uma discussão destes dois estilos, ver Davis e Hersh (1995, pp. 283-297).

muito diferente em relação a estas categorias, excepto no que se refere à importância das conexões, ponto com o qual todos concordaram.

No que se refere à "Relação pessoal e cultural-social", a maioria dos matemáticos mostrou uma posição predominantemente platonista, ou seja, assumiu a crença na existência objectiva dos objectos matemáticos, independentemente dos seres humanos. Outros, colocaram-se numa posição minoritária – mas, aparentemente, em crescimento – mostrando aceitar que a Matemática é um produto da actividade humana e depende de factores socio-culturais. Um número significativo de matemáticos evidenciou dar pouca atenção ao assunto, parecendo oscilar entre uma e outra posição. Neste ponto, o presente estudo corrobora o que tinha sido já indicado por Davis e Hersh (1995), quando dizem que "um investigador matemático típico é um platonista durante a semana e um formalista aos domingos" (p. 301)[27].

No que respeita à "Estética", alguns dos matemáticos introduziram os termos "beleza" e "elegância" para justificar o que torna um trabalho susceptível de ser publicado. Outros, no entanto, não se referiram à estética e quando questionados sobre o assunto tomaram posições muito diversas, ou desvalorizando esta noção (que consideram "sobreusada"), ou aceitando-a com muita convicção ("é tão importante que nem vale a pena falar"). Outros, ainda, mostraram posições contraditórias, ora valorizando ora desvalorizando os aspectos estéticos no seu discurso.

A maioria dos matemáticos considera que a "Intuição e o *insight*" desempenham um papel fundamental na sua investigação, embora não sejam capazes de descrever muito bem em que consistem e como podem ser desenvolvidos, para além de acharem importante o contributo da experiência[28]. No entanto, alguns dos participantes desvalorizaram o papel destas noções (nas palavras de um deles: "não penso que tenha um papel importante").

No que respeita a "Estilos de pensamento", a autora indica que, para além dos estilos visual e analítico já referidos na literatura, identificou um terceiro estilo, que designa de "conceptual" – que se traduziria em pensar em termos de ideias e de classificações. De acordo com os resultados que obteve, a distribuição seria relativamente equilibrada entre os três estilos, com alguma predominância para o estilo

[27] A ideia é que no seu trabalho quotidiano os matemáticos agem como platonistas. Se se lhes pede para se justificarem, acabam por assumir uma posição formalista (ver a discussão que sobre este assunto fazem Davis e Hersh, 1995, pp. 299-303).

[28] Recordemos, mais uma vez, que a experiência é um dos temas fundamentais do livro de Davis e Hersh (1995).

visual. A maioria dos matemáticos mostrou pensar com uma combinação de estilos, sendo o visual o mais frequente.

Como já referimos, a esmagadora maioria dos participantes deu muita importância à ideia de "Conexões" com outras ideias matemáticas ou com o mundo real. Isso aconteceu mesmo quando não se viam a si mesmos como muito competentes para estabelecerem essas conexões.

No que se refere ao modo como conduzem a sua investigação, um dos matemáticos referiu ter-se verificado uma "mudança cultural": a imagem do matemático trabalhando sozinho nos seus problemas desaparece e é substituída pela imagem do matemático trabalhando em conjunto com outros matemáticos. Esta colaboração é em muitos casos tão estreita que, nos artigos produzidos, não é possível dizer quem contribuiu com o quê. Segundo a autora, as vantagens que os matemáticos apontam para a adopção do trabalho em equipa são as mesmas que se encontram na literatura de educação matemática e da educação em geral, nomeadamente: (i) a possibilidade de beneficiar da experiência dos outros, (ii) a partilha do trabalho, (iii) o aumento da quantidade e da qualidade das ideias e (iv) o aumento da variedade das competências disponíveis no grupo.

Burton sintetiza assim os resultados do seu estudo:

> Em resumo, embora estes investigadores matemáticos acreditem, ou desejem acreditar, que a Matemática é objectiva, as suas perspectivas sobre como fazem descobertas em Matemática são eminentemente pessoais. Deste modo, eles apresentam uma dicotomia epistemológica entre o conhecimento em Matemática – um disse, "o conhecimento é uma questão e uma resposta" – e o seu próprio conhecimento matemático, que eles, na sua maioria, descreveram de modo muito pessoal e muito lírico. De um modo geral, a descoberta foi explicada como um processo de inserir a última peça no *puzzle* ou uma jornada geográfica, um mapa, um panorama. Um investigador masculino afirmou que "a metáfora geográfica é intelectualmente razoável porque você enfrenta um problema e portanto você está aí e você resolve o problema e você está ali – é uma sequência de jornadas nesse sentido – e durante o caminho você viu algum terreno novo". As suas respostas, tal como acima indicado, vêm de questões sobre o que, para eles, constituía a Matemática e como é que eles sabiam que "sabiam" algo de novo. Descobrir, e reflectir sobre esse processo, não era, segundo disseram, uma coisa a que dessem muita atenção, nem para si nem para os seus alunos (de investigação). Os matemáticos responderam positivamente às cinco categorias do modelo nos modos como usavam estas noções discursivamente ao falar sobre a sua investigação. A categoria "Estilos de pensamento" produziu evidência com profundas implicações para o

> ensino e a aprendizagem. Além disso, os matemáticos forneceram informação sobre como organizam a sua investigação que também tem implicações pedagógicas. (Burton, 2001, p. 595)

Burton considera que o quadro que emerge destes resultados deve preocupar os educadores matemáticos. Os matemáticos, trabalhando nas fronteiras do conhecimento, estão envolvidos num trabalho criativo que requer um ponto de vista muito diferente daquele que informa habitualmente o ensino e a aprendizagem da Matemática. As diferenças, na sua perspectiva, não têm a ver com a sofisticação dos actores nem com o local onde estes se encontram (no gabinete de investigação ou na escola), mas "são parte do clima para a aprendizagem criado pelas crenças num conhecimento 'objectivo' e o impacto dessas crenças na cultura da sala de aula" (p. 595).

Assim, muitos dos matemáticos entrevistados falavam de aspectos como estética e intuição que, para a autora, "constituem e são constituídos por uma cultura que é identificável e ensinável, e não inclui apenas aprender a falar um discurso matemático aceitável, mas também os sentimentos associados com essa aprendizagem" (p. 595). Uma tal cultura, afirma a autora, "é vista por estes matemáticos como apropriada para a investigação mas pouco apropriada para a sala de aula, em que a Matemática é apresentada como o exemplo supremo do triunfo da razão sobre a emoção" (pp. 595-6).

São diversos os autores do campo da educação que apontam que as crianças exploram os objectos manipulando-os, voltando-os ao contrário, deitando-os fora e sentindo-os com o corpo (por exemplo, Papert, 1980). Os matemáticos, num certo sentido, fazem a mesma coisa quando exploram os seus objectos de investigação. Isso mesmo é assumido pela perspectiva que toma como ideia básica da aprendizagem a noção que esta deve ser situada em práticas da vida real onde estes conceitos e ideias desempenham um papel importante e constituem recursos discursivos para quem aprende.

Burton indica que este modo de encarar a aprendizagem é consistente com a perspectiva sobre a investigação apresentada pelos matemáticos no seu estudo. Tanto estes autores como os matemáticos salientam a necessidade de enquadrar a aprendizagem num contexto interligado em que a energia para a procura é fornecida pelo entusiasmo em estabelecer novas conexões. Diz Burton: "se estas conexões são novas para o indivíduo que aprende e/ou novas para a disciplina não afecta radicalmente a motivação para essa procura porque, em qualquer dos casos, a compreensão é construída, reflectida e articulada por quem aprende, sendo o conhecimento resultante propriedade dessa pessoa” (p. 596). E continua:

> Aqueles que aprendem tendem a encontrar o conhecimento matemático sem as experiências excitantes de fazer conexões pessoais e socio-culturais através dos seus diversos estilos de descobrir essa Matemática. Mas, além disso, o domínio de uma perspectiva “objectiva” da Matemática traz consigo implicações pedagógicas. Não é só removida a faceta pessoal da disciplina, mas a hierarquia do conhecimento e o elitismo dos que sabem constrói um clima cultural antagónico na sala de aula. Falando da sua experiência em seminários, uma matemática disse, “tantas vezes eles põem centenas de equações que é impossível agarrar, a partir dos primeiros cinco minutos já não fazemos ideia do que é que a pessoa está a falar. Acho que é uma perda de tempo”. (p. 596)

Burton considera ser este um exemplo da argumentação obscurantista que Davis e Hersh (1995) denominaram de estilo “espertalhão”[29] e que estes autores contrastam com a “alegria estética”[30] associada à revelação do “coração da matéria”. Diz ainda a autora que muitos dos que aprendem podem desejar encontrar mais argumentos estéticos do que do tipo espertalhão, mas para que isso aconteça tem de existir um acordo sobre o que são realmente argumentos estéticos e um respeito por aqueles que os usam, sejam eles alunos ou investigadores. E sustenta também que a cultura não se modificará até que os comportamentos do tipo “espertalhão” sejam desafiados e considerados inaceitáveis.

Para Burton, o estudo que empreendeu tem outras implicações para a prática pedagógica. Em primeiro lugar, a discussão da estética abre uma área importante para investigar. O seu argumento é que, tal como os matemáticos têm diferentes sensibilidades estéticas, também os alunos que aprendem Matemática devem poder experimentar esteticamente esta ciência de modos diversos, em vez de serem tomados de forma homogénea. Além disso, uma vez que todas as pessoas sentem alegria e motivação nas experiências estéticas, todos deveriam ter oportunidade de ter esse tipo de experiência na sua aprendizagem da Matemática. A autora critica fortemente a ideia que quem aprende tem de começar pelas coisas “básicas” antes de poder perceber as coisas interessantes. Na sua opinião, forçar as pessoas a aprender dessa forma leva-as a não quererem aprender mais nada.

[29] *Wiseguy argument*, no original.
[30] *Aestetic delight*, no original.

Em segundo lugar, será importante valorizar a importância da intuição e do *insight* de quem aprende. A autora nota que a maioria dos matemáticos valoriza estes aspectos na sua investigação, mas tende a não manifestar respeito pelas intuições e *insights* do aluno, nem a ter uma atitude de o ajudar a desenvolvê-los. A autora interroga-se sobre a razão porque, sendo a intuição e o *insight* tão importantes para os matemáticos, merecem tão pouca atenção dos professores e afirma a sua convicção no valor de um estilo de ensino que encoraje os alunos a explorar as suas reacções intuitivas a uma dada situação.

Em terceiro lugar, no que se refere a estilos de pensamento, Burton nota que muitos daqueles que usam um estilo predominante de comunicação (visual, analítico ou conceptual), não têm em consideração que quem os ouve pode ter preferência por outros estilos. Muitas vezes só estabelecem uma boa comunicação com quem partilha o seu próprio estilo. Além disso, os materiais de ensino são construídos muitas vezes sem procurar explorar diferenças nos estilos de pensamento matemático e oferecer formas alternativas para atingir um certo objectivo matemático. A autora sublinha que os currículos devem "alertar os professores para as diferenças nos estilos de pensamento e fornecer oportunidades a quem aprende para explorar o seu estilo dominante e aprender pela sua especificidade" (p. 597).

Finalmente, a autora sublinha a importância das conexões, considerando ser extremamente urgente evitar a fragmentação do currículo e ajudar alunos e professores a explorar conexões sempre que possível.

Burton conclui o seu artigo dizendo que todos os que se preocupam com os elevados níveis de insucesso em Matemática "têm a responsabilidade de tornar a aprendizagem da Matemática mais semelhante ao modo como os matemáticos aprendem e tornar-se menos obcecados com a necessidade de ensinar as 'noções básicas'[31] [que só suscitam] em qualquer aluno a falta de interesse por aprender" (p. 598).

A autora sustenta que aprender Matemática poderá ser, assim, uma actividade semelhante a investigar. Segundo ela, uma ideia fundamental da investigação em questões de fronteira é que esta abre novas formas de ver o mundo, reconhecendo que a forma mais importante de aprender é a que nos permite ver algo de modo diferente. Como actividade de investigação, "a criatividade, o desafio, a motivação e a alegria de

---

[31] *The basics*, no original.

que falam os matemáticos poderiam estar disponíveis a todos os que exploram a disciplina como alunos" (p. 598). Mas para que isso aconteça, sublinha, é necessária uma mudança fundamental nas formas como a aprendizagem se processa – no que respeita ao papel dos objectos do conhecimento na actividade de aprendizagem e na variedade de estilos de trabalhar com esses objectos.

A concluir

A Matemática tem muitas faces e pode ser "praticada" de muitas maneiras. Como apontam Davis e Hersh (1995), não é só a definição de Matemática que tem mudado ao longo dos tempos – é a própria Matemática que tem conhecido profundas transformações. Tudo indica existir uma grande variedade de estilos potencialmente legítimos de fazer Matemática. No entanto, relacionar-se com a Matemática de modo interrogativo, colocando questões, formulando conjecturas, testando casos, encontrando analogias, estabelecendo relações lógicas – como fazem todos os matemáticos na sua investigação –, é uma actividade susceptível de despertar o interesse dos alunos e de os mobilizar para uma compreensão aprofundada das ideias matemáticas e para as suas potencialidades na descrição da realidade extra-matemática. Por isso mesmo é interessante olhar para a prática dos matemáticos. Não se trata de endeusar acriticamente o que eles fazem (ou dizem que fazem), mas sim de compreender os processos pelos quais a Matemática, em qualquer dos mundos, pode ser uma actividade humana apaixonante e extremamente gratificante.

Referências

APM (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*. Lisboa: APM.

Burton, L. (2001). Research mathematicians as learners — and what mathematics education can learn from them. *British Educational Research Journal*, *27*(5), 589-599.

Caraça, B. J. (1958). *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Sá da Costa.

Caraça, B. J. (1970). Abel e Galois. In *Conferências e outros escritos* (pp. 263-266). Lisboa: Sá da Costa.

Cruzeiro, A. (2001). A Matemática em Portugal hoje. *Boletim da SPM,* 45, 85-91.

Davis, P., & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: Falmer.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.

Flato, M. (1994). *O poder da Matemática*. Lisboa: Terramar.

Hardy, G. H. (1967). *A mathematician's apology*. Cambridge: Cambridge University Press.

MSEB (1989). *Everybody counts: A report to the nation on the future of mathematics education*. Washington, DC: NCR.

NCTM. (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers and poweful ideas*. New York, NY: Basic Books.

Poincaré, H. (1984). *A ciência e a hipótese*. Brasília: Editora da Universidade de Brasília.

Poincaré, H. (1988). Intuição e lógica em Matemática. In APM (Ed.), *A natureza da Matemática* (pp. 7-16). Lisboa: APM.

Pólya, G. (1975). *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Editora Interciência.

Ponte, J. P., Boavida, A., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: DES do ME.

Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT.