Capítulo 1 - Investigar em Matemática

Investigar é procurar conhecer o que não se sabe. Com um significado muito semelhante, senão equivalente, temos em português os termos “pesquisar” e “inquirir”. Em inglês, existem igualmente diversos termos com significados relativamente próximos para referir esta actividade: *research, investigate, inquiry, enquiry*. O termo “investigação” pode ser usado numa variedade de contextos, falando-se, por exemplo, de investigação científica, investigação jornalística, investigação criminal e investigação sobre as causas de um acidente, caso em que se usa também o termo “inquérito”. Por vezes, fala-se em investigação a propósito de actividades que envolvem uma procura de informação, por exemplo, fazer uma investigação ou pesquisa na Internet.

A investigação vista pelos matemáticos

Para os matemáticos profissionais, investigar é descobrir relações entre objectos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades. Henri Poincaré[1] um dos grandes matemáticos do início do século XX, deixou-nos uma interessante descrição deste processo. Começou por tentar demonstrar a impossibilidade de existência de funções com um certo tipo de características. Acabou por provar precisamente o contrário! Concluiu que essas funções, afinal, existem e baptizou-as de “funções fuchsianas”.

Segundo o seu relato, essa investigação desenrolou-se em três fases bem distintas: uma primeira fase de compilação de informação e experimentação, sem produzir resultados palpáveis, seguida de uma fase de iluminação súbita e, finalmente, uma terceira fase de sistematização e verificação dos resultados:

> Havia já quinze dias que me esforçava por demonstrar que não podia existir nenhuma função análoga às que depois vim a chamar funções fuchsianas. Estava, então, na mais completa ignorância; sentava-me todos os dias à minha mesa de trabalho e ali permanecia uma ou duas horas ensaiando um grande número de combinações e não chegava a nenhum resultado. Uma tarde, contra meu costume, tomei um café preto e não consegui adormecer; as ideias surgiam em tropel, sentia que me escapavam, até que duas delas, por assim dizer, se encaixaram formando uma combinação estável. De madrugada tinha estabelecido a existência de uma classe de funções

> fuchsianas, as que derivam da série hipergeométrica. Não tive mais que redigir os resultados, o que apenas me levou algumas horas.
>
> Quis, em continuação, representar estas funções pelo quociente de duas séries: esta ideia foi completamente consciente e deliberada, era guiado pela analogia com as funções elípticas. Perguntava a mim mesmo quais seriam as propriedades destas séries, se é que existiam, e logrei sem dificuldade formar as séries que chamei tetafuchsianas[2].

O que torna particularmente interessante o relato de Poincaré é que o momento-chave desta descoberta ocorreu numa altura completamente inesperada – quando procurava adormecer – sugerindo que o inconsciente desempenha um papel de grande relevo no trabalho criativo dos matemáticos. No entanto, nem todas as descobertas ocorrem por esta via. O estabelecimento da existência das séries que Poincaré chamou de "tetafuchsianas" resultou de um trabalho consciente e intencional, guiado pela analogia com outras séries matemáticas já bem conhecidas.

Este autor interroga-se sobre o mecanismo que preside à actividade criativa inconsciente, acabando por concluir que tem de ser um sentido de apreciação estética da beleza das relações matemáticas:

> Quais são os entes matemáticos a que atribuímos (...) Características de beleza e de elegância e que são susceptíveis de desencadear em nós um sentimento de emoção estética? São aqueles cujos elementos estão dispostos harmoniosamente, de forma a que a mente possa sem esforço abraçar todo o conjunto penetrando em todos os seus detalhes. Esta harmonia é simultaneamente uma satisfação para as nossas necessidades estéticas e um auxílio para a mente que a sustenta e guia. E, ao mesmo tempo, ao colocar perante os nossos olhos um conjunto bem ordenado, faz-nos pressentir uma lei matemática... Assim, é esta sensibilidade estética especial que desempenha o papel do "crivo"[3].

O processo de criação matemática surge aqui fértil em acontecimentos inesperados, de movimentos para a frente e para trás. Esta perspectiva contrasta fortemente com a imagem usual desta ciência, como um corpo de conhecimento organizado de forma lógica e dedutiva, qual edifício sólido, paradigma do rigor e da certeza absolutas. Outro matemático famoso, George Pólya[4], chama-nos a atenção para o contraste entre estas duas imagens da Matemática: "a Matemática tem duas faces; é a ciência rigorosa de Euclides, mas é também algo mais... A Matemática em construção aparece como uma ciência experimental, indutiva. Ambos os aspectos são tão antigos quanto a própria Matemática”[5]. A mesma ideia é sublinhada pelo matemático português Bento de Jesus Caraça[6]:

> A Ciência pode ser encarada sob dois aspectos diferentes. Ou se olha para ela tal como vem exposta nos livros de ensino, como coisa criada, e o aspecto é o de um todo harmonioso, onde os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições. Ou se procura acompanhá-la no seu desenvolvimento progressivo, assistir à maneira como foi *sendo elaborada*, e o aspecto é totalmente diferente – descobrem-se hesitações, dúvidas, contradições, que só um longo trabalho de reflexão e apuramento consegue eliminar, para que logo surjam outras hesitações, outras dúvidas, outras contradições (...) Encarada assim, aparece-nos como um organismo vivo, impregnado de *condição humana*, com as suas forças e as suas fraquezas e subordinado às grandes necessidades do homem na sua luta pelo *entendimento* e pela *libertação*; aparece-nos, enfim, como um grande capítulo da vida humana social[7].

Uma investigação matemática desenvolve-se usualmente em torno de um ou mais problemas. Pode mesmo dizer-se que o primeiro grande passo de qualquer investigação é identificar claramente o problema a resolver. Por isso, não é de admirar que, em Matemática, exista uma relação estreita entre problemas e investigações. O matemático inglês Ian Stewart indica quais são, no seu entender, as características dos bons problemas:

> Um bom problema é aquele cuja solução, em vez de simplesmente conduzir a um beco sem saída, abre horizontes inteiramente novos (...) Um interessante e autocontido pedaço de Matemática, concentrando-se num exemplo judiciosamente escolhido, contém normalmente em si o germe de uma teoria geral, na qual o exemplo surge como um mero detalhe, a ser embelezado à vontade[8].

Quando trabalhamos num problema, o nosso objectivo é, naturalmente, resolvê-lo. No entanto, para além de resolver o problema proposto, podemos fazer outras descobertas que, nalguns casos, se revelam tão ou mais importantes que a solução do problema original. Outras vezes, não se conseguindo resolver o problema, o trabalho não deixa de valer a pena pelas descobertas imprevistas que proporciona. Como diz o matemático inglês Andrew Wiles, “é bom trabalhar em qualquer problema contando que ele dê origem a Matemática interessante durante o caminho, mesmo se não o resolvermos no final"[9].

Wiles tornou-se famoso por ter conseguido resolver um problema dificílimo – demonstrar uma célebre afirmação de Pierre de Fermat[10], um matemático francês do século XVII. Fermat deixou escrito um enunciado nas margens de um livro de Diofanto que tinha estado a ler. Era seu costume escrever este tipo de notas, e neste caso acrescentou "descobri uma demonstração verdadeiramente admirável deste teorema que esta margem é muito pequena para conter". O enunciado, que veio a ser conhecido como o "Último Teorema de Fermat", dizia o seguinte:

> Se n é um número natural maior que 2, não existe nenhum terno de números naturais x, y e z, que satisfaça a equação:
>
> $$x^n + y^n = z^n$$

Esta equação é muito semelhante à que surge no teorema de Pitágoras: $x^2 + y^2 = z^2$. A diferença é que, em vez de x^2, y^2 e z^2, temos agora x^n, y^n, z^n. Sabemos, desde Pitágoras – e mesmo antes, segundo alguns estudos em História da Matemática – que existem infinitas famílias de ternos (x,y,z) que satisfazem o teorema de Pitágoras. Dois deles são, por exemplo, (3,4,5) e (5,12,13). Fermat diz-nos que o que se verifica de infinitas maneiras para $n = 2$ não se verifica nunca para $n > 2$.

Durante mais de trezentos anos, esta afirmação desafiou a sagacidade dos melhores matemáticos. Pelo caminho, muitas demonstrações foram propostas e todas elas rejeitadas, por se verificar que continham passos incorrectos. A certa altura, muitos matemáticos começaram a pensar que Fermat se deveria ter enganado, não chegando a produzir uma demonstração correcta do seu teorema.

Foi o matemático inglês Andrew Wiles, que tinha dedicado toda a sua vida até então a trabalhar nesta questão, quem conseguiu finalmente, em 1994, encontrar uma demonstração convincente[11].

> Desde que pela primeira vez encontrei o Último Teorema de Fermat, em criança, ele tem sido a minha maior paixão... Tive um professor que realizara investigações em Matemática e que me emprestou um livro sobre Teoria dos Números, que me deu algumas pistas sobre como começar a atacá-lo. Para começar, parti da hipótese de que Fermat não conhecia muito mais Matemática do que a que eu aprendera[12].

Nesta passagem, Wiles sublinha o valor de interessar os jovens pelas investigações matemáticas. A afirmação que os alunos podem envolver-se na realização de investigações matemáticas e que isso é um poderoso processo de construção do conhecimento é corroborada por outros matemáticos:

> [Os alunos podem ter] um sabor da Matemática em construção e do trabalho criativo e independente… [Eles podem] generalizar a partir da observação de casos, [usar] argumentos indutivos, argumentos por analogia, reconhecer ou extrair um conceito matemático de uma situação concreta. (Pólya)[13]
>
> Entre o trabalho do aluno que tenta resolver um problema de geometria ou de álgebra e o trabalho de criação, pode dizer-se que existe apenas uma diferença de grau, uma diferença de nível, tendo ambos os trabalhos uma natureza semelhante. (Hadamard)[14]
>
> Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo. Só assim se pode realmente dominar os conhecimentos adquiridos. Só assim se pode ser inundado pela paixão "detectivesca" indispensável à verdadeira fruição da Matemática. Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles. (Braumann)[15]

Processos usados numa investigação matemática

O matemático português Carlos Braumann[16] relata uma experiência de investigação que realizou enquanto aluno do ensino secundário, a propósito dos números complexos. Um número complexo z, da forma $a+bi$, em que a e b são números reais e i é a unidade imaginária $\sqrt{-1}$, tem n raízes dadas por uma certa expressão. Ao calcular raízes de diversos números complexos, observou que, para qualquer número, a soma de todas as raízes era sempre nula. Procurou então encontrar uma justificação para esse facto. Para isso, recorreu à interpretação geométrica de um número complexo como um vector, e por analogia com os sistemas de forças e as respectivas resultantes, mais se reforçou a sua convicção que tal facto deveria ser verdadeiro. Não se dando por satisfeito, procurou uma demonstração mais formal, o que conseguiu ao fim de bastante trabalho, mostrando que, no fundo, o problema geral era equivalente ao problema mais simples de considerar as n raízes de índice n da unidade. O problema ficou resolvido mas Braumann não ficou completamente satisfeito... Tempos depois, tendo tomado conhecimento de uma notação mais potente para os números complexos, e usando a noção já sua conhecida de progressão geométrica, descobriu uma outra demonstração muito mais simples e esteticamente mais apelativa para este facto matemático (em apêndice, o leitor pode ver uma descrição mais pormenorizada do percurso realizado, baseada no próprio testemunho deste matemático).

Podemos dizer que a realização de uma investigação matemática envolve quatro momentos principais[17]. O primeiro envolve o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente, o último diz respeito à argumentação, demonstração e avaliação do trabalho realizado. Estes momentos surgem, muitas vezes, em simultâneo: a formulação das questões e a conjectura inicial, ou a conjectura e o seu teste, etc. Cada um destes momentos pode incluir diversas actividades como se indica na figura 1.

Exploração e formulação de questões	▪ Reconhecer uma situação problemática ▪ Explorar a situação problemática ▪ Formular questões
Conjecturas	▪ Organizar dados ▪ Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulação	▪ Realizar testes ▪ Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	▪ Justificar uma conjectura ▪ Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Figura 1. Momentos na realização de uma investigação

Em todos estes momentos pode haver interacção entre vários matemáticos interessados nas mesmas questões. Essa interacção torna-se obrigatória na parte final, tendo em vista a divulgação e confirmação dos resultados. Só quando a comunidade matemática aceita como válida uma demonstração para um dado resultado este passa a ser considerado como um teorema. Antes disso, o que temos são conjecturas ou hipóteses.

Poincaré conjecturou inicialmente que não existiam funções com as características que ele procurava. Mais tarde, negou esta conjectura, formulando a conjectura contrária, segundo a qual tais funções deviam existir. O modo de verificar essa conjectura surgiu-lhe inesperadamente, mas só realizou a demonstração completa numa fase posterior.

A afirmação de Fermat, rigorosamente falando, não foi mais do que uma conjectura que permaneceu como tal durante vários séculos. Só a demonstração finalmente oferecida por Wiles deu à comunidade matemática a certeza que não existem ternos (x,y,z) satisfazendo as condições indicadas, encerrando assim a questão. Entre Fermat e Wiles, muitas ideias matemáticas foram desenvolvidas a partir das tentativas falhadas de demonstrar o enunciado deixado por aquele matemático francês.

A pequena investigação relatada por Braumann nasceu de um trabalho exploratório, de observação de regularidades nas raízes dos números complexos. Implícita está a questão: que relações têm entre si estas raízes? Uma observação de diversos casos sugeriu que a sua soma era sempre nula. Uma analogia física com os sistemas de forças deu grande credibilidade intuitiva a esta conjectura. No entanto, Braumann continuou a trabalhar na questão, procurando uma demonstração para a relação matemática em causa, o que viria a conseguir, mas de modo bastante laborioso. A questão não ficou completamente encerrada, pois o autor, tirando partido de uma notação mais potente, descobriu mais tarde uma nova demonstração, que, pela sua simplicidade e elegância, lhe agradou muito mais. Neste caso, o que sobressai não é a variedade de conjecturas, mas os diversos processos de justificação e prova sucessivamente postos em acção.

Este trabalho de formulação de questões, elaboração de conjecturas, teste, refinamento das questões e conjecturas anteriores, demonstração, refinamento da demonstração e comunicação dos resultados aos seus pares, está ao alcance dos alunos na sala de aula de Matemática. É o que nos dizem diversos matemáticos e o que mostraremos, com exemplos concretos, ao longo de diversos capítulos deste livro.

As investigações como tarefas matemáticas

As investigações matemáticas constituem uma das actividades que os alunos podem realizar e que se relaciona, de muito perto, com a resolução de problemas. Também vimos, a propósito do relato de Braumann, como uma investigação se pode desencadear a partir da resolução de simples exercícios. O que distingue então as investigações dos problemas e exercícios?

A distinção entre exercício e problema foi formulada por Pólya e tem-se mostrado muito útil para analisar os diferentes tipos de tarefas matemáticas. Um problema é uma questão para a qual o aluno não dispõe de um método que permita a sua resolução imediata, enquanto que um exercício é uma questão que pode ser resolvida usando um método já conhecido. É claro que podem haver exercícios mais difíceis, requerendo a aplicação mais ou menos engenhosa de vários métodos e também existem problemas mais simples ao lado de outros mais complicados. Em vez de uma dicotomia, temos um *continuum* entre exercício e problema e o seu interesse educativo depende de muitos factores para além do seu grau de dificuldade.

Os exercícios e os problemas têm uma coisa em comum. Em ambos os casos, o seu enunciado indica claramente o que é dado e o que é pedido. Não há margem para ambiguidades. A solução é sabida de antemão, pelo professor, e a resposta do aluno ou está certa ou está errada. Numa investigação, as coisas são um pouco diferentes. Trata-se de situações mais abertas – a questão não está bem definida à partida, cabendo a quem investiga um papel fundamental na sua definição. E uma vez que os pontos de partida podem não ser exactamente os mesmos, os pontos de chegada podem ser também diferentes.

Na disciplina de Matemática, como em qualquer outra disciplina escolar, o envolvimento activo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afectivos com vista a atingir um objectivo. Este é, precisamente, um dos aspectos fortes das investigações. Ao requerer a participação do aluno na formulação das questões a estudar, esta actividade tende a favorecer o seu envolvimento na aprendizagem.

O conceito de investigação matemática, como actividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da actividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor.

Não advogamos neste livro que o professor se limite a propor aos seus alunos a realização de investigações. Há, sem dúvida, lugar para os exercícios, os problemas, os projectos e as investigações. O grande desafio é articular estes diferentes tipos de tarefas de modo a constituir um currículo interessante e equilibrado, capaz de promover o desenvolvimento matemático dos alunos com diferentes níveis de desempenho.

---

[1] Henri Poincaré (1854-1912) destacou-se pelos seus trabalhos em Análise Infinitesimal, sendo também considerado o fundador da Topologia. A análise do trabalho de investigação matemática aqui referida foi realizada numa conferência apresentada na Sociedade de Psicologia de Paris, no início do século, publicada originalmente em 1908 no *Bulletin de l´Institut Géneral de Psycologie*, n.º 3, e republicada em Abrantes, Leal e Ponte (1996).
[2] Poincaré (1996, p. 9).
[3] Poincaré (1996, pp. 11-12).
[4] George Pólya (1887-1985) deixou importantes trabalhos em numerosas áreas da Matemática. É o autor de vários livros dedicados à resolução de problemas, entre os quais o famoso *How to solve it*, traduzido como *A arte de resolver problemas.*
[5] Pólya (1975, p. vii).
[6] Bento de Jesus Caraça (1901-1948) foi um matemático português, conhecido pelas suas capacidades de divulgador e como exemplo de intervenção cívica. A passagem aqui reproduzida é retirada de um dos seus livros mais conhecidos, os *Conceitos Fundamentais da Matemática*.
[7] Caraça (1958, p. xiii).
[8] Stewart (1995, p. 17).
[9] Singh (1998, p. 184).
[10] Pierre de Fermat (1601-1665), um dos grandes matemáticos do século XVII. Os elementos aqui indicados foram retirados de J. Sebastião e Silva (1967, pp. 14-15).
[11] Wiles apresentou uma primeira demonstração em 1993, que se viria a revelar incompleta. No ano seguinte, no entanto, apresentou uma nova demonstração, realizada em colaboração com um ex-aluno, que viria a ser aceite pela comunidade matemática.
[12] Singh (1998, p. 93).
[13] Pólya (1981, pp. 157 e 101).
[14] Hadamard (1945, p. 104).
[15] Braumann (2002, p. 5).
[16] Carlos Braumann tem-se dedicado ao estudo de modelos matemáticos em Biologia. As referências ao seu trabalho são retiradas de uma conferência realizada em Coimbra, em Maio de 2002, no *XI Encontro de Investigação em Educação Matemática* (Braumann, 2002).
[17] A presente discussão tem por base o trabalho realizado por Ponte, Ferreira, Varandas, Brunheira e Oliveira (1999).