

## Capítulo 2 – A aula de investigação

Assumindo que as investigações matemáticas são um tipo de actividade que todos os alunos devem experimentar, coloca-se a questão de saber como será possível realizá-las na sala de aula de Matemática. Como organizar o trabalho? Que etapas percorrer? O que se pode esperar do desempenho dos alunos? Qual pode ser o papel do professor?

Pode sempre programar-se o modo de começar uma investigação, mas nunca se sabe como ela irá acabar. A variedade de percursos que os alunos seguem, os seus avanços e recuos, as divergências que surgem entre eles, o modo como a turma reage às intervenções do professor, são elementos largamente imprevisíveis numa aula de investigação. Neste capítulo discutimos os principais aspectos a ter em conta numa aula em que os alunos fazem investigações, evidenciando a multiplicidade de situações que podem ocorrer.

Uma actividade de investigação desenvolve-se habitualmente em três fases (numa aula ou conjunto de aulas): (i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito, (ii) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma, e (iii) discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado. Estas fases podem ser concretizadas de muitas maneiras. Neste livro apresentamos aquela que tem vindo a ser mais utilizada pelos professores: uma pequena introdução, seguida da realização da investigação, em pequenos grupos e, finalmente, a discussão dos resultados, em grande grupo.

Neste capítulo iremos também debruçar-nos sobre o papel do professor nas aulas de investigação. Existe, por vezes, a ideia de que para que o aluno possa, de facto, investigar é necessário deixá-lo trabalhar de forma totalmente autónoma e, como tal, o professor deve ter somente um papel de regulador da actividade. No entanto, o professor continua a ser um elemento-chave mesmo nestas aulas, cabendo-lhe ajudar o aluno a compreender o que significa investigar e aprender a fazê-lo.

### **O arranque da aula**

Esta fase, embora curta, é absolutamente crítica, dela dependendo tudo o resto. O professor tem de garantir que todos os alunos entendem o sentido da tarefa proposta e

aquilo que deles se espera no decurso da actividade. O cuidado posto nesses momentos iniciais tem especial relevância quando os alunos têm pouca ou nenhuma experiência com as investigações.

Muitas vezes a tarefa é fornecida aos alunos por escrito, o que sem dúvida é vantajoso, mas não dispensa uma pequena introdução oral por parte do professor. No caso de alunos mais novos, a leitura conjunta do enunciado poderá ser imprescindível para a sua boa compreensão, nem que seja somente para esclarecer certos termos com que não estão familiarizados. Contudo, independentemente do nível etário da classe, há que garantir, nesta fase inicial, que os alunos compreendem o que significa investigar. Para tal têm que entender a natureza deste tipo de tarefas, que se afasta bastante das actividades mais habituais na sala de aula. De facto, aqui o aluno não está perante uma questão bem delimitada a que tem que dar uma resposta, fazendo mais ou menos cálculos, mas tem, ele próprio, que formular as suas questões com base na situação que lhe é apresentada.

Por exemplo, numa tarefa que tem sido utilizada em diferentes níveis de escolaridade, intitulada *Explorações com números*, aquilo que se pede ao aluno é que identifique relações entre os números que se encontram numa tabela (ver a figura 3)<sup>1</sup>. Aos alunos, levanta-se imediatamente a questão: “o que é que é para fazer?”. Terão que começar por olhar para a tabela e observar bem os números, talvez “brincar” um pouco com eles, manipulá-los, ou seja, a tarefa exige um raciocínio de tipo indutivo, que é algo muito natural no nosso dia a dia mas que, em geral, está muito pouco presente nas aulas de Matemática.

---

Procura descobrir relações entre os números na figura:

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
...	...	...	...

Como sempre, regista as conclusões que fores obtendo.

---

*Figura 3. Explorações com números*

Essa atitude investigativa na abordagem da tarefa deve ser estimulada pela introdução feita pelo professor, o qual poderá, em especial com os alunos mais novos, utilizar expressões próximas desta ideia e que ajudam a clarificar o seu sentido. Por exemplo, incentivar os alunos a serem “pequenos exploradores” ou a “partirem à descoberta”, são metáforas que transmitem o sentido de investigação e que ajudam a marcar a diferença em relação às tarefas a que os alunos estão mais habituados<sup>2</sup>.

No caso desta tarefa, os alunos facilmente se apercebem, por exemplo, da localização dos números pares e dos números ímpares, ou dos múltiplos de 2, porque são regularidades muito óbvias na tabela. Estas primeiras constatações levam-nos para outro patamar que é o da formulação de questões. Assim, por analogia, podem questionar-se: “Onde se encontram os múltiplos de 4?”. Portanto, a fase de arranque é fundamental para que o aluno entenda qual é a atitude que o professor espera dele nestas aulas.

No entanto, se a introdução inicial do professor for demasiado pormenorizada relativamente ao que “é para fazer” poderá condicionar a exploração a realizar pelos alunos. Em princípio, se a tarefa for suficientemente rica não existe o perigo de que o professor limite a possibilidade dos alunos estabelecerem as suas próprias conjecturas se der algumas pistas de exploração ou pedir aos alunos algumas sugestões. Em particular, quando os alunos estão pouco ou nada familiarizados com as investigações, é importante que tal seja feito, o que além do mais contribui para que o trabalho progrida posteriormente mais depressa. Não devemos esquecer, porém, que a interpretação da tarefa deve ser, ela própria, um dos objectivos destas aulas, pelo que, gradualmente, deve esperar-se que o aluno a realize autonomamente ou com os seus colegas.

O sucesso de uma investigação depende também, tal como de qualquer outra proposta do professor, do ambiente de aprendizagem que se cria na sala de aula. É fundamental que o aluno se sinta à vontade e lhe seja dado tempo para colocar questões, pensar, explorar as suas ideias e exprimi-las, tanto ao professor como aos seus colegas. O aluno deve sentir que as suas ideias são valorizadas e que se espera que as discuta com os colegas, não sendo necessária a validação constante por parte do professor.

Portanto, na fase inicial de uma investigação, o professor deve procurar criar este tipo de ambiente e informar os alunos do papel que se propõe desempenhar. Estes devem

saber que podem contar com o apoio do professor mas que a actividade depende, essencialmente, da sua própria iniciativa.

Ao iniciar a investigação é importante, também, que o aluno saiba o que lhe é pedido, em termos de produto final. Perceber que aquilo que vai fazer vai ser mostrado aos colegas, confere ao seu trabalho um carácter público, o que constitui para ele, simultaneamente, um estímulo e uma valorização pessoal.

Por fim, é de notar que a fase introdutória da investigação deve ser relativamente breve para que o aluno não perca o interesse pela tarefa e o tempo disponível da aula seja bem aproveitado para a realização da investigação. Ademais, o professor pode sempre tentar compensar no decorrer da aula algum aspecto que se mostre menos conseguido nesta fase inicial.

### **O desenvolvimento do trabalho**

Tendo sido assegurada, através do momento inicial, a compreensão dos alunos acerca da actividade que se irá realizar, o professor passa a desempenhar um papel mais de retaguarda. Cabe-lhe então procurar compreender como o trabalho dos alunos se vai processando e prestar o apoio que for sendo necessário. No caso em que os alunos trabalham em grupo, as interacções que se geram entre eles são determinantes no rumo que a investigação irá tomar. No entanto, há que ter em atenção que se os alunos não estão acostumados nem a trabalhar em grupo, nem a realizar investigações, fazer entrar na aula, simultaneamente, estes dois elementos novos pode trazer alguns problemas de gestão ao professor.

Ao se propor uma tarefa de investigação espera-se que os alunos possam, de uma maneira mais ou menos consistente, utilizar os vários processos que caracterizam a actividade investigativa em Matemática. Como referimos, alguns destes processos são: a exploração e formulação de questões, a formulação de conjecturas, o teste e a reformulação de conjecturas e, ainda, a justificação de conjecturas e avaliação do trabalho. Tomemos como exemplo uma investigação realizada por uma turma da 7<sup>a</sup> série, com cerca de 30 alunos de 12-13 anos, em que foi proposta a tarefa *Explorações com números*, referida na secção anterior. A professora tinha uma boa opinião acerca destes alunos, em especial, pela forma como aderiam às suas propostas de trabalho, embora nunca tivesse realizado investigações com eles. A investigação decorreu em

duas aulas de 50 minutos, tendo sido gastos uma aula e meia na realização da tarefa em pequenos grupos e o restante tempo na apresentação oral do trabalho dos diferentes grupos. A professora tinha feito uma breve introdução em que, basicamente, forneceu algumas indicações sobre o registo do trabalho que os alunos deveriam fazer, uma vez que pretendia recolhê-lo no final da aula. Sugeriu, por exemplo, que a identificação das diferentes relações encontradas fosse feita com canetas de cores. Em relação à própria tarefa apenas referiu que poderia ser útil prolongar a tabela e esclareceu alguns alunos sobre o modo como isso poderia ser feito.

Vejamos como se desenvolveu parte do trabalho de um dos grupos constituído por duas moças, Telma e Rute, e três moços, André, José e Leandro. Trata-se, segundo a professora, de um grupo de alunos bastante heterogéneo.

### ***Explorando a situação e formulando questões***

A exploração inicial da situação é uma etapa na qual os alunos, muitas vezes, precisam de gastar algum tempo. Aos olhos do professor, porém, pode parecer que nada está a acontecer e que os alunos estão com dificuldades quanto a essa actividade. No entanto, esta etapa é decisiva para que depois os alunos comecem a formular questões e conjecturas. É nessa fase que se vão embrenhando na situação, familiarizando-se com os dados e apropriando-se mais plenamente do sentido da tarefa.

A situação de trabalho em grupo potencia o surgimento de várias alternativas para a exploração da tarefa, o que numa fase inicial pode ser complicado em termos da auto-gestão do grupo. Muitas vezes, um ou dois alunos tomam a liderança e levam o grupo a centrar-se em certas ideias, facilitando, assim, o trabalho conjunto.

Em muitas tarefas de investigação, os alunos são levados a começar por gerar (mais) dados e a organizá-los e só depois começam a conseguir formular questões. Por vezes, as conjecturas surgem logo na sequência da manipulação desses dados. Por sua vez, o surgimento de conjecturas leva à necessidade de fazer testes, o que poderá exigir que sejam gerados ainda mais dados.

No caso de tarefas em que os alunos procuram regularidades, como a do nosso exemplo, é habitual, após o surgimento das primeiras questões e do estabelecimento das primeiras conjecturas, que os alunos formulem outras questões e conjecturas por analogia com as

anteriores. Este é um raciocínio desejável em todo o tipo de tarefas, sendo uma sugestão que o professor poderá fazer aos alunos quando estão num impasse, ou simplesmente, para enriquecer a sua investigação.

No exemplo seguinte, os alunos fazem espontaneamente esse tipo de raciocínio. Eles encontram-se a trabalhar há já algum tempo, tendo identificado diversas relações, e começam a procurar os quadrados perfeitos na tabela.

Telma: Vamos tentar com o quê? Com as potências, para ver se dá alguma coisa?

Rita: Com as raízes quadradas?

José: 4 vezes 4, dá 16.

Leandro: 4 vezes 4, dá 16.

José: 5 vezes 5, dá 25.

Telma: Está aqui.

José: 6 vezes 6, 36.

Leandro: Está aqui, não dá.

André: Não dá.

José: Está na primeira.

Teresa: 7 vezes 7, 49. Também não dá.

Rute: Vejam as potências. A segunda potência de qualquer coisa.

Telma: Rute, era o que estávamos a fazer: 1 vezes 1, 1. 2 vezes 2, 4. 3 vezes 3, 9.

Rute: 6 vezes 6, 36. Olha lá, está aqui na primeira coluna.

Telma: Olha lá, Rute.

André: Isso não deve dar.

Rute: Diz?

André: As potências não deve dar.

Neste episódio verifica-se o empenhamento de todos os alunos na busca de uma regularidade na disposição dos quadrados perfeitos. Na sequência de outras regularidades que tinham encontrado, os alunos têm em mente um certo comportamento para estas potências, mas que nunca expressam verbalmente. Dado que essa busca se mostra infrutífera, vai decrescendo a convicção de que é possível encontrar aquilo que procuram.

Os alunos colocam uma questão, “Onde é que se encontram as potências [de expoente 2]?” e têm uma conjectura implícita de que estas potências se distribuem de uma certa forma mas, ao prosseguirem a análise da tabela, sentem que esta não é apoiada pelos dados que possuem. Sobressai, pois, neste segmento, um aspecto importante das investigações: a formulação de questões. Para tal foi necessário que os alunos tivessem conhecimento do conceito de potência e, de seguida, na formulação da conjectura, possuíssem, também, uma certa noção de sequência. Isto evidencia como estes alunos procuram integrar os seus conhecimentos matemáticos na investigação, algo que o professor deve estimular no decurso da aula.

É de salientar, ainda neste episódio, a atitude dos alunos de procura de mais e mais regularidades, não se sentindo satisfeitos após terem descoberto duas ou três. As próprias características desta tarefa poderão ter sido um factor-chave para que isso acontecesse, uma vez que ela permite uma variedade de explorações de acordo com os conhecimentos matemáticos dos alunos.

Portanto, neste episódio os alunos procuram dar resposta a uma questão que se começa a mostrar infrutífera. Essas situações podem conduzir a um impasse quando os alunos persistem em continuar a exploração na mesma direcção. A intervenção do professor pode ser muito útil nesses casos. No exemplo concreto, a intervenção da professora poderia estimular os alunos a continuarem a sua busca de uma regularidade na distribuição dos quadrados perfeitos, ajudando-os a expressar as suas ideias acerca do tipo de comportamento que procuravam encontrar na distribuição desses números.

### ***Formulando e testando conjecturas***

As conjecturas podem surgir ao aluno de diversas formas, por exemplo, por observação directa dos dados, por manipulação dos dados ou por analogia com outras conjecturas. Esse trabalho indutivo tende, por vezes, a ficar confinado ao pensamento do aluno, não existindo uma formulação explícita da conjectura, tal como vimos no episódio anterior. Outras conjecturas são apenas parcialmente verbalizadas, existindo uma linguagem gestual que completa aquilo que não é dito. Por exemplo, na tarefa em análise, os alunos, frequentemente, indicam na tabela determinada regularidade, através de exemplos, com a convicção de que os restantes colegas irão intuir o mesmo resultado. Daqui decorre a importância da realização de um registo escrito do trabalho de

investigação. É somente quando se dispõem a registrar as suas conjecturas que os alunos se confrontam com a necessidade de explicitarem as suas ideias e estabelecerem consensos e um entendimento comum quanto às suas realizações.

O teste de conjecturas é um aspecto do trabalho investigativo que os alunos, em geral, interiorizam com facilidade e que se funde, por vezes, com o próprio processo indutivo. Isto é, a manipulação dos dados começa a apontar no sentido de uma certa conjectura para logo de seguida esta ser refutada por um caso em que não se verifica. No entanto, existe alguma tendência dos alunos para aceitarem as conjecturas depois de as terem verificado apenas num número reduzido de casos. Esta forma de encarar o teste de conjecturas pode ser combatida pelo professor, quer no apoio que concede aos grupos, quer na fase de discussão em que os alunos podem ser estimulados a procurar contra-exemplos.

Estes aspectos do processo investigativo observam-se no episódio seguinte e que surge na sequência do anterior. Um dos alunos, André, parecia já não acreditar na possibilidade de encontrarem algo de interessante sobre quadrados perfeitos e pôs-se então a adicionar números, em silêncio. Após um breve instante, surge-lhe algo que de imediato procura partilhar com os colegas.

André: Espera aí... Vê lá! (dirigindo-se a Telma que está sentada ao seu lado)  
Se somarmos estes dois vai dar um nesta fila.

Telma: Vai dar... (confirma com André os cálculos deste)

André (agora para todos): Olha lá o que é que eu descobri!

André e Telma: Somando estes dois, vai dar um desta fila. Dá 13. Somando 14 e 15, dá 29.

Telma: Tchan tchan! (expressando contentamento com a descoberta)

André: Calma. Agora soma este a ver onde é que dá? 4 e 5, 9. 8 e 9, 17.

Rute: Não, não dá.

André: Vai dar sempre na mesma

Telma (mostrando no papel): Está bem, mas vai dar na mesma.

Rute: Então, está bem, pronto. Vamos escrever.

Telma: Então, vá. Como é que vamos escrever isso?

Rita: “Somando...” Vamos primeiro a esta...

Telma: “Somando os dois primeiros algarismos de cada linha”...

André: “de cada linha”, não, “das duas últimas colunas”.

Telma: Se somarmos estes dois números, o resultado aparece aqui, depois aqui, alternando de um em um. (E continuam a tentar encontrar uma formulação que corresponda ao que têm em mente)

A conjectura de André, de que a soma de dois elementos de uma mesma linha que pertençam à terceira e quarta colunas encontra-se na segunda coluna, é facilmente aceite por todos os colegas. No entanto, este aluno parece ter em mente um resultado ainda mais geral e propõe ao grupo que testem também a adição de elementos da primeira com a segunda coluna. O teste da conjectura, embora muito limitado é facilmente aceite por todos os alunos, com excepção de Rute, inicialmente, mas que parece ir ficando convencida pelos exemplos que lhe mostram. Curiosamente, é esta aluna que imediatamente faz a sugestão da escrita das “conclusões”, o que vai impedir que esta conjectura seja testada em relação às outras colunas.

Ao escreverem a sua conjectura (última fala), incluem um elemento que não tinha sido referido oralmente – a alternância de uma linha entre os resultados que se obtêm –, mas que parece ter estado sempre implícito.

A importância que a professora atribuiu ao registo escrito é bem interiorizada pelos alunos que se preocupam em escrever, o mais fielmente possível, os seus resultados. O registo escrito, que se pede numa investigação como esta, constitui um desafio adicional para alunos deste nível de escolaridade porque exige um tipo de representação que nunca utilizaram.

O professor precisa de estar atento a todo este processo de formulação e teste de conjecturas, por forma a garantir que os alunos vão evoluindo na realização de investigações. Deste modo, cabe-lhe colocar questões aos alunos que os estimulem a olhar noutras direcções e os façam reflectir sobre aquilo que estão a fazer.

No episódio que se segue podemos ver como a professora sugere uma pequena generalização para uma conjectura, ao mesmo tempo que suscita a verificação das afirmações dos alunos. Isto ocorre num momento em que o grupo ainda procura registar as suas “conclusões” e a professora vem ver como está a decorrer o trabalho.

Professora: Deixem lá ver. Vocês estão a somar a segunda com a terceira e a terceira com a quarta coluna e estão a ver que o resultado aparece na segunda coluna... E por que é que não vêem as outras colunas?

Alunos: Já vimos.

Professora: Também dá na segunda? E a primeira com a terceira?

José: 2, 4 e 6, 10. Também dá!

Alunos: Também dá.

Professora: Também dá onde?

José: A primeira com a terceira...

André: Mas dá noutra.

Telma: A primeira com a terceira dá o resultado na terceira.

André: Mas dá noutra.

Professora: Ah, então nem sempre aparece na segunda. Talvez seja melhor verem isso... (afasta-se do grupo)

André: A segunda com a quarta aparece na primeira.

Rute: Então, escrevemos em relação a todos.

Não sabemos se a conjectura dos alunos ia ao ponto de considerarem que a soma de dois elementos de uma mesma linha se encontra sempre na segunda coluna, nem se a tinham testado para outros elementos que não os da primeira com a segunda coluna ou da terceira com a quarta. No entanto, quando a professora os confronta com essa hipótese, respondem-lhe afirmativamente, ainda que sem apresentarem dados. A professora desafia-os a testarem a sua conjectura e estes rapidamente se apercebem de que esta é falsa mas que permite estabelecer uma outra. Os alunos dispõem-se, então, a registar essas conjecturas em relação a todas as colunas (última fala).

Esta intervenção da professora foi positiva, na medida em que permitiu acelerar o processo de teste de conjectura e ganhar tempo para outras explorações da tabela, sem desvirtuar o processo investigativo. De facto, a professora, tendo em conta tudo aquilo que já tinha visto que os alunos conseguiam fazer, fê-los avançar, porém, sem lhes dizer directamente se estavam certos ou errados.

### ***Justificando as conjecturas***

Verifica-se vulgarmente que os alunos tendem a intitular as suas conjecturas de conclusões. Por vezes, é o próprio professor que utiliza essa linguagem quando se abeira de um grupo: “Então o que é que já concluíram?” ou “Quais são as vossas conclusões?”. Em certos casos é a própria tarefa que utiliza esse termo, como é o caso de *Explorações*

*com números...* Sem se aperceberem, os alunos transformam as suas conjecturas em conclusões sem passarem por um processo de justificação.

A justificação ou prova das conjecturas é uma vertente do trabalho investigativo que tende, com alguma frequência, a ser relegada para segundo plano ou até mesmo a ser esquecida, em especial nos níveis de escolaridade mais elementares. No entanto, é fundamental, para que o processo investigativo não saia empobrecido, que o professor procure levar os alunos a compreender o carácter provisório das conjecturas. Se, por um lado, é necessário insistir na realização de testes de conjecturas e se, de facto, uma conjectura parece tornar-se mais credível à medida que resiste a sucessivos testes<sup>3</sup>, por outro lado, os alunos devem compreender que o teste, só por si, não confere o estatuto de conclusão aos seus resultados.

A introdução da ideia de prova matemática pode ser feita gradualmente, restringindo-se, numa fase inicial e com os alunos mais novos, à procura de uma justificação aceitável, que se baseie num raciocínio plausível e nos conhecimentos que os alunos possuem. À medida que os alunos vão interiorizando a necessidade de justificarem as suas afirmações e que as suas ferramentas matemáticas vão sendo mais sofisticadas, vai-se tornando mais fácil realizarem pequenas provas matemáticas.

No caso da investigação que temos vindo a apresentar, a professora procurou, em alguns momentos, questionar os alunos quanto à justificação das suas conjecturas, como poderemos verificar no episódio seguinte. Nesta fase do trabalho, os alunos tinham chamado a professora para prestar um pequeno esclarecimento quanto ao registo das conjecturas. André continua mais interessado nos números do que na escrita e, abstraindo-se da presença da professora junto deles, dirige-se à colega sentada ao seu lado para lhe mostrar algo que descobriu. Este comentário do aluno desperta a atenção da professora.

André: Já viste, se calhar isto aqui, estás a ver (apontando para a tabela), quando somamos estas vai dar um número ímpar e quando somamos estas...

Professora: Sim, sim, diz André.

André: Dá um número par.

Professora: O quê? Diz.

André: Esta aqui com esta, dá um número par. E estas com estas dá um número ímpar.

José: Não, não.

André: É sim.

Telma: Esta coluna é toda ímpar.

Rute: Pois é.

Professora: Pois é. E então a soma? Quando estão a somar esta com...

André: Esta com esta, dá ímpar aqui. E esta com esta aqui, dá par.

Professora: Pois, porquê?

Alunos: (continuam a mostrar na tabela)

Professora: É verdade, André, mas porquê?

André: Somando esta com esta, dá par aqui.

Rute: Somando esta com esta?

André: Somando esta com esta, dá número ímpar.

Telma: Somando as colunas ímpares dá número par e somando ímpar com um par dá ímpar.

Professora: E par com par?

Alunos: Par com par, dá par.

Professora: Pronto, mas isso é porque a soma de números pares é um número...?

Alunos: Par

Professora: A soma de números ímpares é um número...?

Alunos: Par.

Professora: E a soma de um par com um ímpar o que vai dar?

Alunos: Ímpar.

A professora ter-se-á apercebido de que a ideia de André era interessante e decide agarrá-la. A sua actuação neste segmento tem dois momentos distintos. Num primeiro momento, incentiva André a explicar de um modo mais claro a sua conjectura e, num segundo momento, procura levar os alunos a pensar sobre a justificação para essa conjectura.

Nesse primeiro momento, a professora dá oportunidade a todo o grupo para se debruçar sobre a conjectura de André. Os alunos rapidamente estendem a conjectura a todas as colunas, agora já sem necessitarem do estímulo da professora, dado que se trata de um raciocínio idêntico ao que tinham desenvolvido no segmento anterior.

A professora passa, de imediato, a introduzir a questão, “porquê?”, que a princípio não é entendida pelos alunos. Estes continuam a olhar de forma genérica para as colunas, em

termos da sua paridade, e têm dificuldade em compreender o pedido de justificação feito pela professora. Acaba por ser ela própria a recordar a propriedade que os alunos já conheciam sobre a adição de números pares e ímpares.

Embora esta ocasião parecesse favorável à introdução do processo de justificação, os alunos não terão compreendido totalmente a intenção da professora. Dado que o grupo não estava familiarizado com esse processo, seria necessário demarcar mais claramente aquilo que era a conjectura daquilo que era a sua justificação matemática. Somente o trabalho continuado com este tipo de tarefas pode levar os alunos a compreenderem a necessidade de justificarem matematicamente as suas afirmações – em lugar de encarar esse pedido como uma estranha imposição por parte do professor<sup>4</sup>.

### **A discussão da investigação**

No final de uma investigação, o balanço do trabalho realizado constitui um momento importante de partilha de conhecimentos. Os alunos podem pôr em confronto as suas estratégias, conjecturas e justificações, cabendo ao professor desempenhar o papel de moderador. O professor deve garantir que sejam comunicados os resultados e os processos mais significativos da investigação realizada e estimular os alunos a questionarem-se mutuamente. Esta fase deve permitir também uma sistematização das principais ideias e uma reflexão sobre o trabalho realizado. É, ainda, um momento privilegiado para despertar os alunos para a importância da justificação matemática das suas conjecturas. No caso de alunos ainda pouco familiarizados com as investigações, o modelo que o professor possa oferecer nesta fase da aula é determinante para que estes comecem a perceber o sentido de uma demonstração matemática.

A fase de discussão é, pois, fundamental para que os alunos, por um lado, ganhem um entendimento mais rico do que significa investigar e, por outro, desenvolvam a capacidade de comunicar matematicamente e de reflectir sobre o seu trabalho e o seu poder de argumentação. Podemos mesmo afirmar que sem a discussão final corre-se o risco de se perder o sentido da investigação.

De facto, as investigações constituem um contexto muito favorável para gerar boas aulas de discussão entre os alunos. No entanto, a aula de Matemática, habitualmente, não é um lugar em que os alunos estejam habituados a comunicar as suas ideias nem a argumentar com os seus pares. Deste modo, é natural que o professor sinta algumas

dúvidas sobre como tirar partido das potencialidades do trabalho investigativo para realizar aulas de discussão produtivas.

Existem muitas opções para estruturar uma aula de discussão com toda a turma, colocando-se, desde logo, a questão do momento em que esta deverá ter lugar. Muitas vezes, o professor estabelece à partida o tempo que quer conceder para a realização da tarefa e para a discussão final e faz com que esse plano seja cumprido, com maior ou menor flexibilidade. No entanto, há que estar atento aos sinais que vêm dos alunos, quer de cansaço, indicando que será melhor parar a investigação, quer de desejo de prosseguir a sua exploração, indicando que será necessário conceder-lhes mais tempo. Estas decisões, nem sempre simples, são facilitadas quando o professor conhece bem os seus alunos e sabe até onde pode ir.

No caso da investigação que apresentámos na secção anterior, a professora decidiu de antemão reservar cerca de metade da segunda aula para a discussão final. Embora tenha tido necessidade de dar mais algum tempo para que os alunos terminassem de registar os seus resultados, conseguiu realizar a discussão da forma que tinha planeado.

A professora, tendo noção do trabalho realizado por cada um dos grupos, dado que tinha recolhido as folhas de registo dos grupos no fim da primeira aula, estabeleceu uma ordem de apresentação na qual os grupos que tinham identificado um menor número de regularidades, ou apenas aquelas que eram comuns a todos, seriam os primeiros a intervir. Preparou uma transparência com a tabela que se encontrava na tarefa mas à qual acrescentou mais algumas linhas. Solicitou que o porta-voz de cada grupo fosse junto do retroprojector apresentar os seus resultados, oralmente, exemplificando com os números da tabela. Apresentamos, de seguida, dois episódios que ilustram alguns dos elementos que julgamos deverem caracterizar esta fase do trabalho na aula com as investigações matemáticas.

### ***Aprofundando uma conjectura***

Um grupo está a apresentar os resultados da sua investigação através do seu porta-voz, Dário. A professora tinha referido no início desta fase de discussão que os outros grupos poderiam intervir sempre que quisessem fazer algum comentário, nomeadamente, para acrescentar alguma coisa ao que estava a ser apresentado. Telma, elemento de um outro grupo, depois de ouvir a conjectura de Dário, procura dar mais uma achega.

Dário: O resultado da soma das filas [linhas], o resultado está sempre na terceira coluna. Aqui o resultado dá 6 está na terceira... Dá 22. Dá sempre na terceira coluna.

Professora: Portanto, somando os números de uma mesma linha o resultado está sempre na...

Alunos: Terceira coluna.

Telma: Professora, nós fizemos isso também mas reparámos noutra coisa, que “o resultado aparece na terceira coluna mas alternando de 4 em 4, excepto da primeira vez”.

Professora: Ah, eu estava à espera que alguém dissesse alguma coisa. Podes vir explicar aqui, Telma?

Telma: (exemplifica, na transparência, a conjectura do seu grupo)

Dário: Deve ter a ver com o número das colunas.

Professora: “Deve ter a ver com o número das colunas”, diz Dário, por isso é que vai de 4 em 4 (pausa). Querem dizer mais alguma coisa em relação a isto? Não? Vamos avançar?

Esta intervenção da aluna evidencia que estava bem atenta à apresentação do colega para poder comparar com o trabalho realizado pelo seu grupo. Esta tinha sido, aliás, uma das chamadas de atenção que a professora fez no início da fase de discussão: “prestar atenção ao que os grupos apresentam para depois não se repetirem”.

A conjectura do grupo de Telma acrescenta uma propriedade relativamente à que tinha sido apresentada por Dário, enriquecendo-a um pouco. Curiosamente, este aluno relaciona de imediato esse novo elemento com as características da tabela, o que ilustra bem como o processo investigativo pode continuar a desenvolver-se de uma maneira espontânea, mesmo nesta fase final, em resultado das interações que se geram.

Observamos, em relação à actuação da professora, que a pressão de tempo para que todos os grupos fizessem a sua apresentação nessa aula, fez com que não aproveitasse esta oportunidade para explorar a justificação da conjectura apresentada, para a qual Dário já tinha avançado com uma ideia: “Deve ter a ver com o número de colunas”. Embora tendo feito uma pausa para ver se outros alunos se manifestavam, acabou por avançar para outro assunto.

No entanto, nesta situação a professora poderia ter enveredado, com alguma facilidade, por uma justificação desta conjectura dado que, a propósito das conjecturas de outro

grupo, já tinham representado, no quadro, genericamente os elementos de cada coluna da tabela, do seguinte modo:

$4n$	$4n+1$	$4n+2$	$4n+3$
0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
20	21	22	23
...	...	...	...

Poderiam, então, demonstrar que a soma dos elementos de uma mesma linha se encontra na 3ª coluna, fazendo:  $4n + (4n+1) + (4n+2) + (4n+3) = 4 \times 4n + 4 + 2 = 4 \times (4n+1) + 2$ .

No caso dos alunos ainda não possuírem conhecimentos de álgebra suficientes para compreenderem todos os passos, é possível raciocinar com eles de um modo mais informal. Agrupam-se as parcelas que representam múltiplos de 4 e utiliza-se o raciocínio muito simples, mesmo para os graus mais elementares, de que “a soma de dois múltiplos de 4 é também um múltiplo de 4”.

É igualmente fácil ajudar os alunos a perceberem por que motivo o resultado da adição dos elementos de uma linha surge de 4 em 4 nessa coluna. Para tal podem começar por observar que a diferença que entre esses resultados é sempre 16 (6, 22, 38...). Depois pode pedir-se para investigarem, em cada coluna, qual a relação entre cada elemento e o seu sucessor (+4), o que é fácil de justificar dado o facto de existirem 4 colunas. Daí é simples entender que quando se adicionam os elementos, por exemplo, da 2ª linha, estamos a adicionar quatro números cada um dos quais com mais 4 unidades do que na linha anterior, ou seja:

$$4 + 5 + 6 + 7 = (0+4) + (1+4) + (2+4) + (3+4) = (0+1+2+3) + (4+4+4+4) = 6 + 16.$$

O mesmo raciocínio se pode fazer em relação às linhas seguintes, pelo que cada elemento que se obtém através desta adição dista sempre 4 linhas do anterior. E,

portanto, este facto decorre do “número de colunas” que a tabela possui, tal como Dário já tinha sugerido.

Esta justificação, muito elementar do ponto de vista dos conhecimentos matemáticos que exige, entra em linha de conta com aspectos identificados pelos alunos em diferentes conjecturas, o que os ajuda a terem uma compreensão mais global desta tarefa e dos conteúdos matemáticos que estão ali em jogo.

### ***Uma conclusão por maioria de razão***

Embora, como já referimos, os processos de justificação não tenham sido muito frequentes na realização desta investigação, houve mesmo assim alguns momentos na fase de discussão em que eles estiveram presentes. O episódio seguinte, que ocorreu aquando da apresentação do primeiro grupo, diz respeito a uma situação dessa natureza.

O porta-voz deste grupo tinha já começado a relatar os seus resultados, indicando onde se encontravam, na tabela, os números pares e os ímpares. Entretanto, um elemento de um outro grupo, Manuel, coloca o braço no ar:

Professora: Manuel...?

Manuel: Os números primos encontram-se unicamente na segunda e quarta coluna.

Professora: Mas alguém falou em números primos?

Manuel: Então, falaram na segunda e na quarta coluna!

Professora: Não estou a perceber, Manuel. O que queres dizer?

Manuel: É isso. É que como na segunda e na quarta coluna só há números ímpares, também na primeira e terceira coluna não pode haver números primos, exceptuando o 2.

Professora: Ah! É que tu sabes que só há um número primo que é par, é isso?

Manuel e outros alunos: O 2.

Professora: Qual é?

Alunos: O 2.

Professora: É o 2. Portanto, os outros primos logicamente só podem estar nas colunas onde estão números...

Mauro e outros alunos: Ímpares.

Professora: Muito bem. Vamos continuar.

A professora, embora não tendo percebido, de início, a relação entre o comentário de Manuel e o que estava a ser relatado pelo outro grupo, deu-lhe oportunidade de explicar a sua ideia. De facto, a conjectura deste aluno relacionava-se perfeitamente com aquilo que os colegas tinham relatado e é um exemplo, de uma conjectura que, apoiada num raciocínio lógico e não apenas em alguns casos particulares, se afigura como conclusão. Manuel inferiu a sua conclusão por um raciocínio por maioria de razão, o qual é, aliás, bastante comum em Matemática. Adicionalmente, este aluno chamou a atenção para a excepção, o número dois, o que também é algo muito característico nesta ciência. Este momento foi muito interessante, do ponto de vista do pensamento matemático, e dificilmente seria usufruído pela turma se não houvesse esta possibilidade de pôr em comum os resultados do trabalho realizado.

Salientando a riqueza das explorações desenvolvidas pelos alunos, a professora afirmou a dada altura: “Estão a ver como a mesma actividade gera tantas coisas e tão diferentes!”. Desta forma, os alunos puderam aperceber-se mais plenamente do carácter divergente das investigações e da postura que devem assumir nestas aulas.

### **Os papéis do professor numa aula de investigação**

Como pudemos observar a partir dos exemplos apresentados, o professor tem um papel determinante nas aulas de investigação. Contudo, a interacção que ele tem de estabelecer com os alunos é bem diferente da que ocorre noutros tipos de aulas, levando-o a confrontar-se com algumas dificuldades e dilemas. Estas aulas representam um desafio adicional à sua prática mas, certamente, traduzem-se também em momentos de realização profissional.

No acompanhamento que o professor faz do trabalho dos alunos deve procurar atingir um equilíbrio entre dois pólos. Por um lado, dar-lhes a autonomia que é necessária para não comprometer a sua autoria da investigação e, por outro lado, garantir que o trabalho dos alunos flui e é significativo do ponto de vista da disciplina de Matemática. Com este duplo objectivo em vista, o professor deve procurar interagir com os alunos tendo em conta as necessidades particulares de cada um e sem perder de vista os aspectos mais gerais de gestão da situação didáctica. Deste modo, o professor é chamado a desempenhar um conjunto de papéis bem diversos no decorrer de uma investigação<sup>6</sup>:

desafiar os alunos, avaliar o seu progresso, raciocinar matematicamente e apoiar o trabalho dos alunos. São estes os aspectos que consideramos de seguida.

### ***Desafiar os alunos***

Na fase de arranque da investigação é fundamental garantir que os alunos se sintam motivados para a actividade a realizar. O professor tem aqui um papel muito importante, como vimos, procurando criar um ambiente adequado ao trabalho investigativo. Por outro lado, o professor deve dar uma atenção cuidada à própria tarefa, escolhendo questões ou situações de partida que, potencialmente, constituam um verdadeiro desafio para os alunos.

Perante um conjunto de alunos com interesses, aptidões e conhecimentos diversificados, como acontece habitualmente na sala de aula, a proposta de questões abertas aumenta a possibilidade de estes se envolverem na actividade. De facto, este tipo de questões, que não estão completamente formuladas, podem ser interpretadas e concretizadas de diversas maneiras pelos alunos, cabendo ao professor estimular essa criatividade nas suas explorações. Esta fase inicial do trabalho investigativo é fundamental para criar nos alunos um espírito interrogativo perante as ideias matemáticas. A situação mais familiar na aula de Matemática é a procura de respostas para as questões colocadas pelo professor, o que pode levar os alunos a serem mais afirmativos do que interrogativos<sup>7</sup>. O professor deve, pois, combater essa tendência, mostrando-lhes como é possível interrogar matematicamente as situações e formular boas questões.

Mesmo após o arranque da investigação, o professor precisa continuar a desafiar os alunos no decorrer da actividade por forma a que esta avance normalmente. Isto torna-se particularmente importante quando os alunos chegam a um impasse ou quando, depois de explorarem uma questão, interrompem o ciclo de trabalho. Por isso, o professor tem de estar atento ao trabalho dos alunos, como veremos de seguida.

### ***Avaliar o progresso dos alunos***

O professor precisa de recolher informações sobre o modo como se vai desenrolando o trabalho dos alunos, desde o primeiro momento da investigação. Na fase inicial, torna-se imprescindível observar se os alunos compreenderam bem a tarefa e como reagiram a

esta, isto é, se a tarefa constitui realmente um desafio para eles. À medida que se vão embrenhando na investigação, o professor tem de estar atento à forma como os alunos encaram o trabalho, pois pode acontecer que estes procurem obter uma resposta como se se tratasse de um simples exercício. Será que eles já se apropriaram do conceito de investigação ou estão a trabalhar de forma puramente convencional?

Assumindo que as investigações são, em geral, realizadas em pequenos grupos, o professor procura acompanhar o mais possível o trabalho de cada um deles. Ao chegar junto de um grupo, um dos seus objectivos é recolher informações sobre o desenrolar da investigação. Antes de mais, procura compreender o pensamento dos alunos, fazendo perguntas e pedindo explicações, evitando ajuizar apressadamente sobre o seu trabalho. Constitui um desafio para o professor perceber onde os alunos querem chegar uma vez que não acompanhou todo o processo. Muitas vezes, os alunos não possuem um registo escrito organizado daquilo que fizeram e têm muitas limitações na comunicação matemática oral. Esta situação, desfavorável à avaliação do seu progresso, poderá ser colmatada pelo professor colocando boas perguntas, tendo paciência para escutar e fazendo um esforço sério para compreendê-los, evitando corrigir cada afirmação ou conceito matematicamente pouco correcto.

Através desta recolha de informações sobre o progresso da investigação em cada grupo, o professor adopta a estratégia de interacção com os alunos que se revela mais adequada naquele momento, intervindo consoante as necessidades que neles detecta. As suas opções podem ir desde um simples averiguar se tudo está a ser bem conduzido, dando o sinal de que podem prosseguir sem problemas, até a um apoio muito directo que interfere positivamente no trabalho dos alunos. Por outro lado, a avaliação do progresso da investigação pode, em certas circunstâncias, levar o professor a reequacionar determinadas decisões quanto ao desenrolar da aula. Assim, pode decidir, por exemplo, conceder mais tempo à realização da investigação, fazer uma pequena discussão intermédia com toda a turma ou, até mesmo, passar à discussão final.

### ***Raciocinar matematicamente***

Numa aula em que os alunos realizam investigações matemáticas é muito provável, e desejável, que o professor raciocine matematicamente e de modo autêntico. Dada a natureza deste tipo de actividade, é muito natural que os alunos formulem questões em

que o professor não pensou. De facto, é mesmo impossível antever todas as explorações que podem surgir a partir de uma tarefa matemática verdadeiramente aberta e estimulante.

Deve existir, por parte do professor, uma predisposição para manifestar, perante os alunos, o seu raciocínio matemático. Através do modelo do professor, os alunos podem aprender muito sobre aspectos fundamentais do processo investigativo. Este constitui, pois, um elemento importante a ser utilizado para promover a aprendizagem desta faceta do trabalho na disciplina de Matemática.

Uma das situações em que o professor é levado a raciocinar matematicamente de modo espontâneo ocorre quando os alunos formulam uma conjectura em que este não tinha pensado e que não é muito evidente. Num primeiro momento, o professor pode até ter dificuldade em compreender a ideia dos alunos e ter de reformular para si próprio a questão matemática com base nos elementos que lhe são apresentados. Trata-se, também, de uma ocasião privilegiada para o professor evidenciar como se aborda o teste de conjecturas, pensando em voz alta com os alunos.

Se essas duas etapas do processo investigativo (a formulação e o teste de conjecturas) não levantam, em geral, grandes problemas ao professor, já a justificação de conjecturas pode tornar-se um verdadeiro desafio. É que, por vezes, conjecturas aparentemente simples, formuladas até por alunos dos níveis elementares, escondem processos de prova bastante complexos, mesmo para o professor. Este tem de avaliar rapidamente se será apropriado parar para pensar ou deixar isso para um momento posterior.

Nos dois episódios que apresentámos a propósito da aula de discussão, observa-se que a professora confrontou-se com afirmações dos alunos inesperadas. Por exemplo, no primeiro (*Aprofundando uma conjectura*), um aluno avança com uma pista para tentar explicar a conjectura dos seus colegas, dizendo: “Deve ter a ver com o número das colunas”. A professora repete a afirmação dos alunos, esperando que mais alguém se pronuncie sobre esta: “Deve ter a ver com o número das colunas, diz o Dário, por isso é que vai de 4 em 4 (pausa). Querem dizer mais alguma coisa em relação a isto?”. Não tendo pensado na prova desta conjectura e pressionada pelo tempo que restava, a professora acaba por fazer avançar a aula, sem dar resposta à indicação do aluno. Embora seja necessário, por vezes, tomar estas decisões, isso não deve ser impeditivo de se voltar a abordar a questão, com mais tempo, motivando os alunos a justificarem as suas afirmações.

No segundo episódio (*Uma conclusão por maioria de razão*), a professora deu oportunidade ao aluno de expor o seu raciocínio, tirando uma conclusão por maioria de razão e apresentando uma excepção, processos bem característicos da Matemática. Através do questionamento que foi fazendo, a professora não só evidenciou perante a turma que estava a raciocinar matematicamente sobre as afirmações do aluno, como o ajudou a desenvolver a sua argumentação.

A realização de investigações proporciona, muitas vezes, o estabelecimento de conexões com outros conceitos matemáticos e até mesmo extra-matemáticos. O professor precisa de estar atento a tais oportunidades e, mesmo que não seja possível explorar cabalmente essas conexões, deve estimular os alunos a reflectir sobre elas. Esta é mais uma das situações em que o professor dá evidência do que significa raciocinar matematicamente.

### ***Apoiar o trabalho dos alunos***

Existem aspectos do papel do professor que se prendem directamente com o apoio que concede aos alunos por forma a garantir que são atingidos os objectivos estabelecidos para a actividade. No decorrer de uma investigação essa sua acção incide sobre duas áreas principais: a exploração matemática da tarefa proposta e a gestão da situação didáctica, promovendo a participação equilibrada dos alunos na aula. Ambas são importantes, mas neste livro damos mais atenção aos aspectos relacionados com a primeira.

Na condução da aula o professor tem de estar atento a aspectos característicos do processo investigativo, bem como a outros de natureza mais geral. O apoio a conceder pelo professor assume várias formas: formulação de questões mais ou menos directas, fornecer ou recordar informação relevante, fazer sínteses e promover a reflexão dos alunos.

Numa aula com investigações o professor deve, sem dúvida, privilegiar uma postura interrogativa. As questões que coloca podem, no entanto, assumir diversas formas e ter objectivos diversos. Muitas vezes, a intenção do professor ao colocar uma questão é, simplesmente, a de clarificar ideias, quer para a sua própria compreensão quer para a de toda a turma. Tal é o caso quando a professora diz apenas: “Não estou a perceber, Manuel. O que queres dizer?”.

Quando os alunos se confrontam com dúvidas ou com um impasse no seu trabalho, não sabendo como prosseguir, o professor deve começar por colocar questões abertas. Muitas vezes, quando os alunos lhe colocam uma questão a melhor estratégia é devolvê-la, levando-os a pensar melhor sobre o seu problema. Por vezes, há necessidade de as questões se transformarem em sugestões orientadoras da actividade dos alunos. Isso foi o que aconteceu num dos episódios anteriormente relatados, em que a professora procurou que os alunos verificassem as suas conjecturas: “Deixem lá ver. Vocês estão a somar a segunda com a terceira e a terceira com a quarta coluna e estão a ver que o resultado aparece na segunda coluna... E por que é que não vêem as outras colunas?”. Depois de os alunos se terem apercebido de que não podiam concluir o que tinham afirmado, a professora estimula-os a olharem com atenção para as suas conclusões, afastando-se do grupo: “Talvez seja melhor verem isso...”.

Uma das grandes vantagens de apresentar uma postura interrogativa nas aulas com investigações é o facto de ajudar os alunos a compreenderem que o papel principal do professor é o de apoiar o seu trabalho e não simplesmente validá-lo. Portanto, as habituais perguntas dos alunos, “Está bem? É isto que o professor quer?”, devem ouvir-se cada vez menos à medida que os alunos interiorizam qual é o seu papel e o do professor nestas aulas.

Embora dando primazia ao questionamento como modo de apoio do progresso do trabalho dos alunos, o professor precisa, por vezes, também de fornecer e recordar informação. Trata-se de garantir que o fluxo da investigação não se perde porque os alunos não compreendem certos conceitos ou formas de representação importantes para a actividade. Por vezes, é necessário recordar conceitos anteriormente estudados, por exemplo, através de perguntas esquadrinhadoras. De qualquer modo, seja ou não a partir das perguntas do professor, esses conceitos podem ganhar um novo significado para os alunos quando são utilizados na abordagem de uma nova questão matemática.

Outro aspecto importante do papel do professor ao apoiar os alunos é o de promover a reflexão destes sobre o seu trabalho. É importante ajudá-los a fazer uma síntese da actividade, descrevendo os seus avanços e recuos, os objectivos que tinham em mente e as estratégias que seguiram. Mais uma vez, torna-se necessário que o professor questione para que os alunos compreendam que aquilo que se pretende não é dizer se “está bem” ou se “está mal”, mas que reflectam sobre o processo investigativo, por forma a aprenderem com e sobre ele. A procura de justificações matemáticas para as

suas conjecturas é uma das formas que ajuda a dar sentido à investigação realizada e que, na medida do possível, não deve ser negligenciada pelo professor.

Numa aula de investigação matemática, tal como em qualquer outra, tudo o que acontece depende em boa medida do professor e dos alunos. O professor precisa de conhecer bem os seus alunos e de estabelecer com eles um bom ambiente de aprendizagem para que as investigações possam ser realizadas com sucesso. A exploração antecipada da tarefa, bem como toda a planificação de como o trabalho irá decorrer na sala de aula, são aspectos a que o professor deve dar detida atenção. No entanto, como referimos, estas aulas caracterizam-se por uma grande margem de imprevisibilidade, exigindo dele uma grande flexibilidade para lidar com as situações novas que, com grande probabilidade, irão surgir.

---

<sup>1</sup> Esta tarefa e as que se apresentam mais adiante foram desenvolvidas pela equipa do projecto MPT – *Matemática para todos*.

<sup>2</sup> Estes são alguns dos exemplos relatados em Oliveira (1998).

<sup>3</sup> Ver Pólya (1990).

<sup>4</sup> Ver Brocardo (2001).

<sup>5</sup> Ver Pólya (1990).

<sup>6</sup> Esta discussão apoia-se no trabalho relatado em Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas e Ferreira (1998).

<sup>7</sup> Ver Brocardo (2001).