

Capítulo 4 - Investigações geométricas

A Geometria é particularmente propícia, desde os primeiros anos de escolaridade, a um ensino fortemente baseado na exploração de situações de natureza exploratória e investigativa. É possível conceber tarefas adequadas a diferentes níveis de desenvolvimento e que requerem um número reduzido de pré-requisitos. No entanto, a sua exploração pode contribuir para uma compreensão de factos e relações geométricas que vai muito além da simples memorização e utilização de técnicas para resolver exercícios-tipo.

As investigações geométricas contribuem para perceber aspectos essenciais da actividade matemática tais como a formulação e teste de conjecturas e a procura e demonstração de generalizações. A exploração de diferentes tipos de investigações geométricas pode também contribuir para concretizar a relação entre situações da realidade e situações matemáticas, desenvolver capacidades tais como a visualização espacial e o uso de diferentes formas de representação, evidenciar conexões matemáticas e ilustrar aspectos interessantes da história e da evolução da Matemática.

Os exemplos que a seguir se apresentam procuram exemplificar algumas destas ideias e evidenciar a pertinência da inclusão das investigações geométricas no currículo de Matemática. Começamos por apresentar uma tarefa de investigação e mostrar como ela foi explorada na aula. Em seguida, apresentamos uma discussão em torno de vários exemplos de tarefas de natureza investigativa em Geometria.

Dobragens e cortes

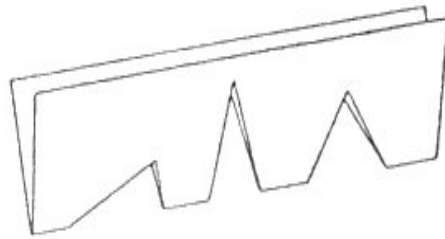
*Dobragens e cortes*¹ (Figura 8) foi a terceira tarefa de investigação proposta aos 17 alunos de uma turma da 8ª série (12-13 anos) e, tal como as duas primeiras, foi explorada em pequenos grupos de 3-4 alunos. Cada grupo dispunha de várias tesouras e de um conjunto de revistas cujas folhas podia arrancar de modo a poder realizar as dobragens e cortes necessários para a exploração da tarefa.

Por certo que na tua infância, na escola ou com amigos, já te entretiveste a fazer cortes em papel e a brincar com os desenhos que obtinhas.

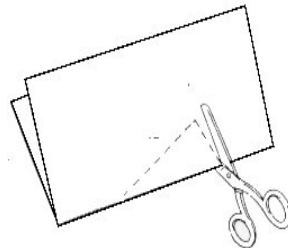
Para explorares esta tarefa vais precisar de uma tesoura e de muito papel!

A - Uma dobragem e dois cortes

1. Numa folha de papel dobrada ao meio corta triângulos equiláteros, isósceles e escalenos. Pega nos pedaços de papel que obtiveste, desdobra-os e diz quais as formas geométricas que têm.



2. Com apenas dois cortes, e se quiseres obter triângulos equiláteros, isósceles e escalenos na folha de papel, que cortes deves fazer?

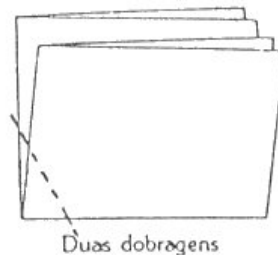


Faz um esboço que mostre os cortes que fizeste e comenta as tuas descobertas.

B - Mais dobragens e um só corte

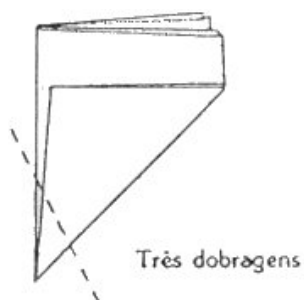
Vais agora investigar o que acontece quando fazes mais do que uma dobragem mantendo ajustados os lados da folha de papel.

1. Com duas dobragens e um corte que tipo de figuras obténs?



De que maneira consegues obter um quadrado?

2. Agora com três dobragens, como mostra a figura abaixo, experimenta fazer a mesma investigação.



De que maneira consegues obter um quadrado?

3. E com quatro dobragens?

4. Preenche a tabela:

nº de dobragens	nº máximo de lados
2	
3	
4	
5	

Explica a relação entre o número de dobragens e o número máximo de lados da figura.

Figura 8. *Dobragens e cortes*

A exploração e discussão desta tarefa ocupou duas aulas: uma de 100 minutos e outra de 50 minutos. Foi previsto que o relatório escrito² sobre a actividade empreendida devia ser elaborado fora da aula e foi pedido aos alunos para combinar com os seus colegas de grupo a ocasião em que se deviam reunir para o efeito.

Quando esta tarefa foi proposta (na 3ª semana de aulas), os alunos tinham ainda pouca experiência de trabalho na realização de investigações. No entanto, começava a notar-se um certo esforço no sentido de não pedir sistematicamente auxílio à professora e de procurar discutir as dúvidas e decisões com os seus colegas de grupo.

Depois de distribuídos pelos grupos as fichas de trabalho, tesouras e revistas, a professora incentivou os alunos a lerem com atenção o enunciado da tarefa e a trabalhar

cooperativamente. No entanto, os alunos demoraram algum tempo a concentrar-se no trabalho: referiam o facto, que achavam estranho, de usar tesouras e folheavam as revistas comentando um ou outro artigo. Embora nesta fase inicial se tenha observado algum dispêndio desnecessário de tempo, quando os alunos se começaram a concentrar no trabalho, pareciam estar entusiasmados com a perspectiva de poderem usar estes materiais pouco usuais. De facto, foi com visível entusiasmo que começaram a explorar a tarefa passando a arrancar, dobrar e cortar as folhas das revistas sem que ninguém prestasse atenção às notícias nelas impressas.

Parte A – Uma dobragem e dois cortes

A primeira questão da ficha não explicita a necessidade de fazer uma certa exploração de vários casos dentro de cada tipo de triângulo, uma vez que o seu principal objectivo é ajudar a perceber o tipo de trabalho que os alunos devem realizar. Por isso, tinha-se decidido dar liberdade aos alunos para explorarem o mais autonomamente possível esta primeira questão. Tinha-se também previsto a possibilidade de levantar algumas questões que os ajudassem a completar o trabalho realizado, mas só depois destes terem terminado a exploração desta parte da tarefa.

Os alunos começaram a dobrar folhas e a recortar os vários tipos de triângulos sem dificuldade. De uma forma geral, cortaram apenas um triângulo de cada tipo e chegaram a uma conclusão idêntica à registada por um dos grupos:

Cortámos todos os tipos de triângulos, e à medida que os fomos cortando fomos obtendo diversos quadriláteros.

Por exemplo:

Com o triângulo isósceles e equilátero obtivemos (...) losangos.

Com o triângulo escaleno obtivemos um papagaio³.

A segunda questão levantou algumas dificuldades iniciais: na pergunta anterior ninguém tinha cortado um triângulo rectângulo e, por isso, estavam convencidos que obtinham sempre quadriláteros. Demoraram algum tempo a realizar várias tentativas e, alguns grupos, só conseguiram descobrir o tipo de corte que deveriam fazer, depois da professora lhes fazer notar que eles tendiam a cortar apenas triângulos acutângulos. No

entanto, quando perceberam que um dos cortes devia ser perpendicular à folha de papel, rapidamente começaram à procura dos tipos de triângulos pedidos.

Nesta fase os alunos desenvolveram um trabalho caracterizado pela realização de várias tentativas que davam por terminadas a partir do momento em que conseguiam uma resposta. Se uma experiência lhes permitia, por exemplo, obter um triângulo isósceles, faziam o esboço do corte que tinham realizado e começavam a realizar novas tentativas no sentido de obter os outros tipos de triângulos pedidos. Assim, a sua conclusão que não era possível obter um triângulo escaleno decorria da constatação de que nenhuma das tentativas realizadas lhes permitia obter esse tipo de triângulo. Também, o modo como era possível obter um triângulo equilátero era descrito a partir de um exemplo particular em que o tinham conseguido obter.

Procurando que os alunos conseguissem começar a recolher os dados e a testar as suas conjecturas de um modo mais sistemático, a professora da turma sentiu necessidade de fazer uma intervenção oral em que questionava a conclusão dos alunos relativamente à pergunta 1, segundo a qual se obtinham sempre quadriláteros. Insistiu também na importância de estudar exaustivamente cada caso e de não poderem assumir como geral o resultado de uma experiência.

A partir desta intervenção, os alunos começaram a organizar um trabalho mais sistemático. Retomaram a pergunta 1 e procuraram cortar triângulos que ainda não tinham estudado. Embora ainda sem se preocupar com a procura de argumentos que validassem as suas conclusões, a maioria dos alunos conseguiu identificar o tipo de triângulos que lhes permitia obter quadrados, losangos, triângulos e papagaios côncavos ou convexos.

A validação das suas conjecturas continuava muito ligada à análise dos casos que tinham estudado. No entanto, sobretudo a partir do momento em que eram directamente questionados pelas professoras, alguns alunos começaram a perceber como podiam pensar de modo a justificar as conjecturas que tinham resistido a sucessivos testes:

Tita: Quando se corta um triângulo isósceles obtém-se um losango, quando se corta um escaleno tem-se um papagaio.

Professora: Porquê?

Tita: (pegando numa bolsa transparente onde têm todas as figuras recortadas e onde escreveram a pergunta e a situação a que correspondia cada recorte)

Temos que procurar aqui a figura ... (pegando no recorte de um losango) ... cortámos um triângulo isósceles e deu este losango.

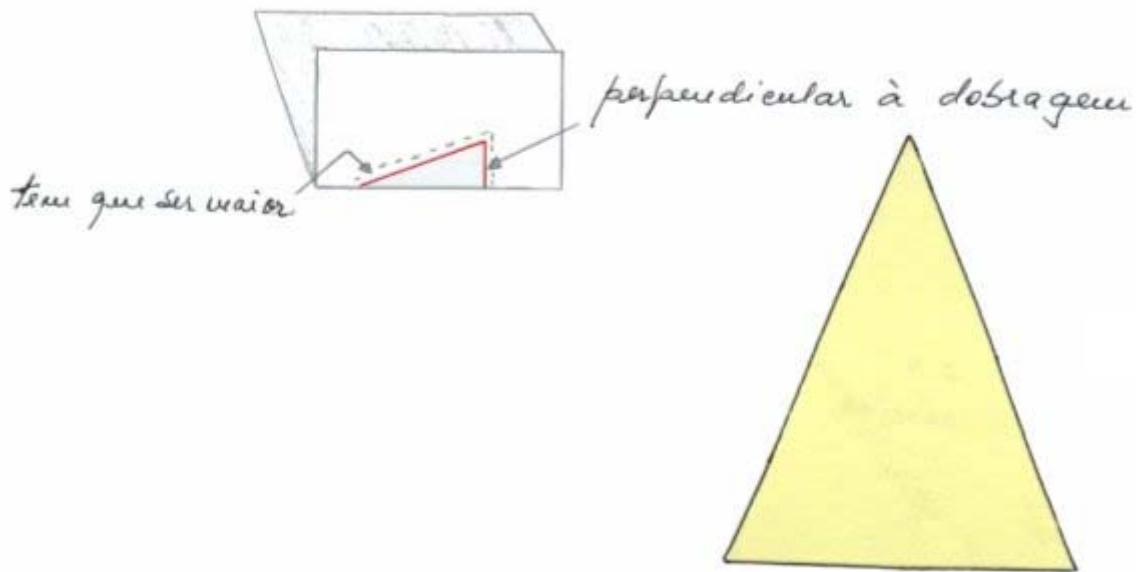
Professora: Sim, mas porquê?

João: Então, foi o que deu em todos que fizemos.

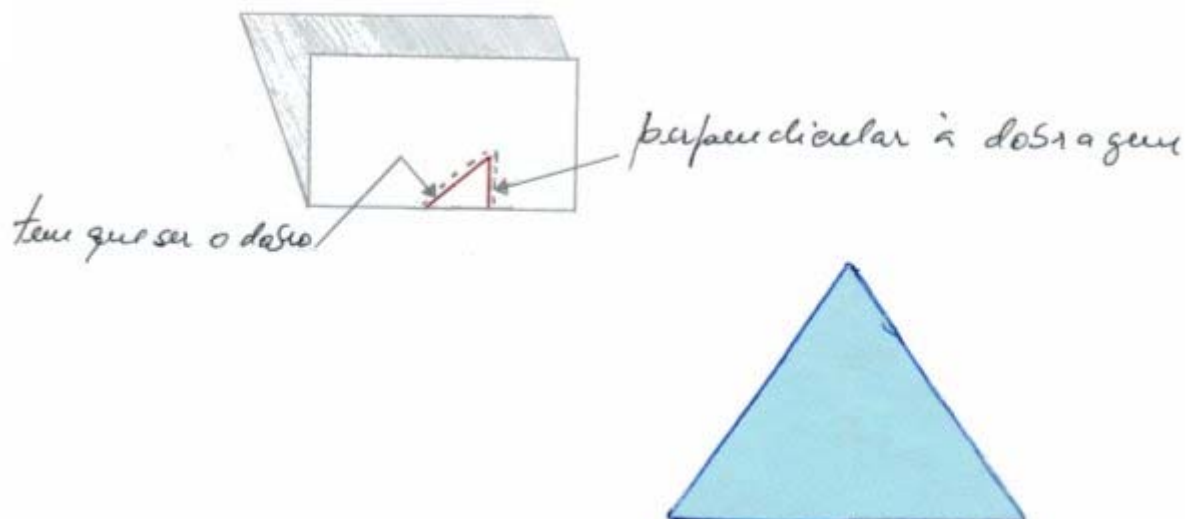
Eva: (pegando no recorte) Esperem (olha para o recorte e dobra-o segundo o vinco de dobragem) quando estes dois lados são iguais também os outros por trás ficam iguais. Os quatro lados são iguais, por isso dá sempre um losango.

Nesta fase, para alguns grupos, foi importante uma troca de impressões com as professoras. No entanto, quando retomaram a exploração da pergunta 2 já revelaram alguma preocupação em precisar as características dos cortes que deviam fazer e em justificar a impossibilidade de obter triângulos escalenos. A parte do relatório de um dos grupos, referente a esta questão, ilustra este tipo de preocupações:

Se quiséssemos obter triângulos isósceles devíamos fazer os seguintes cortes:



E se quiséssemos obter triângulos equiláteros:



Em relação ao triângulo escaleno, não o conseguimos obter devido aos seus lados serem todos diferentes, e ao cortar de um lado à partida já ficaria igual do outro, pois a dobragem serve como eixo de simetria.

Parte B – Mais dobragens e um só corte

Ao explorarem esta parte da tarefa, os alunos começaram a fazer um número maior de testes procurando verificar, a partir da análise de mais casos, as suas conjecturas. No entanto, logo na primeira questão, o facto de procurarem descobrir uma forma de obter um quadrado, terá também incentivado a realização de mais experiências. Embora no enunciado se afirme que é possível obter quadrados, ao procurarem obtê-los, os alunos realizaram uma série de experiências. De facto, apenas o corte que faz com os lados da folha de papel ângulos de 45° , permite obter quadrados e, antes de conseguir descobrir isto, a grande maioria dos alunos teve de realizar cortes com inclinações diferentes e analisar as figuras que ia obtendo.

Para preencher a tabela da pergunta 4 os alunos recorreram aos resultados obtidos anteriormente. A questão de experimentar ou não fazer cinco dobragens de modo a poderem completar a última linha da tabela foi abordada de duas formas. Alguns grupos, ao perceberem que era difícil dobrar cinco vezes a folha de papel, chamaram a professora. Só a partir do momento em que esta os incentivou a olhar para os resultados já obtidos e para o que significava dobrar sucessivamente a folha, é que começaram a pensar sem concretizar o corte com 5 dobragens. Outros grupos, como o de Eva, verificaram que não era necessário realizar a experiência com 5 dobragens.

Eva: 4, 8, 16, 32, é 32.

João: Ih 32. Como é que sabes?

Eva: Sim, 16 mais 16 dá 32.

Tita: Eu acho que não são 32. É melhor fazermos a dobragem.

João: É. Então olha lá, 4 mais 4 são 8, 8 mais 8 são 16, 16 mais 16 são 32.

Tita: Ah! Tá bem.

João: Pensa... Puxa pela cabeça.

Tita: João não sejas parvo... Estava a pensar doutra maneira (lendo): “explica a relação entre o número de dobragens e o número máximo de lados da figura”.

João: A relação é quando temos 2 dá 4, quando temos 4 dá 8.

Tita: Não... Assim não pode ser.

Eva: Sim, tem de ser assim. Espera, deixa ver 8 (dobra uma folha que tem na mão)... Já sei. É que quando a gente dobra outra vez acrescenta o mesmo número de lados. Vês aqui? Está assim com três dobragens que vai dar 8. Agora dobra-se outra vez e esta parte aqui vai dar mais 8. Temos duas partes iguais por isso vamos multiplicando por 2.

Todos os alunos da turma conseguiram chegar a este tipo de explicação relativamente à relação existente entre o número de dobragens e o número máximo de lados da figura. O desafio, entretanto lançado pela professora, de pensar numa relação em que não se tornasse necessário recorrer a todas as dobragens anteriores, mostrou-se mais difícil para alguns alunos. Especialmente complicado foi passar de uma forma de relacionar os valores da tabela de uma linha para outra (processo recursivo que tinham conseguido identificar e justificar) para uma forma de os relacionar por linha. No entanto, após várias tentativas e com maior ou menor apoio da professora, eles conseguiram chegar à generalização de que para n dobragens se terá 2^n lados. O grupo da Eva foi a exceção uma vez que o conseguiu fazer de um modo completamente autónomo:

João (duplicando o primeiro valor de cada linha e comparando com o segundo valor): Espera lá, tive uma ideia... 3 mais 3 são 6, faltam 2, 4 mais 4 são 8, faltam 8, isto também não dá.

Tita: Isto aqui é um bocado difícil. Então, quando aumenta o número de dobragens multiplicamos por 2 o número máximo de lados. Isto já é uma relação.

Eva: Sim mas não é bem o que nos pediam porque assim temos de fazer todos. Para saber o número de lados com que ficamos com 10 dobragens temos de fazer a tabela toda até lá.

Eva: 2 vezes 2 são 4, 3 vezes 3 são 9, mas lá temos 8. Não dá.

João: 4 vezes dois, não.

Eva: Estes números aqui... 2 vezes 2 é 4. O 8 ...

Tita: É 4 vezes 2. Isso já sabíamos que era multiplicar por 2.

Eva: Sim mas podemos escrever 2 vezes 2 vezes 2 que dá 8, o 2 dá o número de dobragens.

João: O quê?

Eva: Com 3 dobragens é 2 vezes 2 vezes 2. Agora 2 vezes 2 vezes 2 vezes 2 dá o de quatro dobragens.

João: Ih pá, já está. Já sabemos.

Eva: Com 10 dobragens é 2 vezes 2 vezes 2, dez vezes.

Depois da exploração da tarefa em pequenos grupos, a professora coordenou uma discussão das descobertas dos alunos de modo a que todos tivessem oportunidade de intervir. Depois de um grupo explicar o modo como tinha explorado determinada questão, os outros eram solicitados a analisar o que tinha sido explicitado e a acrescentar novos aspectos. Paralelamente, a professora insistiu na procura de argumentos que pudessem justificar as relações encontradas, aspecto que tinha ainda reduzida expressão no trabalho desenvolvido pelos alunos.

O episódio seguinte ilustra o modo como a professora procurou que os alunos fossem propondo justificações para as suas conclusões:

Professora: É possível com a folha dobrada ao meio obter triângulos?

Lino: Os cortes não podem ser quaisquer.

Eva: Temos de cortar triângulos rectângulos.

Professora: Porquê?

Rita: Se um corte não for perpendicular à dobra da folha fico com mais um lado e já não dá três lados.

Professora: Isso. E só posso obter que triângulos?

Eva: Isósceles e equiláteros.

Professora: Nunca posso obter escalenos porquê?

Eva: A linha de dobragem é um eixo de simetria.

Professora: E...

Eva: Os triângulos escalenos não têm eixos de simetria.

Os relatórios elaborados pelos alunos traduziram, sobretudo, as conclusões a que eles tinham chegado e ainda não reflectiam a preocupação em as justificar sem ser a partir das experiências levadas a efeito. No entanto, de um modo geral, todos os grupos conseguiram apresentar relatórios que sistematizavam o trabalho realizado.

As professoras fizeram um balanço bastante positivo deste trabalho uma vez que, para além de terem sido discutidas ideias importantes relacionadas com a exploração de uma investigação, os alunos se mostraram bastante entusiasmados e procuraram sempre participar activamente. Esta tarefa possibilitou a análise de aspectos em que os alunos tinham ainda dificuldades – olhar para uma tarefa de investigação como um todo e não como uma sequência de perguntas não relacionadas, não retirar conclusões a partir de um número reduzido de experiências, ser capaz de organizar os dados recolhidos e de procurar argumentos que validem as suas conjecturas – mas que começaram a ser ultrapassadas por muitos deles.

Os comentários dos alunos ao trabalho realizado reflectem o gosto que tiveram em explorar esta tarefa e, muitos deles, referem a maior facilidade com que o fizeram (comparativamente com as duas primeiras investigações que tinham realizado). Como escreveu um dos grupos no seu relatório: “Este trabalho foi até agora o que achámos mais divertido e fácil, na medida em que trabalhámos com cortes, e também de certa forma pudémos relembrar os eixos de simetria (...) foi um trabalho sobre investigações que gostámos muito de fazer. Conseguimos explorá-lo ao máximo, fazendo várias experiências”.

As investigações no ensino da Geometria

Por todo o mundo têm vindo a ser perspectivadas recomendações curriculares para o ensino da Geometria. De um modo geral, tem sido contestada a visão do movimento da Matemática Moderna que destacava o papel da Geometria para ilustrar o carácter dedutivo e axiomático da Matemática e desvalorizava os aspectos ligados à observação, experimentação e construção.

As tendências curriculares actuais convergem ao considerar que esta área da Matemática é fundamental para compreender o espaço em que nos movemos e para

perceber aspectos essenciais da actividade matemática. Salienta-se, por exemplo, a importância de estudar os conceitos e objectos geométricos do ponto de vista experimental e indutivo, de explorar a aplicação da Geometria a situações da vida real e de utilizar diagramas e modelos concretos na construção conceptual em Geometria. Com os exemplos que apresentamos em seguida procuramos evidenciar a ideia de que as investigações geométricas constituem experiências de aprendizagem importantes para prosseguir estas recomendações curriculares.

Começamos pela utilização de programas de Geometria Dinâmica, uma opção curricular actualmente bastante enfatizada. Este suporte tecnológico permite o desenho, manipulação e a construção de objectos geométricos, facilita a exploração de conjecturas e a investigação de relações que precedem o uso do raciocínio formal⁴. Vários estudos empíricos destacam também que, na realização de investigações, a utilização destas ferramentas facilita a recolha de dados e o teste de conjecturas apoiando, deste modo, explorações mais organizadas e completas e permitindo que os alunos se concentrem nas decisões ao nível do processo⁵.

Vejamos dois exemplos concretos. O primeiro, *Partindo do Teorema de Pitágoras*, é um desafio que pode ser proposto a partir do momento em que os alunos já conhecem este teorema. É um exemplo de uma proposta de trabalho em que está presente a ideia de analisar generalizações de factos conhecidos.

Como sabes o Teorema de Pitágoras estabelece uma relação entre as áreas dos quadrados cujos lados são os catetos e a hipotenusa de um triângulo rectângulo. Mais concretamente, costumamos enunciar este teorema dizendo: num triângulo rectângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Propomos-te agora que investigues, com o auxílio do *Geometer's Sketchpad*⁶, possíveis generalizações deste teorema pensando na seguinte questão:

- Se em vez de quadrados construíres outras figuras geométricas a relação entre as áreas mantém-se?

Podes começar por investigar o que se passa se construíres triângulos equiláteros:

- constrói um novo triângulo rectângulo;
 - sobre cada um dos catetos e sobre a hipotenusa constrói triângulos equiláteros;
 - compara a soma das áreas dos triângulos construídos sobre os catetos com a área do triângulo construído sobre a hipotenusa.
 - que conjectura podes estabelecer?
 - tens motivos que te levam a pensar que ela é sempre verdadeira?
-

Investiga o que acontece se construíres sobre os lados de um triângulo rectângulo outros polígonos regulares.

E se construíres semi-círculos?

Com base nas experiências que fizeste anteriormente, estabelece uma conjectura que diga respeito a figuras construídas sobre os lados e sobre a hipotenusa de um triângulo rectângulo. Escolhe uma figura para a qual a conjectura não tenha ainda sido verificada e observa se esta se mantém. Explica por que é que a tua conjectura te parece verdadeira.

Figura 9. *Partindo do Teorema de Pitágoras*

Depois dos alunos construírem o triângulo rectângulo, com o auxílio dos *macros* já integrados no *Sketchpad*, podem facilmente construir polígonos regulares e não regulares. De facto, a possibilidade de usar programas de Geometria Dinâmica facilita a realização de experiências que, de outro modo, se tornariam morosas e difíceis de analisar.

A investigação é inicialmente centrada nos polígonos regulares. Para cada tipo de polígono regular os alunos facilmente realizam um grande número de testes: basta arrastar um dos vértices do triângulo equilátero para obter uma figura diferente. Após sucessivos testes com vários polígonos regulares é natural que os alunos elaborem uma conclusão idêntica à seguinte, apresentada por um grupo após ter construído polígonos regulares com 3, 5 e 6 lados:

Desenhámos o hexágono e a regra não se alterou, novamente a área dos hexágonos desenhados sobre os catetos é igual à área do hexágono desenhado sobre a hipotenusa. Agora pensámos que a regra se mantinha para todos os polígonos regulares que desenhássemos sobre os lados do triângulo rectângulo.

Este tipo de “conclusão” pode originar uma interessante discussão em torno da diferença entre “verificar para muitos” e “provar para todos” que pode ser precisada a partir do desafio, lançado pelo professor, de pensar numa demonstração para um ou dois tipos de polígonos regulares.

No caso dos polígonos não regulares surge facilmente a ideia de contra-exemplo: desde que se encontre um polígono não regular que não verifica a conjectura estabelecida para os regulares, pode-se concluir que ela não se verifica em todos os polígonos.

Outro exemplo de tarefa que pode ser explorada com programas de Geometria dinâmica é *Quadriláteros e pontos médios*.

Utiliza um programa de Geometria Dinâmica (*Geometer's Sketchpad*, *Cabri-Géomètre* ou *Geometricks*) para realizares esta investigação sobre quadriláteros.

1. Constrói um quadrilátero qualquer e o ponto médio de cada um dos lados. Em seguida, une os pontos médios dos lados consecutivos. Que tipo de quadrilátero obtiveste?

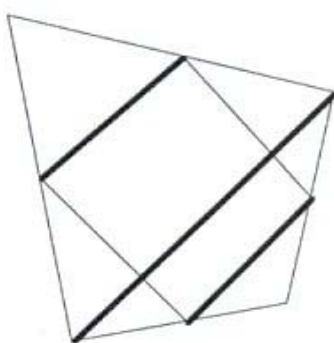
Arrasta um dos vértices do quadrilátero inicial. Diz o que acontece e tenta justificar porquê.

2. Investiga agora o que acontece se o quadrilátero inicial for especial (quadrado, rectângulo, losango...).

Figura 10. *Quadriláteros e pontos médios*

Esta investigação tem como base a ideia de partir da construção de figuras para investigar relações entre elas. Na pergunta 1, após várias experiências, os alunos começam a aperceber-se de que obtêm sempre um paralelogramo. Nesta altura é importante que o professor os incentive a procurar uma demonstração desta conjectura.

Um caminho possível para essa demonstração, é começar por traçar uma das diagonais do quadrilátero inicial.



Depois, podemos garantir que cada um dos dois lados do quadrilátero inscrito que estão assinalados é paralelo à diagonal que se traçou, usando o seguinte teorema de Euclides: se traçarmos uma recta paralela a um dos lados de um triângulo, então ela corta os lados do triângulo proporcionalmente; e, se os lados do triângulo forem cortados

proporcionalmente, então o segmento de recta que une os pontos médios é paralelo ao lado restante do triângulo. Finalmente, podemos concluir que, uma vez que cada um dos lados assinalados é paralelo à mesma diagonal, então eles são paralelos entre si. Fica assim demonstrada a conjectura.

A investigação proposta na segunda questão exige que os alunos tenham bem presente as propriedades dos vários quadriláteros e que as utilizem na sua construção e verifiquem de modo a estabelecer conjecturas que relacionem o quadrilátero de partida e o quadrilátero que se obtém unindo os seus pontos médios.

Uma outra recomendação curricular geral que tem vindo a ser salientada há já alguns anos é a de utilizar, na sala de aula, materiais manipuláveis. Por exemplo, em 1989, o NCTM considerava que:

- Todas as salas de aula devem ser equipadas com conjuntos de materiais manipuláveis (por exemplo, cubos, placas, geoplanos, escalas, compassos, régua, transferidores, papel para traçado de gráficos, papel pontilhado).
- Professores e alunos devem ter acesso a materiais apropriados para desenvolver problemas e ideias para explorações.

Está hoje bastante difundido um conjunto de materiais manipuláveis adequados ao estudo de vários conceitos e relações geométricas como simetrias, pavimentações ou cortes em poliedros. Este materiais constituem um importante ponto de partida que entusiasma os alunos a fazer explorações, apoia a recolha de dados e a formulação de conjecturas.

Um exemplo disto foi a reacção dos alunos de uma turma a quem foi proposto realizar uma investigação sobre a relação entre o número de vértices, arestas e faces dos poliedros convexos. Os alunos dispunham de várias peças de *polidron* (triângulos, quadrados, pentágonos e hexágonos que encaixam uns nos outros) que podiam usar para construir vários sólidos geométricos. Ao trabalhar esta investigação na aula, foi visível como a utilização deste material entusiasmou os alunos para realizar o trabalho proposto. O seguinte comentário, incluído no relatório de um dos grupos, ilustra bem esta potencialidade: “e sem dúvida o mais interessante foi a utilização dos *polidrons*, com os quais ao mesmo tempo que trabalhávamos nos divertíamos”.

Um outro exemplo, é o de uma investigação em que é proposto aos alunos a construção de cubos de diferentes dimensões a partir de “cubinhos” unitários:

Imagina agora que, depois de construído o cubo de aresta 3 com os cubinhos, se decidiu pintá-lo exteriormente de vermelho.

Quantos cubinhos ficam com uma única face pintada? E com duas? E com três?...
E com nenhuma?

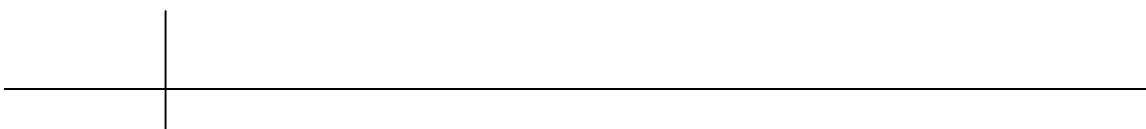
Investiga o que aconteceria se pintássemos um cubo de aresta 4. E se pintássemos um de aresta 5? E de aresta 10?

Figura 11. *Cubos, cubos e mais cubos*

A possibilidade de usar cubinhos apoia o trabalho inicial de recolha de dados. Mas, também, apoia a justificação dos valores encontrados mesmo para os casos em que se torna pouco viável a efectiva construção do cubo (como nos casos de aresta 5 e 10). Por exemplo, para perceber que o número de cubinhos com zero faces pintadas corresponde ao número de cubinhos necessários para construir um cubo cuja aresta tem menos dois cubinhos que o cubo inicial, é importante olhar para os modelos construídos e imaginar o que fica no interior. Daqui pode facilmente justificar-se que a expressão $(n-2)^3$ corresponde ao número de cubinhos com zero faces pintadas.

Os exemplos discutidos anteriormente centraram-se em investigações em que é importante a utilização de ferramentas tecnológicas ou de materiais manipuláveis. A realização de investigações permite também perseguir uma ideia salientada por Freudenthal⁷ – a de proceder a pequenas organizações locais da Geometria. Para este autor, em vez de apresentar aos alunos uma organização global da Geometria, podem ser proporcionadas experiências em que eles sejam convidados a organizar um pequeno número de resultados conjecturados por eles. A tarefa *Quadriláteros e diagonais* é um exemplo de como este aspecto pode ser trabalhado a um nível elementar. De facto, na discussão final do trabalho realizado pelos alunos, o professor pode desafiá-los a organizar uma sistematização das suas conclusões, clarificando, deste modo, como se pode organizar uma classificação dos quadriláteros tendo em conta as características das suas diagonais.

Traça um segmento vertical como o seguinte:



1. Desenha outro, de modo que os dois segmentos sejam as diagonais de um quadrado. Desenha o quadrado correspondente e escreve os cuidados que tiveste ao traçar a segunda diagonal. Faz o mesmo para cada um dos tipos de quadriláteros que conheces.
 2. Procura agora definir as características das diagonais dos quadriláteros anteriores.
-

Figura 12. *Quadriláteros e diagonais*

Vários dos exemplos que fomos discutindo ao longo deste capítulo incidem sobre aspectos particulares, como, por exemplo, a utilização de materiais manipuláveis na realização de investigações. No entanto, em todos eles esteve presente a ideia que o trabalho em torno de tarefas de investigação geométricas permite ao professor perseguir uma recomendação curricular, hoje largamente aceite, de que deve ser dado tempo e oportunidade ao aluno para organizar as suas experiências espaciais.

¹ Esta tarefa, tal como as restantes tarefas referidas neste capítulo, foi desenvolvida pela equipa do projecto MPT – *Matemática para todos*. O relato que aqui se apresenta diz respeito a um projecto centrado na exploração de investigações na aula de Matemática, já referido no capítulo anterior.

² A elaboração de relatórios será discutida em detalhe no capítulo 6.

³ Na aula usava-se o termo *quite*.

⁴ Existem diversos programas de Geometria Dinâmica, a que feremos referência mais adiante. Para uma descrição de experiências de sala de aula o leitor pode ver Borba e Penteado (2001). Sobre o papel destes programas na aprendizagem da Matemática, ver também Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999).

⁵ Ver Brocardo (2001).

⁶ O *Geometer's Sketchpad* é um programa de geometria dinâmica muito semelhante ao *Cabri-Géomètre* ou ao *Geometricricks*. Esta tarefa, embora pensada para o *Sketchpad*, pode igualmente ser trabalhada usando outros programas, nos quais os alunos terão de ter uma iniciação relativamente ao modo de os usar para investigar propriedades geométricas.

⁷ Ver Freudenthal (1973).