

# Fim à aritmética de papel e lápis<sup>1</sup>

Anthony Ralston, *State University of New York, Buffalo, EUA*

## Resumo

Este artigo propõe o fim do ensino da aritmética de papel e lápis na escola elementar, substituindo-o por um currículo que enfatize, muito mais do que actualmente, a aritmética mental e no qual a calculadora seja utilizadas para fins educativos em todos os níveis de ensino, incluindo o pré-escolar. O artigo analisa e refuta a argumentação apresentada pelos proponentes do *back-to-basics* contra o uso da calculadora e a favor da instrução tradicional nos algoritmos da aritmética de papel e lápis. É demonstrado o valor da aritmética mental na consecução de todos os objectivos – e mais – do currículo tradicional. Também é delineado um currículo de Matemática do ensino elementar, sem aritmética de papel e lápis. É discutido, igualmente, o impacto de um tal currículo no ensino secundário e universitário. Finalmente, são avaliados os constrangimentos para atingir o que o artigo advoga.

*É possível ser um matemático de primeira grandeza sem ser capaz de calcular. É possível ser um grande calculador sem possuir a mínima noção de Matemática.*  
Novalis (1772-1801)

Atingir um grau de mestria na aritmética de papel e lápis (APL) deveria deixar de constituir um objectivo da Matemática do ensino elementar. O que não significa dizer – claro – que os professores não devam utilizar algoritmos de APL para os fins que desejarem. Apenas significa que não se deve esperar que as crianças aprendam estes algoritmos e que, certamente, não devem ser testados sobre eles. Neste artigo explico a motivação desta proposta e, em particular, debato o que creio dever substituir esta parte da Matemática do ensino elementar.

Em primeiro lugar, pretendo levar em consideração as possíveis objecções a esta proposta, de modo a contextualizar a alternativa que proponho.

---

<sup>1</sup> Ralston, A. (1999). Let's abolish pencil-and-paper arithmetic. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 18(2), 173-194.

## Back to basics

Parece estranhamente perverso, no actual clima da educação matemática, em particular nos Estados Unidos e na Grã-Bretanha, propor o abandono da APL. Nos EUA, as normas recentemente aprovadas pelo State Board of Education (Califórnia, 1998), versão substancialmente revista das normas emitidas pela California Academic Standards Commission (Califórnia, 1997), mandatam efectivamente um regime exclusivo de APL no ensino elementar, banindo as calculadoras de todos os testes estaduais nos níveis K-6. Esta abordagem *back-to-basics*<sup>2</sup> é a antítese do que este artigo propõe.

Na Grã-Bretanha, um relatório (DFEE, 1998a) encomendado pelo Ministro da Educação, David Plunkett, do novo governo trabalhista, desencoraja “tanto quanto possível a utilização de calculadoras” na instrução matemática de crianças até aos 11 anos de idade. Embora o relatório final (DFEE, 1998b), em reacção às críticas generalizadas ao relatório preliminar, aperfeiçoe este conselho, ainda assim advoga pouco ou nenhum uso de calculadoras até aos “anos finais” da escola primária (isto é, quando as crianças têm 10 ou 11 anos). De facto, o próprio governo britânico actual, mais do que os seus antecessores, professa uma filosofia *back-to-basics*.

Apesar dos educadores matemáticos nos EUA terem condenado amplamente as normas da Califórnia e, de modo análogo, os educadores matemáticos na Grã-Bretanha serem quase todos (mas não todos – Gardiner, 1998) veementemente contra a posição governamental, muitos outros, em ambos os países, são apoiantes convictos do *back-to-basics*. Educadores não matemáticos, muitos encarregados de educação e a maioria dos políticos, desde sempre deploraram que se colocassem calculadoras nas mãos de crianças pequenas<sup>3</sup>.

São talvez os investigadores matemáticos que estão mais fortemente a favor das novas normas da Califórnia, incluindo muitos de instituições prestigiadas como Stanford e Berkeley. (Na Grã-Bretanha, a comunidade dos investigadores matemáticos

---

<sup>2</sup> Nem todos aceitam que *back-to-basis* seja uma descrição justa das normas da Califórnia (Wu, 1998) mas, como este termo implica um regresso à APL apenas na escolaridade elementar, então as normas da Califórnia são, com efeito, normas "*back-to-basis*".

<sup>3</sup> A ironia está em que a maioria destas mesmas pessoas aprova de todo o coração os computadores nas escolas. Porque será? Porque os computadores são caros – portanto, com prestígio – ao passo que as calculadoras são baratas – portanto, para dar nas vistas? Ou porque todos pensam que entendem a Matemática da escolaridade elementar podendo, assim, ter opiniões válidas sobre o assunto enquanto que a maioria das pessoas já esqueceu, se é que alguma vez aprendeu, a maior parte da Matemática do ensino secundário?

tem estado relativamente silenciosa sobre (DFEE, 1998a e 1998b), mas uma parte significativa dessa comunidade opõe-se claramente a que a calculadora desempenhe um papel não-trivial na Matemática do ensino elementar, apesar de estudos respeitáveis (Shuard, 1991) mostrarem a eficácia desta abordagem.) A comunidade dos investigadores matemáticos tem bons motivos para estar preocupada com o estado da educação matemática pré-universitária nos EUA, tema a que voltarei na secção seguinte. Faço notar, simplesmente, que a comunidade americana dos investigadores matemáticos não tem entendido muito bem o impacto da tecnologia na Matemática a nível universitário; por isso, dificilmente causa surpresa que, em geral, embora com honrosas excepções, tenha sido completamente incapaz de entender esse impacto no currículo da Matemática pré-universitária. Na verdade, em regra, e de novo com a ressalva das excepções, os investigadores matemáticos pura e simplesmente não sabem daquilo que falam quando criticam o que acontece no ensino elementar (American, 1995-1997). Diagnosticaram correctamente o problema – fraca preparação para a Matemática universitária – mas não entendem nem as causas nem a cura<sup>4</sup>.

### **O valor da aprendizagem da APL**

O estímulo do movimento anti-calculadoras *back-to-basics* provém principalmente de dois factores:

1. A fraca colocação dos alunos americanos (e britânicos) em comparações internacionais (Schmidt *et al.*, 1997). Uma vez que tais comparações a nível do ensino elementar incidem na destreza da APL, obtendo os alunos americanos e britânicos resultados fracos, então a justificação deve encontrar-se no insucesso em aprender adequadamente a APL<sup>5</sup>. E que causa mais provável para este insucesso do que o crescente uso de calculadoras ao longo do último quarto de século? Nas comparações do ensino secundário, a APL não representa um papel tão importante (de qualquer modo, não é um papel trivial). Contudo, é um argumento frequente que o insucesso no domínio

---

<sup>4</sup> Aplica-se a mesma crítica aos informáticos universitários. Por exemplo, Gelernter (1998) acredita que “as calculadoras deveriam ser banidas das escolas elementares americanas”.

<sup>5</sup> Pode-se duvidar se os estudantes americanos alguma vez alcançaram grande mestria na APL. Johnson e Rising (1967) referem um estudo de 1932 sobre mais de 200000 alunos dos níveis 5-12, no qual apenas 20% dos alunos do nível 12 conseguiu calcular 2,1% de 60. Assinalam ainda que “Em 1942, o Almirante Nimitz relatava que 68% dos 4200 recrutas em 27 universidades e faculdades americanas foi incapaz de passar a parte do exame relativa ao raciocínio aritmético para entrar na Corpo de Treino de Oficiais da Reserva Naval”.

da APL durante o ensino elementar cria dificuldades ao aluno em todos os níveis posteriores de Matemática.

2. A preparação cada vez mais fraca dos estudantes universitários do 1º ano para estudar Matemática universitária. Supondo que é este o caso – e um espectro muito amplo de matemáticos universitários assim o crê – então a causa desta fraca preparação não poderia ser a utilização de novas técnicas e novos materiais da moda – calculadoras, muitas vezes – no ensino da Matemática escolar? As calculadoras também são frequentemente associadas com falta de rigor no ensino da Matemática, um “enfraquecimento” do currículo.

Pessoalmente, acredito que, apesar de estarem correctas as premissas de ambos os argumentos, as conclusões são completamente estouvadas e sem suporte factual ou verosímil. (Menciono, em particular, que, por ensinar Matemática na universidade durante 30 anos, de 1965 a 1995, subscrevo plenamente a premissa do segundo argumento. Em geral, os meus alunos sabiam cada vez menos Matemática ao entrar na universidade e, não menos importante, sabiam cada vez menos acerca do que é a Matemática e do que nela há de valor.).

O meu raciocínio é o seguinte:

1. Em princípio, não parece haver motivo para que a mistura de APL e calculadora num currículo aritmético conduza a que, na globalidade, sejam mais fracos a compreensão aritmética e o desempenho na APL. Afinal, o contínuo exercício-e-prática na aritmética, durante muitos anos a referência da Matemática no ensino elementar praticamente em todo o lado, e que ainda o é em muitos sítios, recolhe um acordo quase unânime de que não proporciona muita compreensão da aritmética, por muito que a consequência seja a mestria mecanizada. De facto, existem provas (Hiebert, 1986) de que muita aritmética do tipo exercício-e-prática tem como efeito que a mensagem se perca em favor do meio. Quer isto dizer que a mensagem do motivo de se fazer aritmética perde-se com a ênfase na precisão de cálculo. Mas o caso é que muitos professores acham que a utilização da calculadora na sala de aula torna ainda mais difícil o alcance da perícia em APL. Poder-se-ia argumentar que, assim sendo, o motivo é o uso ineficaz ou prosaico das calculadoras em vez de uma utilização imaginativa. Talvez. Mas a minha conclusão é que situações de compromisso são quase de certeza ineficazes: ou a aritmética do ensino elementar consiste em APL sem calculadoras ou em calculadoras sem APL.

Provavelmente, os únicos de acordo com esta proposição são as proponentes do *back-to-basics* embora façam, obviamente, uma escolha diferente da minha. Quase todos os que estão a favor da utilização da calculadora na sala de aula, dentro do ensino elementar, parecem crer, consequência, talvez, de um desejo de não parecer muito radical face à brigada *back-to-basis*, que ela deve ser um suplemento à APL ou, em qualquer caso, que ainda deve haver uma componente maioritária de APL na aritmética do ensino elementar. Uma opinião típica é: “Como elemento da brigada pró-calculadora, eu, como muitos outros, advogo que as crianças devem ser fluentes em... métodos de papel e lápis” (Kitchen, 1998). O apoio ao ensino de APL e utilização da calculadora encontra-se em estudos que mostram, quase sem excepção, que a introdução da calculadora na sala de aula não impede a consecução de competências na APL e pode até favorecê-las (Hembree, 1986). Mas grande parte (todos?) destes estudos foi com professores que se comprometeram a experimentar a calculadora e se sentiram à vontade na sua utilização. Isso não acontece com a maioria dos professores, a qual sente que as calculadoras criam dispersão, embora reconheçam que é o que quase todos, em todo a parte (no mundo desenvolvido?) usa para fazer aritmética. Talvez o ponto crucial seja, de facto, que as crianças quase universalmente usem a calculadora para a aritmética fora da sala de aula, restando apenas uns testes indefinidos sobre APL como meio de persuasão para a prática de APL no trabalho de casa ou outro. É uma certeza que a utilização da calculadora fora das aulas retarda e retardará, inevitavelmente, a aquisição de competências em APL, fornecendo um argumento de peso contra o regime *back-to-basis*. A instrução clássica de APL está condenada a um relativo insucesso num mundo onde a aritmética é feita quase universalmente com calculadoras e onde até a criança mais limitada percebe que atingir competência em APL não tem quase valor nenhum em ocupações não-académicas.

Assim, o que está em causa não é tanto se o *back-to-basics* é uma boa ideia, mas antes se tem possibilidade de sucesso, por muito que se o deseje. Mesmo sendo verdade, como afirmou John Saxon (Saxon, 1990) “é preciso praticar tudo (em Matemática) para apreender”, pode tal prática ser bem sucedida quando as crianças reconhecem que aquilo que estão a praticar não é uma competência útil no dia-a-dia?

2. Se a aprendizagem da APL não é uma competência útil no dia-a-dia, talvez aprendê-la seja útil para a Matemática futura e para outras ocupações educacionais e profissionais. Primeiro, é evidente que a APL não é útil em nenhuma ocupação profissional. Apesar de alguns matemáticos profissionais precisarem de efectuar

quantidades consideráveis de aritmética, usam quase sempre a calculadora ou o computador quando lidam com números com mais de um ou dois dígitos. E se cientistas, engenheiros e outros profissionais necessitam de muita aritmética, efectuam-na, quase sem excepção, com a calculadora e o computador. A favor da aprendizagem da APL resta, ainda, o argumento da necessidade para a Matemática subsequente.

Antes de prosseguir, deixem-me primeiro desmontar alguns argumentos do contingente anti-calculadora. Um deles está condensado na citação seguinte de Jaime Escalante, que tem sido justamente elogiado pelo seu trabalho no ensino da Matemática na escola secundária: criticando as *Normas* do NCTM (NCTM, 1989), diz ele que “quem escreveu [as *Normas*] deve ser um professor de educação física... A utilização da calculadora na sala de aula é negativa para o processo de aprendizagem. Os alunos apenas aprenderão a carregar em teclas”. Esta é uma reacção comum à utilização da calculadora na sala de aula por parte de pessoas que não sabem nada sobre o ensino da Matemática no ensino elementar e mesmo daqueles que, como Escalante, têm obrigação de saber mais. Não só não existem quaisquer provas que apoiem esta posição como o currículo que delinearei mais adiante nunca poderia ser criticado com base nestas premissas.

Argumento semelhante é: todo aquele que advoga a utilização da calculadora no ensino elementar deve ser a favor do “enfraquecimento” do currículo, tornando-o mais fácil e menos trabalhoso. Tal reivindicação é pura e simplesmente falsa. Lanço o repto a qualquer um que leia este artigo até ao fim a afirmar que proponho uma Matemática curricular mais fácil ou menos desafiadora e menos exigente. Outro argumento sem valor é o de que a utilização da calculadora no ensino elementar tem de estar associada à falta de atenção a outras partes tradicionais da aritmética da escola primária, tais como valor de posição, fracções e proporções. Ao longo destas linhas tem-se verificado alguma crítica forte (Klein, 1998; Wu, 1998) às normas promulgadas pela California Academic Standards Commission. Mas todos estes tópicos tradicionais – e importantes – podem e devem integrar um currículo do ensino elementar baseado na calculadora. Se é verdade ser frequente a redução de outros tópicos tradicionais quando as calculadoras são amplamente utilizadas, então a culpa é de quem concebe e ensina currículos baseados na calculadora, não é necessariamente uma consequência da utilização da calculadora. Desafio novamente qualquer leitor deste artigo a comprovar que eu advogo um enfraquecimento do currículo não-APL do ensino elementar.

Será, então, necessário – ou mesmo desejável – o domínio da APL para o estudo futuro da Matemática? Se um aluno chegar a uma escola secundária, digamos a uma disciplina de álgebra, incapaz de efectuar APL, estará esse aluno *ipso facto* em desvantagem com os alunos competentes na APL? Admito que não é a competência em APL por si só aquilo que os críticos da utilização das calculadoras consideram importante. Afinal, há pouca Matemática no ensino secundário que exija muito cálculo *per se*. Importantes, deverão ser, mais propriamente, os benefícios resultantes do desenvolvimento de competências de APL. Habitualmente, são catalogados na numeracia ou sentido numérico e incluem, a par do óbvio conhecimento das tabuadas da adição e multiplicação, coisas como conhecer a operação aritmética a usar, possuir boa noção da grandeza de um número, conhecer estratégias de verificação das respostas às operações aritméticas. Tudo isto é importante, mas é algo que um currículo baseado na calculadora não possa proporcionar? Creio que a resposta é negativa, apoiando-a no currículo delineado adiante.

O que muitos críticos à utilização da calculadora no ensino elementar deploram é a aparente perda da técnica – capacidade de compreender e manipular símbolos – uma perda que parece óbvia para tantos matemáticos universitários. Geralmente atribuem isto ao uso crescente das calculadoras. É uma ironia porque, apesar da calculadora ser utilizada em algumas escolas elementares e bastante mais nas escolas secundárias, a utilização actual de calculadoras e computadores na Matemática é bastante limitada. Então, este insucesso na técnica, que os meus colegas universitários e eu próprio reconhecemos e deploramos, deve ter outra origem. Seja qual for o caso, que fique assente que a técnica é de importância crucial. Como Wu (1996) afirma, “não se pode aspirar à compreensão sem a técnica”. Na transição da escola secundária para a universidade, Askey (1996) lamenta a “falta de competência em álgebra” o que torna a aprendizagem do cálculo difícil ou impossível. Mas não está em questão se a APL proporciona sentido numérico e, com ele, a técnica. Claro que pode proporcionar (embora se possa duvidar de quantas vezes é que o currículo tradicional realmente o faz). A questão está antes em saber se a técnica, assim como a numeracia, podem ser atingidas plenamente num currículo baseado na calculadora. Creio que o currículo discutido adiante o pode fazer tão bem quanto um currículo baseado em APL.

Um argumento a favor de alguma APL, pelo menos, é o facto de fornecer às crianças a “primeira introdução ao poder da Matemática abstracta” (Ernest, 1998). Em princípio, a APL pode fazê-lo; contudo, pode-se questionar se as crianças aprendem

bem a abstracção inerente aos números, a partir da aprendizagem das manipulações da APL. Em qualquer caso, mais uma vez argumento que este aspecto da APL não precisa de se perder num currículo baseado na calculadora.

Talvez me caiba dirigir, se bem que resumidamente, ao argumento: se a APL tem sempre resultado, então porque não continuar a enfatizá-la? Primeiro, porque nem sempre tem resultado – há muitas provas (tais como as de Johnson e Rising, 1967, referidas previamente numa nota de rodapé) de que muitas crianças permaneceram basicamente “inumeradas” sob o currículo da APL clássica. De qualquer maneira, por muito bem que tenha funcionado em determinada altura, um currículo baseado na APL funciona de modo cada vez mais insuficiente num mundo em que quase todos usam calculadoras. Apesar de tudo, se tem funcionado bem e ainda funciona, não há razão para não a substituir por algo melhor.

Por último nesta secção, sublinho os três pilares sobre os quais assentam os argumentos da parte restante deste artigo:

1. Não existe investigação que prove – bem pelo contrário – que a utilização da calculadora coloque dificuldades às crianças na compreensão da aritmética ou na aquisição da Matemática subsequente.

2. Não há razões baseadas na experiência, seja de indivíduos ou de professores de Matemática de qualquer nível, que apoiem a não utilização da calculadora no ensino elementar. Tal como indiquei, as razões desse tipo alegadas por professores e doutores não são susceptíveis de demonstração, nem poderiam ser, creio eu, quaisquer outras que se alegue. A propósito, o mais preocupante de tudo isto, é que os matemáticos profissionais cujo *ethos* se baseia na demonstração, não só não tentam provar aquilo que afirmam (em assuntos educacionais é muito difícil arranjar uma “demonstração” reconhecida) como nem sequer oferecem uma cadeia significativa de argumentos que apoie as suas discordâncias. Ou então, insensatamente, incompatibilizam a utilização da calculadora com outros pontos fracos do currículo. Por exemplo, Klein (1998) critica as normas da California Commission porque “permite que os alunos usem a calculadora no 3º ano, sub-enfatizam a álgebra na escola secundária e são imprecisos e arbitrários”. Falta de ênfase na álgebra e imprecisão e arbitrariedade são argumentos válidos para uma crítica, mas nenhum está, de modo algum, relacionado com a utilização da calculadora no terceiro ano. Porque é que tal utilização da calculadora é má? Klein não diz: um motivo é porque não é possível alegar nenhum argumento sólido contra a utilização da calculadora no 3º ano.

3. Não há sequer razões plausíveis para crer que a calculadora na escolaridade elementar tenha efeitos perniciosos na aprendizagem matemática das crianças. É claro que se a utilização da calculadora levar a que as crianças dependam totalmente dela no ensino elementar e secundário, tornam-se simples carregadores de teclas, com efeitos desastrosos. Mas não só não é obrigatório que tal aconteça, como não aconteceria no tipo de currículo apresentado neste artigo.

### **Aritmética mental**

Até agora, ainda não houve menção à aritmética mental. Mas já devem ter inferido que qualquer currículo alternativo que proponha acabar com a APL deve, necessariamente, ter um apoio forte da aritmética mental. Nesta secção, pretendo explicar não só porque é que a aritmética mental é tão importante num currículo sem APL, mas também como é que a aritmética mental pode fornecer os benefícios supostamente fornecidos, mas raramente obtidos, pela APL.

É óbvio que por motivos de eficiência, além de motivos cognitivos, alguém que não domine bem a APL deve ser capaz de efectuar uma quantidade significativa de aritmética mental. Seria muito maçador ser encorajado a puxar de uma calculadora para, por exemplo, somar 18 e 47. Assim, é bastante importante especificar que cálculos devem ser efectuados mentalmente num currículo sem APL. Muito mais importante que essa especificação, porém, é apercebermo-nos dos benefícios que advêm se os alunos aprenderem a efectuar bastante mais aritmética mental do que aquilo que é comum actualmente.

Por vezes, a aritmética mental, tal como as tabuadas de adição e multiplicação, é vista simplesmente como uma passagem para a aprendizagem da APL (como, por exemplo, em DFEE, 1998a, b). Mas, tal como foi observado por Verschaffel e De Corte (1996), “a aritmética mental não é apenas uma passagem para os algoritmos tradicionais de cálculo, bem pelo contrário, é uma parte independente do currículo por direito próprio”.

Já mencionei que o ensino da APL redundava, com demasiada frequência, em boas calculadoras (humanas) que compreendem muito pouco daquilo que estão a fazer desenvolvendo, portanto, pouco sentido numérico: se é perfeitamente possível tornar-se um adepto da APL percebendo aquilo que se está a fazer, também é perfeitamente possível aprender APL mecanicamente. O resultado é que se perdem muitos alunos para

a Matemática no ensino secundário, porque, na essência, não aprenderam nada para além da APL mecanizada.

É possível aprender aritmética mental por mecanização? Sim, se por aritmética mental se entender tabuadas da adição e multiplicação, assim como, talvez, toda a subtracção e divisão de números com um dígito. Mas se, como eu, se entender muito mais do que isso, em particular, pelo menos toda a adição, subtracção e multiplicação com dois dígitos, então creio que não é possível argumentar que a aprendizagem pode ser mecânica. De facto, mesmo podendo – e devendo – aprender algoritmos mentais para efectuar aritmética multi-dígitos, a variedade de algoritmos pessoais<sup>6</sup> necessários para se tornar uma calculadora mental eficaz exclui a aplicação mecânica desses algoritmos.

Consideremos, então, multiplicações de números com 2-dígitos efectuadas mentalmente. Espero que a reacção não seja a de que não é possível ensinar todas as crianças a fazê-lo. Como é que se sabe? Quase todos os que são a favor da argumentação *back-to-basics* crêem que o currículo de Matemática necessita de maior exigência e que as crianças que estudam Matemática necessitam de trabalhar muito. E se aqueles que se encontram do outro lado da argumentação são frequentemente acusados de pretender um currículo “enfraquecido”, trata-se, efectivamente, de uma calúnia porque todos – sim, todos – a favor de um currículo forte em calculadora também acreditam num currículo de Matemática exigente. Claro, muitas crianças com 10 ou 11 anos de idade, digamos, achariam difícil a multiplicação mental de 46 por 83 e levariam muitos dias, semanas ou meses a aprender a efectuar tais cálculos com precisão. Mas algum leitor acredita que não é possível ensinar tantas crianças a fazê-lo quantas as que é possível ensinar a efectuar multiplicações de papel e lápis com números de 5 dígitos? (Claro que seria simplesmente loucura tentar que alguém fosse eficiente na multiplicação de números com 5 dígitos: esses cálculos deveriam ser feitos *sempre* com calculadora.)

Tal como o parágrafo anterior sugere, há vantagens significativas em aprender a efectuar aritmética mental multi-dígitos, além da eficiência computacional. Muitas, provavelmente a maioria das crianças, achá-la-ão difícil mas, em caso de sucesso, terão

---

<sup>6</sup> O modo como se efectua aritmética multi-dígitos é um assunto individual, em que a abordagem de cada um depende daquilo que o faz sentir à vontade. Apesar do professor poder conduzir os alunos em certa direcção, seria insensato, e quase de certeza ineficaz, tentar ensinar um único e melhor algoritmo mental para todos os cálculos mentais multi-digitais. De facto, tal como os construtivistas se apressarão a salientar, deixar que a criança construa o seu próprio entendimento daquilo que é melhor para ela, deveria ser precisamente a finalidade da educação matemática.

aprendido mais do que uma destreza útil: melhoraram, com certeza, o sentido numérico e aprenderam a organizar mentalmente um processo de raciocínio não-trivial (“pensar com a cabeça” em vez de “na cabeça” – Sowder,1992), que deveria ter o benefício lateral de aumentar a duração do tempo de atenção. Desenvolver a capacidade da aritmética mental multi-dígitos requer precisamente o tipo de treino mental do raciocínio lógico, que os matemáticos sempre acreditaram ser uma das vantagens de se estudar a sua disciplina, à parte qualquer rubrica que se aprenda. Também se pode assinalar que, como existe uma variedade de estratégias possíveis para executar cálculos aritméticos mentais, a aritmética mental incorpora, por inerência, processos de verificação dos cálculos, uma competência muitas vezes realçada pelos educadores matemáticos.

Mas será razoável a esperança de ensinar aritmética mental multi-digital à generalidade das crianças? A intuição diz-me que a resposta é afirmativa. Mas também existem provas baseadas na experiência (Zhang,1997) de que isso é possível. Mais, há provas de que é possível ensinar não só adições e subtracções com dois dígitos, mas também com três dígitos, mesmo a alunos do terceiro ano (Selter, 1995). Embora seja necessário investigar mais sobre quanta aritmética mental pode ser ensinada no ensino elementar, creio que já se conhece o suficiente para tirar a ilação do amplo aumento da quantidade de aritmética mental que se ensina actualmente no ensino elementar.

Poder-se-á pensar que o enfoque na aritmética mental em vez de APL corre o risco de fazer perder a noção de algoritmo na Matemática do ensino elementar. Um professor de Matemática exprimiu recentemente este receio num grupo de *email*, escrevendo que “os níveis básicos de competência aritmética [leia-se APL] [deveriam ser] requeridos independentemente da calculadora [de modo a haver alguma compreensão do que a calculadora faz]”. Há alguma ironia nesta afirmação, dado que os algoritmos utilizados pelas calculadoras são muito diferentes dos algoritmos APL. Mas a razão mais lata para as crianças aprenderem, o mais cedo possível, a natureza algorítmica da Matemática é uma razão forte, particularmente para alguém como eu, que desde há muito reclama uma abordagem algorítmica em todos os níveis de Matemática. Será que a APL clássica dá aos alunos uma perspectiva da noção de algoritmo e que a minha proposta deita isso a perder? De maneira nenhuma. Em primeiro lugar, é legítimo duvidar que o ensino da maioria da APL transmita qualquer verdadeiro gosto de algoritmos. Se for esse o caso, aprender aritmética mental não só

requer, como referi antes, que se desenvolvam e aprendam tais algoritmos (pessoais); como também fornece uma oportunidade ideal para esclarecer a noção de algoritmo.

À medida que as crianças aprendem a calcular mentalmente, terão necessidade de desenvolver os seus próprios algoritmos para efectuar aritmética multi-dígitos. Alguns deles (por exemplo, para as multiplicações com números de dois dígitos) serão bastante complexos. Pedir às crianças que escrevam e expliquem os seus métodos fornece uma oportunidade excelente para introduzir ideias de algoritmos. (É claro que é uma actividade difícil. Explicar o nosso processo de pensamento para qualquer tarefa não-trivial é difícil, mas fazê-lo é salutar e obriga a concretizar noções intuitivas.)

Devo dizer algo sobre a divisão. Apesar de já terem passado mais de 15 anos sobre a recomendação do Relatório Cockcroft (1982) de se deixar de ensinar divisões longas nas escolas britânicas, esta recomendação tem sido implementada com reservas. As normas do California Board of Education (Califórnia, 1998, p. 43) requeriam que os alunos dominassem a divisão longa. A única desculpa só pode ser que quem promulgou as normas da Califórnia acredita que a divisão longa faz bem ao espírito. Não só a capacidade de efectuar divisões longas não tem qualquer valor prático como o tempo requerido para ensinar este algoritmo a alunos é de longe excessivo em relação a qualquer benefício que possa advir dessa aprendizagem. *Claro* que os alunos devem aprender o que é a divisão, quando aplicá-la, o que são restos e como resolver mentalmente problemas de divisões simples. Mas o ensino da divisão longa não é pertinente para nenhum destes objectivos; é tão disparatado como o ensino do algoritmo da raiz quadrada, um ponto de honra até há pouco tempo. Não posso deixar de acreditar que aqueles que são a favor do ensino da divisão longa no ensino elementar (incluindo alguns investigadores matemáticos (Klein, 1998)) estão iludidos acerca do que é importante e útil na Matemática escolar<sup>7</sup>.

Finalmente, uma palavra acerca de outra ilusão relativa à aritmética mental: pretender dar realce à aritmética mental no ensino elementar, implica desencorajar a utilização da calculadora. Em *Assuntos de Numeracia* (DFEE, 1998a) existe uma ênfase louvável do cálculo mental (tal como em DFEE, 1998b). Mas leva ao *non sequitor* “a importância do cálculo mental tem implicações inevitáveis num uso judicioso da

---

<sup>6</sup> Um argumento (Dubinsky, 1998) é: sem o domínio da divisão longa em papel e lápis os alunos terão grandes dificuldades em compreender a divisão de polinómios. Não é verdade. Ensinemos, sem dúvida, o algoritmo euclidiano na altura adequada e mostremos aos alunos como pode ser usado (com uma calculadora!) para o cálculo de quocientes dígito a dígito. (A propósito, isto vai requerer da parte dos alunos o uso das suas capacidades mentais.) Utilizando a compreensão deste algoritmo como base, é possível – fácil, até – ensinar a divisão de polinómios.

calculadora” em que “judicioso” significa “desencorajar, tanto quanto possível, a utilização da calculadora” com crianças até aos 11 anos. Porque é que não é tão óbvio para todos, como o é para mim, que a aritmética mental é mais importante quando se usa a calculadora no currículo do que no caso contrário? Não é apenas – ou até principalmente pelas razões de eficiência dadas no início desta secção. Também é pelo seguinte: uma vez que, como todos sabemos, a probabilidade de erro quando se utiliza a calculadora (por causa de uma tecla seleccionada erroneamente) é maior do que com a APL, os utilizadores da calculadora devem ser capazes de *estimar mentalmente* os resultados dos seus cálculos. Um professor salientou, recentemente, num grupo de *email*, que “a geração mais velha possui um sentido instintivo do número, capaz de farejar rapidamente uma solução disparatada; é uma capacidade que falta à geração mais jovem”. Se for verdade, deve ser porque esta “geração mais nova” não aprendeu a ser uma boa calculadora mental e a usar essa capacidade para “farejar soluções disparatadas”.

### **Matemática sem APL no ensino elementar**

Acabar com a APL no ensino elementar pode soar radical mas, para aqueles que não conseguem abraçar esta ideia, o que é que acham do adiamento da instrução em APL até ao 6º ano? Também parece bastante radical. No entanto, é uma ideia antiga, experimentada com sucesso no final dos anos 20 pelo superintendente escolar de Manchester, New Hampshire e registada num artigo que devia ser lido por todos os educadores matemáticos (Benezet, 1935-36; ver também Gleason). A ideia de Benezet parece ter tido uma morte rápida mas talvez se concorde que um currículo sem APL não está assim tão afastado desta ideia com 70 anos de idade.

De qualquer modo, o que proponho para os primeiros, digamos, oito anos de escolaridade (K-7; implicitamente, a álgebra deve ser um tema de 8º ano) é o seguinte:

1. Enfoque na aritmética mental logo a partir do momento em que é introduzida pela primeira vez uma ideia aritmética para além da contagem (por si só, uma actividade mental, claro). Em particular, isto significa que à medida que é apresentada uma operação aritmética, é de esperar que as crianças façam cálculos mentais com essa operação. Evidentemente, fazendo parte disto, é de esperar que as crianças aprendam as tabuadas da adição e multiplicação na altura própria. De acordo com o parágrafo acima, não tenho pretensões acerca da altura exacta para introduzir uma operação aritmética.

Pode muito bem ser que, como sugeriu Benezet e Gleason apoiou, não haja um motivo forte para introduzir a aritmética tão cedo como agora é costume. Obviamente, as crianças deveriam ter muitas, variadas e substanciais experiências com números a partir do pré-escolar. Isso é muito mais importante do que a sua forma precisa.

2. A calculadora deveria não só ser permitida a partir do pré-escolar como encorajada a sua utilização. De facto, há todos os motivos para entrelaçar a utilização da calculadora e o ensino da aritmética mental, dado que a instrução de uma será reforçada pela utilização da outra e vice-versa. É óbvio que a parte do currículo relativa à aritmética mental deve ser avaliada num ambiente sem calculadora, tal como a aplicação da aritmética mental na resolução de problemas. Senão, a calculadora deveria ser universalmente autorizada, em todas as situações de teste. A finalidade da utilização da calculadora não deve ser o valor negativo de evitar a APL mas o valor positivo de fornecer exercícios e problemas que desenvolvam o sentido numérico e a compreensão da aritmética. Quando são apresentadas as fracções e as dízimas, a calculadora deveria servir para ilustrar a relação entre as duas, o que são dízimas infinitas, porque ocorrem, etc.

3. Nada do está dito acima tem a intenção de dar a entender que a aritmética mental e a calculadora devem ser as únicas ferramentas com as quais se ensina aritmética. Os materiais manipuláveis e outros modelos aritméticos (por exemplo, o modelo da área para a multiplicação) devem continuar a desempenhar um papel importante. Da mesma forma, como já foi assinalado, os professores poderiam, usar os algoritmos da APL para ilustrar as operações aritméticas, como se afigurar útil e conveniente. E, em qualquer caso, o papel e lápis, como meio de registo e de experimentação, deveriam continuar a desempenhar um papel importante na Matemática do ensino elementar (e secundário). Por exemplo, não deve haver objecções, em princípio, à multiplicação de números com dois dígitos, apontando dois produtos de 1 dígito por 2 dígitos, feitos mentalmente e, em seguida, adicionados mentalmente.

4. Para reiterar um ponto de vista anterior, é de esperar que as crianças trabalhem e pensem muito em toda a sua instrução matemática. Mesmo assim, creio que um regime mental aritmética-calculadora pode atingir todos os objectivos do mais imaginativo currículo de APL, com menos tempo total de instrução, dado que, apesar de ser necessário muito exercício-e-prática para criar boas calculadoras mentais, o esforço envolvido é menor do que o habitual, hoje em dia, no exercício-e-prática em APL.

5. Para mim, uma das principais vantagens – e encantos – de acabar com a APL e substituí-la por um currículo mental aritmética-calculadora é o tempo adicional que se disponibilizaria para estudar outra Matemática no ensino elementar. É evidente que isso já sucede: além da APL, ensina-se geometria, por exemplo. Porém, o predomínio da APL no currículo do ensino elementar é tal que os outros tópicos têm apenas um tratamento superficial, e as crianças raramente levam do ensino elementar competências ou conhecimentos matemáticos relevantes fora da APL. Naturalmente, não só a geometria como outros campos da Matemática estão ao alcance dos alunos do ensino elementar: as probabilidades, uma introdução inicial a certos aspectos da álgebra, etc. A introdução destes temas prepararia muito melhor os alunos para a Matemática do ensino secundário e poderia, com o tempo, calar as críticas dos matemáticos universitários acerca dos conhecimentos matemáticos dos alunos que entram na universidade.

6. Uma palavra sobre abstracção. Referi anteriormente que uma crítica à extinção da APL é que ela fornece aos alunos uma introdução inicial à abstracção. Também a aritmética mental, embora duvide muito que as crianças percepcionem qualquer ideia de abstracção quando se introduz os números pela primeira vez. A abstracção é uma das ideias mais importantes em Matemática e, de modo algum, fora do alcance dos alunos do ensino elementar, afirmação esta confirmada pela capacidade que muitos alunos desenvolvem na programação de computadores, onde a abstracção em forma de variáveis pode não ser evidente mas está, sem dúvida, implícita. Referi uma introdução inicial à álgebra na Matemática do ensino elementar. Evidentemente, é possível no 5º ano, mais provavelmente no 6º e de certeza no 7º. Que professor de Matemática da universidade ou do ensino secundário não concorda com o seguinte: mesmo se tudo aquilo que a Matemática do ensino elementar conseguisse fosse a noção mais básica de variável, não seria já uma entrada estupenda na Matemática do ensino secundário?

O que está dito não é – nem tem a intenção de ser – um currículo completo de Matemática do ensino elementar. É mais uma tentativa de convencer que é possível – e fácil, creio sinceramente – desenvolver um currículo sem APL, que prepararia bastante melhor os alunos para a Matemática do ensino secundário, nos EUA e em qualquer lado (bastante melhor do que qualquer currículo proposto nos EUA). Além disso, creio que o faria sem a maçada que tantos alunos agora sentem no ensino elementar e que faz perder uma proporção chocante do talento matemático inato em alunos americanos, quando entram pela primeira vez na escola.

## Matemática do ensino secundário e subsequente

Qual seria o impacto de um currículo de Matemática do ensino elementar sem APL na Matemática do ensino secundário e universitário? Como a intenção é ter alunos mais bem preparados do que agora para essa Matemática, o impacto seria totalmente positivo. Em particular, alunos bem preparados permitiriam introduzir no currículo do ensino secundário novos assuntos, mais úteis, sem abandonar os assuntos tradicionais – estatística, matemática discreta, etc. – como está a ser tentado noutros locais. Mas como é que o *estilo* da Matemática proposta afectaria o que é ensinado e o modo de ensino da Matemática no ensino secundário?

Os matemáticos universitários que se opõem à utilização da calculadora no ensino elementar fazem-no principalmente porque partem da crença, que partilho, de que "não pode haver compreensão sem técnica". Argumentei que, a nível da aritmética, a técnica e a consequente compreensão podem ser atingidas através da aritmética mental. Qual é a analogia relevante com a Matemática do ensino secundário (e posterior)?

Da mesma maneira que sou a favor da plena utilização da tecnologia no ensino elementar, sou igualmente a favor do seu uso pleno nas escolas secundárias e universidades – calculadoras gráficas, calculadoras simbólicas e computadores. Então, como é que os alunos vão aprender a técnica – a técnica algébrica é crucial nesta altura – se for permitido o uso de calculadoras? Como Edward Effros referiu (1989): “Afirmo categoricamente que se um aluno não sabe factorizar imediatamente  $x^2-9$  é extremamente improvável que esse aluno passe a Análise Infinitesimal”. Concordo. O caminho para a técnica algébrica num mundo de calculadoras é basicamente o mesmo que para a técnica aritmética, nomeadamente a *álgebra mental*. Certamente, não é descabido esperar que os alunos de álgebra efectuem uma quantidade razoável de álgebra polinomial mentalmente. Além disso, tarefas conhecidas, como completar um quadrado são essencialmente mentais, que usam o papel e lápis como meio de registo. Indo além de Effros, eu esperaria que os alunos fossem capazes de factorizar mentalmente vários polinómios de segundo grau com três termos. E, claro, tal como na aritmética mental, deveria existir avaliação de álgebra mental sem calculadora.

Mais geralmente: tal como o objectivo fundamental do ensino da aritmética é a apreensão do sentido numérico, o objectivo fundamental da álgebra deveria ser o *sentido simbólico*. O sentido simbólico é mais difícil de definir do que o sentido numérico mas inclui coisas como ser capaz de prever a forma do resultado de um cálculo simbólico (qual é o grau do produto de dois polinómios?), de seleccionar a forma mais adequada de entre várias equivalentes (por exemplo, polinomial, quadrado completo ou forma factorizada de uma quadrática), ter sentido crítico sobre a razoabilidade de um resultado (se há seis vezes mais alunos que professores, escrevemos  $6P = A$  ou  $6A = P$ ?), desenvolver competência em expressões simbólicas (dados alguns pontos do plano, encontrar uma função algébrica ou trigonométrica que passe por todos ou perto de todos eles), etc. (Ver Arcavi, 1994, para uma reflexão sobre o sentido simbólico). Os alunos que têm este sentido, seja qual for o uso que façam das calculadoras gráficas e simbólicas, estarão bem preparados para estudar cálculo.

Nos últimos anos, os matemáticos universitários começaram a usar a tecnologia no ensino, embora tenham levado mais tempo do que os seus colegas cientistas e engenheiros. Ainda há muitos que têm a mesma opinião sobre sistemas de matemática simbólica, tal como Mathematica e Maple, e calculadoras para os alunos do ensino elementar. Uma consequência, apesar da chamada reforma do cálculo, é que a finalidade da maioria dos cursos universitários de cálculo ainda parece ser a criação do aluno-máquina, alimentado com funções e produzindo derivadas e integrais, mesmo com o insucesso demonstrável destes cursos para produzir estudantes com mais do que conhecimentos mecanizados. Concorde-se ou não com a minha crença de longa data de que a matemática discreta devia ter um papel equivalente ao cálculo no currículo universitário (Ralston, 1981), já não pode haver desculpa para cursos de cálculo que não façam pleno uso da tecnologia e que ensinem os estudantes a efectuar mentalmente muito daquilo que fazem agora mecanicamente.

### **A minha proposta pode resultar?**

Poderia – quase – ser implementada amanhã. Poder-se-ia desenvolver um currículo detalhado, escrever manuais, planificar lições, etc. Sejamos até optimistas de que seria possível convencer políticos, encarregados de educação, matemáticos – todos esses grupos antidiluvianos – do carácter correcto da abolição da APL. Mas estarão os próprios professores das escolas elementares preparados para tal currículo? Receio –

mas ficaria muito feliz com prova em contrário – que mesmo os melhores professores das escolas elementares teriam sérias dificuldades em ensinar um currículo assim, principalmente porque a sua preparação para o ensino da Matemática tem sido lastimavelmente insuficiente, compondo-se de pouco mais do que a clássica APL. Mas também por muitos (a maioria?) dos professores atraídos pelo ensino elementar estarem menos interessados na Matemática do que noutros assuntos; de facto, é demasiado frequente professores do ensino elementar sofrerem de fobia à Matemática.

Quantos professores do ensino elementar, por exemplo, estarão preparados para ensinar aritmética mental com dois dígitos? Quantos deles têm conhecimentos para ensinar os outros aspectos da Matemática que seriam incluídos no currículo, se a APL fosse substituída por um currículo mental aritmética-calculadora, mais exigente mas consumindo menos tempo? Alguns destes problemas poderiam ser minimizados com o quadro actual de professores do ensino elementar, através de formação contínua adequada. Para os futuros professores seria necessária uma formação inicial ainda melhor – e mais intensiva – em educação matemática.

Mas enquanto a Matemática ocupar um lugar baixo na escala de interesses dos professores actuais e futuros, é pouco provável que se progrida muito desta maneira. As pessoas com talento e interesse em Matemática dificilmente são atraídas pelo ensino elementar, uma vez que a maior parte do currículo envolve, como deveria, assuntos baseados na língua materna, inclusivamente as ciências, quase inteiramente descritivas.

Existe apenas uma solução: ter muita, senão toda, a Matemática do ensino elementar ensinada por professores especialistas, de modo semelhante às educações musical e visual. Algumas escolas têm feito tentativas neste sentido, nomeando um especialista em Matemática, cuja função é a de aconselhar e ajudar todos os professores. Outra solução, parcial, é o ensino em equipa, em que o ensino da Matemática é feito pelos professores que se sentem mais à-vontade na Matemática. Ambas as ideias são boas, mas creio que, inevitavelmente, não poderão ser totalmente eficazes na implementação do currículo descrito neste artigo. Mesmo os especialistas em Matemática das escolas elementares raramente têm o treino e amplitude de conhecimentos e perspectivas matemáticas para ensinar ou aconselhar num currículo mental aritmética-calculadora.

Concluo que a única solução para modificar radicalmente o currículo são os professores especialistas em Matemática que se encarreguem de *todo* o ensino da Matemática do ensino elementar, a partir do terceiro ano ou ainda mais cedo. É

evidentemente uma solução a longo prazo. *No entanto, prevejo que não se verifiquem grandes progressos na educação matemática dos alunos americanos do ensino elementar (e, conseqüentemente, também, do secundário) enquanto esta solução não for implementada.* Até lá, o desespero com o fraco desempenho dos alunos em comparações internacionais e o desapontamento dos professores universitários com a preparação matemática dos seus alunos, continuarão a ser fenómenos vigentes na cena educacional americana.

### **A investigação é necessária?**

Claro que sim. Precisamos sempre de investigação. Mas a questão imediata é: alguma das propostas deste artigo *requer* investigação antes ser levada à prática? Ou, por outras palavras, um princípio de inovação educacional deveria ser, como na medicina: Sobretudo, não fazer mal? É possível que os alunos "privados" desta oportunidade de aprender APL sejam prejudicados por isso?

A minha resposta é negativa. Como já ninguém argumenta que o conhecimento de APL é uma competência útil na vida (ou na Matemática), a questão é saber se tal "privação" pode deixar os alunos sem a compreensão e técnica necessárias para o estudo de Matemática mais avançada. Pode ser que não saibamos quanta aritmética mental é razoável esperar que uma criança mediana aprenda – e devemos, com certeza, investigar – mas não vejo como é possível argumentar que um currículo construído em volta da aritmética mental e calculadora, exigente e que apresenta consideravelmente mais Matemática fora da aritmética tradicional, pode prejudicar os alunos. De facto, um currículo que enfatize o sentido numérico neste contexto, dificilmente poderia deixar de preparar os alunos para a Matemática do ensino secundário, pelo menos tão bem como este agora.

Muita da argumentação deste artigo foi feita *ex cathedra* mas não me desculpo por isso. Os meus argumentos são bem mais fundamentados na experiência e investigação do que os argumentos daqueles que querem sujeitar os alunos ao regime de APL. Sim senhor, mais investigação, mas não há motivo para que as ideias deste artigo não possam ser experimentadas antes de uma investigação posterior.

Vale também a pena notar que, nada neste artigo está em desacordo com qualquer investigação teórica, experimental ou prática, no ensino e aprendizagem da Matemática (ver, por exemplo, Kamii, 1985). Na verdade, espero que muitos dos

apoiantes de uma abordagem construtivista da Matemática aplaudam um currículo que enfatize a construção, pelas próprias crianças, dos conhecimentos de aritmética através de cálculo mental.

### **Observações finais**

A reforma da educação matemática é um tópico muito em debate actualmente, em particular nos EUA. Aquilo a que se chamou “as guerras da Matemática” (Becker e Jacob, 1998; Jackson, 1997; Ross, 1998) coloca matemáticos, educadores matemáticos, outros educadores, encarregados de educação e políticos uns contra os outros, numa exibição desconcertante de contextos nos quais currículo, pedagogia, formação de professores, manuais e tecnologia são tudo assuntos de controvérsia. Uma ironia em tudo isto, na minha opinião, é a seguinte: enquanto que as decisões cruciais que têm de ser tomadas dizem respeito à temática do ensino elementar, os principais protagonistas são matemáticos profissionais, que raramente compreendem os assuntos da Matemática do ensino elementar, e o NCTM que, embora seja um grupo cujos membros e interesses cobrem a Matemática básica e secundária, é dominado por matemáticos universitários e professores do ensino secundário. O resultado é que nos debates sobre educação matemática a do ensino elementar é, muitas vezes, severamente castigada ou incompreendida, ou ainda pior.

Algum do debate sobre educação matemática diz respeito a assuntos como: que enfoque dar à resolução de problemas no currículo da Matemática, se a pedagogia da Matemática pode e deve ser influenciada pelos trabalhos recentes sobre as teorias da aprendizagem e numa abordagem construtivista da Matemática, se as novas propostas de currículo dão peso suficiente a tópicos tradicionais como álgebra e trigonometria. Não tratei aqui desses assuntos porque entendo que as propostas apresentadas neste artigo são igualmente apropriadas, qualquer que seja a posição adoptada sobre estas questões.

É minha convicção que um currículo de aritmética mental-calculadora ensinado por especialistas de Matemática do ensino elementar seria um currículo melhor do que o ensinado agora (virtualmente) por todo o lado. Uma convicção mais forte é: a menos que seja adoptada esta abordagem para a Matemática do ensino elementar, a existência de grandes melhorias no desempenho matemático dos alunos americanos da escolaridade básica, secundária e universitária permanecerá uma quimera.

## Referências

- American Mathematical Society (1995-97). Various articles and letters to the editor in the *Notices of the American Mathematical Society*.
- Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14, 24-35.
- Askey, R. (1996). In views on high school mathematics. *Notices American Mathematical Society*, 43, 866-873.
- Becker, J., & Jacob, B. (1998). 'Math War' developments in the United States (California). *ICMI Bulletin*, 44, 1z-25.
- Benezet, L. P. (1935-36). The story of an experiment. *Journal of the National Education Association*, 24, 241-244 and 301-303; 25, 7-8.
- California Academic Standards Commission (1997). Mathematics Content Standards (1 October) (<http://www.ca.gov/goldstandards>).
- California Board of Education (1998). Mathematics Framework for California Public Schools K- 12 (10 December) (<http://www.cde.ca.gov/cilbranch/eltdiv/mathfw.htm>).
- Cockcroft, W. H. et al (1982). *Mathematics Counts*. London: HMSO.
- Department for Education and Employment (UK): (1998a). *Numeracy Matters: Preliminary Report of the Numeracy Task Force*, London: DFEE.
- Department of Education and Employment (UK) (1998b). *The implementation of the National Numeracy Strategy: The Final Report of the Numeracy Task Force*, London: DFEE.
- Dubinsky, E. (1998). Personal communication.
- Effros, E. (1989, April 12). Commentary in *Education Week*.
- Ernest, P. (1998). Personal communication.
- Gardiner, T. (1998, May 8). Back to the blackboard, *The Times*.
- Gelernter, D. (1998, May 21). Put Down that Calculator, Stupid!, *New York Post*.
- Gleason, A. Delay the Teaching of Arithmetic?, Unpublished manuscript.
- Hembree, R., & Dessart, D. J. (1986). Effects of hand-held calculators in precollege mathematics education: A Meta-analysis. *Journal For Research in Mathematical Education*, 17, 83-99.
- Hiebert, J., & Wearne, D. (1986). Procedures over concepts: The acquisition of decimal number knowledge. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case for mathematics*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Jackson, A. (1997, June/July and August). The math wars, parts 1 and II, *Notices of the American Mathematical Society*, 44, 619-702; 817-827.
- Johnson, D. A., & Rising, G. R. (1967). *Guidelines for teaching mathematics*, Belmont, CA; Wadsworth.
- Kamii, C. K., & DeClark, G. (1984). *Young children reinvent arithmetic: Implications of Piaget's Theory*, Early Childhood Education Series.

- Kitchen, A. (1998, January 12) Message *on the email discussion list mathematics education at Nottingham University, UK.*
- Klein, D. (1998, May 3). The state's invisible math standards, *Los Angeles Times*.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Ralston, A. (1981). Computer science, mathematics and the undergraduate curricula in both. *American Mathematics Monthly*, 88, 472-485.
- Ralston, A. (1997). A zero-based curriculum: What it is and how it might be used. In H. Neill & A. Ralston (Eds.), *A Zero-Based Mathematics Curriculum: Proceedings of a Working Group at the Eighth International Conference on Mathematical Education*, Seville, July 1996, Nottingham: Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham.
- Ross, K. (1998, May/June). Reality check: At Baltimore standards forum, all quiet along "math wars" front, *Focus, Newsletter of the Mathematics Association of America*, 18, 1, 4.
- Saxon, J. (1990) Transcript of *60 Minutes*, CBS News, 4 March.
- Schmidt, W. H., McKnight, C. C., & Raizen, S. A. (1997). *A splintered vision: An investigation of US science and mathematics education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Selter, C. (1995). From teaching to learning mathematics, Keynote lecture at Panama Conference, Noordwijkerhout, The Netherlands.
- Shuard, H., Walsh, A., Goodwin, J., & Worcester, V. (1991). *Children, calculators and mathematics*. London: National Curriculum Council.
- Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. In D. A. Grouws, (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*: New York: Macmillan.
- Verschaffel, L., & De Corte, E. (1996). Number and arithmetic. In *International handbook of mathematics education*, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Wu, H. (1996). The mathematician and mathematics education reform. *Notices of the American Mathematical Society*, 43, 1531-1537.
- Wu, H. (1998). *Some observations on the 1997 battle of the Two standards in the California math war*, Department of Mathematics, University of California at Berkeley.
- Zhang, D. (1997). Some characteristics of mathematics education in East Asia: An overview from China. In N. D. Tri et al., (Eds.). *Proceedings of the Seventh Southeast Asian Conference on Mathematics Education*. Hanoi 1996, Hanoi: Vietnamese Mathematical Society.