Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas?[1 2]

Alan Schoenfeld, *Universidade da California, Berkeley, EUA*

Resumo

Este artigo oferece uma opinião fundamentada sobre a natureza da resolução de problemas e o seu uso no currículo. Para estabelecer um contexto para discussão, começa com uma breve discussão histórica das tendências curriculares no séc. XX, levando à corrente ênfase da resolução de problemas. O seu objectivo principal é ilustrar como problemas bem escolhidos podem ser usados como catalisadores em discussões, levando os alunos a pensar matematicamente. São dados problemas que levantam assuntos importantes acerca do que significa pensar matematicamente, é discutido um 'critério estético' descrevendo as características de problemas particularmente úteis.

1. Introdução

Na versão cinematográfica de *Alice no País das Maravilhas*, dos fins de 1939, W. C. Fields desempenha o papel de Humpty Dumpty. Falando com ele, Alice rapidamente fica baralhada. Quando ela se queixa acerca da confusão do uso daquelas palavras, Fields responde como só ele pode fazer: "Palavras, significam aquilo que eu quero que elas signifiquem, rapariga – nada mais, nada menos".

O mesmo se passa com a *resolução de problemas*[3]. Por exemplo, nos Estados Unidos, o National Council of Teachers of Mathematics, declarou no seu *Yearbook* de 1980 (Krulik, 1980), que resolução de problemas seria o "tema dos anos 80". Avaliando do ponto de vista da literatura da educação matemática na passada década, parece que assim tem sido. No entanto, se pedirmos a sete educadores matemáticos para definir resolução de problemas será muito provável obtermos, pelo menos, nove opiniões diferentes. Para provar isto, considera os seguintes problemas. Brinca com eles, durante uns minutos, antes de prosseguires. Usarei estes problemas para discutir alguns aspectos dos passos a seguir na

[1] Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT. (Artigo originalmente publicado em 1991 na revista ZDM)

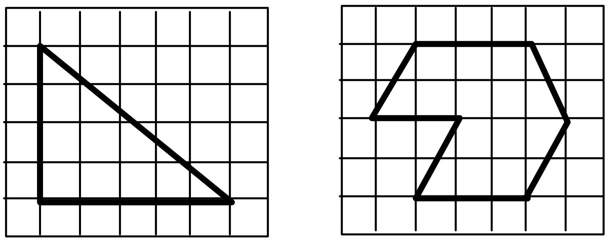
[2] Partes deste artigo foram publicadas no volume 3, n.º 3, do *The Educator* (Graduate School of Education, University of California em Berkeley, USA). (Nota do Autor)

[3] Itálico no original.

resolução de problemas, e para ilustrar tudo o que eu penso acerca do que é realmente a resolução de problemas.

1) Um autocarro do exército leva 36 soldados. Se 1128 soldados estão a ser mandados para os seus lugares de treino, quantos autocarros são precisos?

2) Imagina que estás a falar com um aluno da tua sala ao telefone e queres que o aluno desenhe algumas figuras (podem ser partes de um trabalho de casa, por exemplo). Os outros alunos não podem ver as figuras. Escreve uma série de instruções com as quais os outros alunos consigam desenhar as figuras mostradas na figura junta:



3) Supõe que os testes à sida são 98% precisos: 98% das pessoas que têm a doença testam positivamente e 98% das pessoas que não têm a doença testam negativamente. Supõe ainda que 0.5% da população (1 em cada 200) tem a doença. A uma amostra aleatória da população é feito o teste. Se uma pessoa tem um teste positivo sob estas condições, qual é a probabilidade daquela pessoa ter a doença? Justifica a tua resposta.

4) Todos nós sabemos que o teorema de Pitágoras diz que se a e b, são o comprimento dos catetos de um triângulo rectângulo no plano e c é o comprimento da hipotenusa, então, $a^2 + b^2 = c^2$. Vamos começar daí. Podes provar o teorema? De quantas maneiras diferentes? Consegues estendê-lo ou generalizá-lo? Sabes qual é o número total de soluções tipo, como por exemplo o (3,4,5)? Há outros ternos idênticos? Consegues encontrá-los todos? Quantos mais?

2. Uma breve história das tendências curriculares no séc. XX

Antes de resolvermos os problemas acima descritos, vamos rever as tendências na educação matemática, no culminar dos anos 80. Desde o início do século até aos anos 50, os currículos matemáticos eram relativamente estáveis – e aborrecidos. A maioria dos estudantes limitava-se a memorizar factos e procedimentos, e não compreendiam os conceitos ou as técnicas de aplicação. Tal como o psicólogo gestaltista Wertheimer, numa queixa "já" clássica em relação ao sistema, ele descrevia-a como "cega actividade mecânica" e transcrevia conversas com crianças que diziam "consigo adicionar, subtrair, dividir e multiplicar tão bem como os melhores, o problema é que nunca sei qual deles é que devo utilizar".

Tudo isto mudou no dia 4 de Outubro de 1957. Os russos lançavam o Sputnik, e os americanos lançavam a *Matemática moderna*[4] em resposta. Este assunto foi falado em todo o mundo: leiam as edições especiais de Maio e Agosto de 1978 da revista *Educational Studies in Mathematics*, que noticiava a nível mundial os desenvolvimentos do currículo matemático desde os anos 50 até aos anos 70, e vejam como todas as nações que foram investigadas disseram como tinham implementado a Matemática moderna. Resumindo, os anos 60 tornaram-se uma década de abstracção na instrução matemática. Infelizmente, professores e pais tinham a tendência para não se sentirem à vontade com a nova maneira de ensinar. Nos finais dos anos 60 a ideia geral era que a Matemática moderna tinha falhado. As crianças não estavam a aprender as abstracções e as suas habilidades básicas tinham-se perdido na mal sucedida pressa de ensinar a crianças muito jovens, coisas como a nova teoria numérica (do estilo de "aritmética do relógio").

A violenta reacção resultante tornou-se o movimento *back to basics*[5]. Em resumo, da retirada dos falhanços da Matemática moderna resultou a instrução focada, em larga escala, via lápis-e-papel e algoritmos básicos. Esta medida parece ter sido mais extremamente seguida nos EUA do que noutros sítios, mas parece ter sido bastante generalizada. A década seguinte, de exercícios e prática sobre o básico, substanciam os piores medos dos progressistas. No final, não só os estudantes eram incapazes de pensar matematicamente e resolver problemas (o que não era surpresa nenhuma visto que isso não estava incluído no currículo), como ainda os estudantes que fizeram os exercícios e a prática eram, de facto, piores no básico do que aqueles que tinham tido a Matemática moderna.

No final dos anos 70, era quase impossível localizar a resolução de problemas como um aspecto identificável dos currículos. Em 1978, por exemplo, sugeri à Comissão do Programa do ICME-4, que se veio a realizar em 1980, que devia haver umas sessões de resolução de problemas. Asseguraram-me que haveria – mas quando recebi o programa preliminar, tive que o ler três vezes antes de conseguir encontrar a única sessão dedicada ao tópico por mim proposto. Estava indicado como "aspectos pouco usuais do currículo".

[4] *New math*, em itálico no original.

[5] Itálico no original.

Contudo, o pêndulo estava a mudar de lado. Nos EUA, o National Council of Teachers of Mathematics (1980), declarou que a resolução de problemas "devia ser o foco da Matemática escolar". Declarações semelhantes foram ouvidas a nível mundial. O movimento favorável à resolução de problemas, que tinha redescoberto Pólya (1945, 1981) e que tinha sido activado pelo ressurgimento da resolução de problemas em campos como inteligência artificial, cresceu assim significativamente nos anos 80. Em 1984, o tema resolução de problemas era um dos mais importantes no ICME-5.

Infelizmente, muito do que passava por resolução de problemas nos anos 80 (os meus co-autores neste volume estão entre as raras excepções) era muito superficial, consistindo em ideias para a resolução de problemas de tipo truque, ou em métodos rotineiros de resolução para problemas de história elementares[6]. Tais práticas podem ser mais valiosas que o exercício e a prática da tabuada, mas não muito mais. Há muito mais na resolução de problemas do que isso – e muito mais na Matemática do que a resolução de problemas que outras pessoas te dão para resolver.

Durante os anos 80, os EUA tomavam consciência das sérias dificuldades sentidas com a sua instrução matemática. A minha visão suspeita desta "crise", que é simbolizada pelos maus resultados dos estudantes americanos nos testes de comparação internacionais, é maravilhosamente documentado no *Everybody counts* e tem tido pelo menos um lado positivo. Se não fosse a recente atenção nacional nas nossas dificuldades, que resultou na mobilizacão de esforços, o movimento da resolução de problemas nos EUA, poderia muito bem ter feito o seu curso e ter sido um falhanço (e de certa maneira não deixa de o ser!) e nós seriamos encaminhados para um currículo *back to back to basics*. A crise adiou a viragem do pêndulo e prolongou-se a nossa oportunidade de darmos algum sentido à resolução de problemas. Deixem-me tentar fazer alguma coisa agora, voltando aos quatro problemas mencionados antes.

3. Discussão dos problemas

O problema 1 vem da Third National (EUAAssessment of Educational Progress (Carpenter et al., 1983), um exame nacional do desempenho em Matemática dos estudantes americanos. Os dados mostram que 70% dos estudantes que fizeram o exame, fizeram o

[6] *Elementary word problems,* no original.

cálculo correcto, concluindo que 36 cabe em 1128 num total de "31 vezes com um resto de 12". Então, quantos autocarros são necessários? Aqui vai o que os estudantes disseram:

- 29% disseram que o número de autocarros necessários é "31, resto 12";
- 18% disseram que o número de autocarros é "31"; e
- 23%, de um modo correcto, disseram que o número de autocarros necessários é "32";
- (30% fez o cálculo incorrectamente).

É importante notar que 70% dos estudantes fez o cálculo correcto. Eles aprenderam as lições de Aritmética, muito da maneira como Wertheiner descreveu: cegamente e de cor. Quando os estudantes referem que os autocarros têm "sobras", é claro que eles não olharam para o problema como se este fosse real. Eles vêem-nos como problemas escolares de Matemática, típicos – para exercício e prática – que os estudantes não esperam que façam sentido. Os alunos, simplesmente, fazem o cálculo e escrevem a resposta por baixo. Imagine-se a situação em que os alunos, na escola, precisavam de autocarros para uma saída. Algum estudante pediria, ao telefonar a uma companhia de autocarros, "31 e um resto de 12" autocarros? Claro que não. E onde é que os alunos aprenderam um tal disparate? Ora essa, nas suas aulas de Matemática, através do exercício-e-prática de problemas de história. Há uma esperança que a instrução matemática ajude os alunos a pensar. É claro que tal como em 1983, nós temos um longo caminho a percorrer.

O problema 2 vem do California Assessment Program de 1987/88 de avaliação em larga escala das competências matemáticas dos alunos do 12º ano. Seguramente, deveríamos esperar que os estudantes fossem capazes de explicar como traçar figuras geométricas simples. Considera a primeira das duas figuras, por exemplo. As instruções seguintes, algo palavrosas, são suficientes:

> Vais traçar um triângulo rectângulo na tua folha de papel gráfico. Por isso, arranja uma folha de papel gráfico. O ângulo recto abre para a direita; o triângulo tem uma altura de 4 unidades e uma base de 5 unidades. Para isso, começa por traçar um segmento horizontal de 5 unidades de comprimento. O.K.? Agora, coloca a tua caneta no topo esquerdo do segmento que acabaste de traçar, e traça um segmento que vá direito para cima – verticalmente – 4 unidades. Isto faz um ângulo de 90°, abrindo para a direita, O.K.? Agora, une os fins dos dois segmentos de recta, indo desde o topo da linha vertical até ao fim da direita da linha horizontal. Isto fará um triângulo cuja hipotenusa se inclina para baixo e para a direita.

Eis aqui uma versão mais concisa:

> Vais traçar um triângulo rectângulo numa folha de papel gráfico. Para isso, obtém uma folha de papel gráfico. O ângulo recto abre para a direita; o triângulo tem uma altura de 4 unidades e 5 unidades de base. Para isso, traça um sistema de eixos e marca três pontos A, B e C de (0,0), (0,4) e (5,0) respectivamente. Traça o triângulo ABC.

Note que este problema apela para mais do que a mera compreensão da terminologia do plano. Isto apela para ser capaz de *comunicar matematicamente*[7] para expressar usando a linguagem Matemática. Isto é uma arma importante e aparentemente simples. Contudo, a aparência pode ser enganadora. Menos que 15% dos alunos do 12° ano, trabalhando no problema 2, providenciaram respostas que adequadamente comunicavam a informação dada. Porquê, perguntam vocês? Em parte, os currículos matemáticos não focaram instrumentos de comunicação. Os alunos a quem não tinha sido pedido para escrever em Matemática ou falar sobre isso, não desenvolveram estas armas. E, na nossa sociedade crescentemente matemática e tecnológica, eles estão crescentemente atrás da oitava bola tecnológica.

O problema 3, retirado de Paulos (1988), é de um tipo diferente. Deixem-me dar-vos a resposta antes que eu o trabalhe. Deveis achar isto chocante, e desejais pensar acerca do problema um pouco mais. O facto é: dadas as condições do problema (1 em 200 tem a doença e a população é escolhida aleatoriamente), uma pessoa que tem resultados positivos num teste que é 98% preciso, só tem cerca de 20% chance de, de facto, ter a doença.

A razão é que há de facto uma quantidade de falsos positivos. Supõe, por exemplo, que tomamos uma amostra aleatória de 10000 pessoas de uma população. Destas, 50 terão a doença e 9950 não a terão (assumindo que 1 em 200 a têm). Das 50 que têm a doença, 49 (isto é, 98%) terão teste positivo e 1 (2%) terá teste negativo. Mas não se esqueça do teste. Dos 9950 que não têm a doença, 9751 (98%) terão teste negativo – mas os restantes 199 (2%) terão teste positivo e só 49 deles (aproximadamente 20%) terão de facto a doença. A vasta maioria destes que testam positivo não terão.

É provável que você não tenha visto este tipo de cálculos, mas ele é vitalmente importante. Ele é uma aplicação elementar do raciocínio estatístico, bastante acessível a

[7] Itálico no original.

alunos da *high school*. Compreender este tipo de raciocínio é crítico. Além disso, pense acerca das implicações de testes forçados à sida ou às drogas, quando você o faça (se os pressupostos são os mesmos que neste caso) que num teste que é 98% preciso pode chegar a 80% de falsos positivos.

O problema 4, tirado de Brown e Walter (1989) é um dos que eu quase sempre uso nos meus cursos de resolução de problemas. Deixem-me descrever a maneira como uma classe recente lidou com o problema. De particular interesse é a discussão da equação diofantina $a^2 + b^2 = c^2$.

Note-se que é bem conhecida a solução da equação diofantina: qualquer matemático pode, rapidamente providenciar uma prova de que todos os ternos pitagóricos (um terno inteiro (a, b, c) com a propriedade que $a^2 + b^2 = c^2$) deve ter a forma $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$. Leva cerca de dez minutos a apresentar a prova a uma classe, familiarizada com as ideias básicas de teoria de números. No meu curso, onde eu não apresentei o assunto desta maneira, os alunos devotaram, talvez dois dias ao problema, mas eu argumentarei que, dado o que eles fizeram, o tempo gasto valeu a pena.

Na altura em que nós trabalhámos neste problema, em meio do semestre, os alunos já aprenderam que o empirismo pode ser útil em Matemática. Eles começam a trabalhar na questão listando os ternos pitagóricos que eles conhecem, entre eles (3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (8, 15, 17), (9, 40, 41) e (12, 35, 37). Eles notaram que os múltiplos de ternos conhecidos – por exemplo o (6, 8, 10), como múltiplo de (3, 4, 5) – eram aborrecidos (ou seja, fácil de gerar e de interesse pouco profundo) – e decidiram restringir a sua atenção aos ternos onde a, b e c são primos entre si. Olhando a sua lista, eles notaram que em cada um dos seus exemplos, c era ímpar. Eles conjecturaram se isto seria sempre o caso em ternos triplos entre si (é um bem conhecido resultado), e provaram-no. Eles observaram então que sempre que a "perna" mais pequena (cateto menor) nos seus exemplos era ímpar, a hipotenusa era a unidade maior que a "perna" mais larga (cateto maior). Eles conjecturaram que haveria uma infinidade (infinitamente muitos) de ternos da forma (a, b, b+1), e provaram-no. No resto dos seus exemplos, onde a "perna" mais pequena era par, eles notaram que c era duas unidades maior que b. Eles conjecturaram que haveria uma infinidade de ternos da forma (a, b, b+2), e provaram-no também. Uma vez que estas duas classes de ternos esgotavam todos os exemplos que eles conheciam, eles conjecturaram (incorrectamente) que não haveria outros. Propuseram-se, então, provar que não há (primos entre si) ternos da forma (a, b, b+3), e provaram-no. Um aluno ergueu, então, a sua mão e perguntou se (como parecia provável) eles poderiam ser capazes de provar a sua conjectura, a classe tinha um teorema publicável.

Evidentemente a resposta à questão do aluno foi não. A conjectura é falsa, e a solução global do problema é bem conhecida. De facto, eu em breve demonstrei a solução completa à classe. Contudo, não deveríamos desvalorizar os esforços dos alunos. Nem eu, nem os meus colegas de Berkeley estávamos familiarizados com os três lemas que os alunos desenvolveram: que há uma infinidade de ternos relativos entre si, de cada tipo (a, b, b+l) e (a, b, b+2), e que não há ternos relativos entre si na forma (a, b, b+3). Tais descobertas, embora não publicáveis, eram decididamente não triviais. Mais precisamente, elas indicavam que os meus alunos estavam a *fazer*[8] Matemática. Isto é, os alunos não estavam meramente a dominar técnicas e exercícios típicos; eles estavam envolvidos no processo de conjectura matemática e prova, e a encontrar boas normas matemáticas de o fazer.

4. Reflexões sobre a resolução de problemas: Um problema estético

Deixem-me voltar ao tema da resolução de problemas. Embora o meu livro tenha o título *Mathematical problem solving*, eu confesso na sua introdução ter tido algumas desconfianças acerca do título. O que preocupava é que a ideia de resolução de problemas era muito estreita para representar a minha actividade. O objectivo do meu ensino era não só ensinar os meus alunos a resolver problemas – especialmente, problemas *de outras pessoas*[9] – mas ajudá-los a aprender a pensar matematicamente. É inútil dizer que a resolução de problemas é uma parte significativa do pensamento matemático – mas isso é arduamente toda a história. Na minha perspectiva, o pensar matematicamente significa (a) ver o mundo de um ponto de vista matemático (tendo predilecção por matematizar: modelar, simbolizar, abstrair, e aplicar ideias matemáticas a uma larga gama de situações), e (b) ter as ferramentas do ofício para matematizar com sucesso. Nos cursos de resolução de problemas uso problemas como ponto de partida para discussões matemáticas, mas há mais. Quando as coisas funcionam bem, os cursos servem como um *microcosmos de (uma selecção de aspectos de) cultura*

[8] Itálico no original.
[9] Itálico no original.

matemática[10] – lugares onde os alunos são membros de uma comunidade matemática que faz Matemática. A discussão (acima) do problema 4 ilustra uma maneira em que a comunidade funcionou. Para outros, ver Schoenfeld (em preparação).

Em conformidade, os problemas que vemos – quer na resolução de problemas ou em instrução regular – deveriam servir como introduções ao pensamento matemático. Ao longo destas linhas, pode ser útil considerar uma *estética dos problemas*[11] que caracterize os problemas que eu acho potencialmente valiosos. Os problemas que uso nos meus cursos, esforço-me sempre por cuidar que tenham as seguintes 4 propriedades:

A. Em geral, os bons problemas são (relativamente) acessíveis. Eu gosto de problemas que sejam facilmente compreendidos e que não requeiram uma quantidade de vocabulário ou maquinaria para poder fazer progressos neles. Note que estes critérios não me restringem ao domínio do trivial: alunos universitários podem começar a trabalhar no problema das quatro cores e no último teorema de Fermat sem saber muito do suporte matemático.

B. Eu tento preferir problemas que possam ser resolvidos, ou pelo menos abordados, por vários caminhos. Há muitas razões para esta preferência. Para iniciantes (alunos) é bom ver múltiplas soluções: os alunos tendem a pensar que há só uma maneira de resolver qualquer problema (usualmente o método de resolução que o professor acabou de demonstrar na classe). Também eu preciso que eles compreendam que o fundamental não é obter uma resposta mas as ligações. (Por exemplo, qualquer um de nós ficaria contente se encontrasse uma verdadeira prova do teorema de Pitágoras, mesmo pensando que há centenas de provas conhecidas. Encontrando nova prova significava ver novas conecções). E, ao nível do "processo", a possibilidade de múltiplas aproximações, abre saídas para decisões "executivas" – que direcções ou aproximações devemos perseguir com a resolução de problemas e porquê? (Decisões executivas muitas vezes fazem ou param um esforço na resolução de problemas. Ver Schoenfeld, 1985, para detalhes).

C. Os problemas e as suas soluções devem servir como introduções a importantes ideias matemáticas. Isto pode acontecer de duas maneiras, pelo menos. Obviamente, os tópicos e as técnicas matemáticas envolvidas na resolução de problemas podem ser de

[10] Itálico no original.
[11] Itálico no original.

importância compatível. Igualmente importantes são as soluções de problemas que podem ilustrar importantes estratégias de resolução de problemas e servir como “terreno de treino” para o desenvolvimento de instrumentos heurísticos dos estudantes.

D. Finalmente os problemas usados no meu curso, devem servir, se possível, como “germens” para “honestas e boas” explorações matemáticas. Problemas abertos[12] como o problema 4 (discutido acima) são uma maneira de levar os alunos a *fazer*[13] Matemática. Outra é escolher problemas que sejam extensíveis e generalizáveis. Bons problemas conduzem a mais problemas e se o domínio é suficientemente rico, os alunos podem começar com problemas “gérmen” e começar a fazer o seu domínio. (Um exemplo de um problema simples de arranque, discutido em Schoenfeld (em preparação), solicita aos alunos que encontrem quadrados mágicos de 3×3. Este problema é trivial, mas extensões e generalizações têm ocupado muitos matemáticos durante anos.)

5. Discussão

Façamos agora o círculo completo e voltemos aos quatro problemas que iniciaram este artigo. Dos quatro, só o último satisfaz todas as condições do nosso critério estético (e este é o único que eu tenho usado nos meus cursos sobre resolução de problemas, embora eu esteja tentado a usar o problema 3). Contudo, os outros servem um propósito ilustrativo e de exposição. Se os examinar, verá que eles têm um elemento fundamental comum. Dito simplesmente, eles são todos acerca de usar a Matemática para fazer sentido das coisas.

No primeiro problema, trivial como é, o objectivo matemático é (1) simbolizar o problema – representar a situação problemática com símbolos matemáticos, (2) executar operações matemáticas relevantes, neste caso, uma simples divisão com números de vários dígitos, e (3) interpretar os resultados obtidos nos termos da situação original. Em poucas palavras, é o que são, o uso do simbolismo matemático e de modelação.

O segundo problema aponta a importância de ser capaz de comunicar com e via linguagem matemática. A Matemática, como qualquer outra linguagem, tem múltiplas virtudes. É um meio de clareza, análise, estética, e muito mais, mas se não pode comunicar com ela, está com problemas.

12 *Open-ended problems*, no original.
13 Itálico no original.

O terceiro problema ilustra como o pensamento matemático nos pode ajudar a ver claro em complicados dilemas nas nossas próprias vidas. Neste aspecto isto decorre significativamente do termo “relevância”, tão prevalecente durante os anos sessenta, quando esforços soltos foram feitos para fazer a Matemática parecer *aplicada*. O terceiro problema demonstra como o pensamento matemático pode ser uma maneira de perceber o mundo e fazê-lo ter sentido – um significado da simbólica autorização que nos ajuda a perceber padrões e regularidades, organizá-las mental e simbolicamente e entrosarmo-nos nelas.

E, finalmente, o trabalho dos meus alunos no quarto problema ilustra os caminhos que, temas matematicamente válidos, envolventes e estéticos podem servir como um território em que os alunos podem envolver-se no desafio intelectual de empurrar as fronteiras do seu próprio conhecimento (e algumas vezes dos seus instrutores).

Estes tipos de comportamento que acabámos de discutir – modelar e simbolizar, comunicar, analisar, explorar, conjecturar e provar – ou, seja, actividades *com sentido matemático*[14], é aquilo que a Matemática realmente é. Na verdade, fazer sentido, deveria ser a principal actividade da escola. Das artes à literatura, à Física o que deveria ser aprendido são múltiplos caminhos de ver o mundo, e os variados instrumentos interdisciplinares e perspectivas que nos ajudam a entendê-lo. Isto é, em resumo, a minha esperança para a resolução de problemas. Se nós fizermos o nosso trabalho correctamente, talvez as escolas se tornem lugares onde os alunos realmente aprendam a pensar.

Referências

Brown, S., Walter., M.(1989). *The art of problem posing*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

California State Department of Education (1989). *A question of thinking*. Sacramento, CA: State Department.

Carpenter, T. P., Lindquist, M. M., Mathews, W., Silver, E. A. (1983). Results of the third NAEP mathematics assessment: Secondary school. *Mathematics Teacher 76*(9), 652-659.

Educational Studies in Mathematics (May and August 1978) *Special issues: Change in mathematics education since the late 1950's: Ideas and realisations.*

Krulik, S. (Ed.) (1980). *Problem solving in school mathematics*. (1980 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics). Reston, VA: NCTM.

[14] *Mathematical sense making*, em itálico no original.

National Council of Teachers of Mathematics (1980). *An agenda for action*. Reston, VA: NCTM.

National Research Council. *Everybody counts: A report to the nation on the future of mathematics education*. Washington, DC: National Academy Press.

Paulos, J. A. (1988). *Innumeracy: Mathematical illiteracy and its consequences*. New York, NY: Hill and Wang.

Póyla, G. (1945) *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Póyla, G. (1981). *Mathematical discovery*. New York, NY: Wiley.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York, NY: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York, NY: Macmillan.

Schoenfeld, A. H. (em preparação). Reflections on doing and teaching mathematics. In A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Wertheimer, M. (1959). *Productive thinking*. New York, NY: Harper and Row.