

O Currículo de Matemática e as Actividades de Investigação

Albano Silva
Eduardo Veloso
Joana Porfírio
Paulo Abrantes

1. Matemática, currículo e aprendizagem

Educação matemática para todos

Várias têm sido as razões apontadas para justificar a necessidade de uma matemática escolar. Usualmente realça-se a sua utilidade prática, a sua importância para prosseguir estudos de nível superior, as suas características de pré-requisito para a escolha de determinadas profissões, as suas potencialidades em desenvolver capacidades cognitivas e a sua importância enquanto um exemplo superior da cultura humana.

Ao longo dos tempos a ênfase colocada num ou em vários destes aspectos reflecte em grande parte as necessidades sociais consideradas mais relevantes em cada época. O desenvolvimento de capacidades rotineiras, objectivo matemático importante para o tipo de sociedade da era industrial, é hoje considerado bem menos relevante. Pelo contrário, na sociedade de hoje exigem-se cada vez mais capacidades como as de formular e resolver problemas, de raciocinar criticamente, de modelar situações, de analisar criticamente processos e resultados e de usar metodologias diversificadas. Contrariamente ao que se passou em épocas anteriores em que o ensino da matemática estava reservado a uma elite intelectual, hoje defende-se um ensino obrigatório mais prolongado e uma matemática para todos.

Quais as razões de fundo que justificam uma educação matemática para todos? Os motivos geralmente invocados prendem-se com a sua utilidade para a vida futura de cada indivíduo nomeadamente por facilitar o acesso a uma determinada carreira profissional. A importância da matemática para desenvolver capacidades gerais necessárias à integração e intervenção na sociedade de hoje e para intervir num mundo cada vez mais matematizado é também frequentemente invocada. A dimensão cultural tem estado em segundo plano talvez porque, tradicionalmente, tem sido associada a uma

elite. Mas esta dimensão é fundamental numa perspectiva de matemática para todos. Na verdade, todos os cidadãos devem ter acesso a uma formação que, muito para além dos aspectos utilitários da matemática, valorize a compreensão da natureza da matemática, das suas características como modo de pensar e como actividade humana.

A Matemática

A grande dinâmica do crescimento da matemática é uma das suas principais características nos dias de hoje. A evolução tecnológica e as crescentes aplicações a diferentes áreas têm originado uma evolução enorme da matemática. Davis e Hersh (1995) argumentam que vivemos na era de ouro da produção matemática e que estamos longe de poder imaginar uma altura em que esta qualidade e quantidade de produção matemática tenha fim pois “... existem duas fontes inesgotáveis de novas questões matemáticas. Uma das fontes é o desenvolvimento da ciência e da tecnologia, que fazem sempre novos pedidos de ajuda à matemática. A outra fonte é a própria matemática.”

Poderá argumentar-se que esta situação poucas implicações poderá ter ao nível do ensino uma vez que para poder entender teorias mais avançadas será necessário em primeiro lugar conhecer os aspectos mais elementares que estão na base dessas teorias. Mas, como referem Davis e Hersh (1995), a imagem da matemática como ciência agregativa é algo ingénua: “à medida que novas estruturas matemáticas são construídas, há outros processos simultaneamente ocupados com a sua destruição” (p.36). De facto, são encontrados novos métodos que substituem outros, são descobertas novas teorias que se revelam fecundas e que relegam para segundo plano outras, são apresentadas reformulações de trabalhos mais antigos.

Também a utilização crescente do computador ao nível da investigação impulsionou fortemente a produção de conhecimento matemático. Para além de um auxiliar na realização de cálculos numéricos complexos, o computador constitui hoje uma preciosa ferramenta capaz de apoiar a formulação de conjecturas, o estabelecimento de provas e de aprofundar o conhecimento sobre objectos que ajuda a visualizar.

Outra das características da matemática é a sua crescente especialização. No entanto, a imagem de que cada vez mais a matemática se divide em grandes áreas, que se subdividem sucessivamente em outras especializações, embora constitua uma

possível forma de ilustrar o que se passa hoje ao nível da investigação, pode ser interpretada erradamente. As fronteiras entre os vários ramos não são claras e é a partir do entroncamento de vários domínios que se desenvolvem muitas noções e se situam os progressos mais ricos em matemática (Flato, 1994). Só aparentemente a evolução da matemática tem sido um processo “divergente”. A unidade na diversidade, ou seja, o estabelecimento de relações entre objectos aparentemente distintos, foi e continua a ser uma das grandes fontes de desenvolvimento da matemática. Esta unidade é pois fonte de crescimento para o qual é fundamental a contribuição (os laços cruzados) dos diversos domínios.

Para além dos aspectos referidos anteriormente é ainda importante realçar o carácter dinâmico e indutivo do processo de criação matemática. Como refere Flato (1994), “o percurso matemático criativo começa, quer se queira, quer não, por exemplos, segue por tentativas com vista a formular teoremas a propósito dos exemplos” (p.78). Trata-se assim de um trabalho que envolve um percurso de tentativa-erro, de formulação e testagem de conjecturas, de análise de analogias, de reflexão e de crítica. Num determinado sentido os matemáticos serão provavelmente os primeiros a defender a seguinte afirmação de Goldenberg: “A matemática não é acerca de conteúdos, é acerca do raciocínio que descobre, reúne e dá sentido a esses conteúdos; a matemática é (em parte) um modo de pensar.”

A aprendizagem da Matemática

A ideia de que aprender matemática é fazer matemática reúne hoje uma grande unanimidade entre os educadores matemáticos. Pressupondo uma identificação entre aprender matemática e compreender a sua natureza, esta ideia traduz as perspectivas actuais de que aprender é sempre produto de uma actividade. É através de actividades matemáticas intencionais, das experiências que vive, que um indivíduo consolida, descobre ou inventa conhecimento. E é ainda esta experiência matemática de cada aluno que molda tanto a sua visão sobre o que é a matemática como a sua motivação e disposição para se implicar pessoalmente no processo de aprendizagem.

A aprendizagem da matemática não deve pois ser encarada como um processo em que os alunos apenas têm contacto com o “produto final”. Pelo contrário, deve incluir oportunidades de se envolverem em momentos genuínos de actividade matemática.

Na actividade matemática dos alunos, as investigações devem merecer um lugar destacado. As investigações matemáticas permitem a formulação de conjecturas, a avaliação da sua plausibilidade, a escolha dos testes adequados para a sua validação ou rejeição. Permitem ainda procurar argumentos que demonstrem as conjecturas que resistiram a sucessivos testes e levantar novas questões para investigar. Traduzem assim o trabalho desenvolvido pelos matemáticos profissionais, ou, por outras palavras, o processo de criação matemática que é inerente ao que é a matemática e ao que significa saber matemática.

2. Actividades de investigação no actual currículo de Matemática: Possibilidades e obstáculos

O actual currículo de Matemática do Ensino Básico data de 1991 e foi elaborado num contexto de Reforma Educativa, balizado por objectivos gerais do Ensino Básico e Secundário que “convergem em três dimensões educativas essenciais: a formação pessoal nas suas vertentes individual e social, a aquisição de saberes/capacidades fundamentais e a habilitação para o exercício da cidadania responsável” (*Organização Curricular e Programas do Ensino Básico, do 2º Ciclo e do 3º Ciclo, volume I, pp.7 a 10*). Neste sentido, “o projecto contempla uma pedagogia de desenvolvimento integrado, em que a promoção de atitudes e valores assume papel nuclear e em que o domínio de aptidões e capacidades sobreleva e, simultaneamente, condiciona a aquisição de conhecimentos”.

Ainda a nível das intenções gerais, os documentos curriculares oficiais fixam-se a um “nível de grande generalidade”, deixando em aberto aos professores “um vasto campo de possibilidades alternativas de desenvolvimento curricular”, remetendo para a necessidade de criação de “áreas de flexibilidade que se desenham dentro do contexto normativo geral” para dar lugar a experiências de aprendizagem diversas.

Realça-se ainda que os documentos de 1991 se definem como projectos em aberto. “Representam, pois, um desafio à participação crítica e criativa de todos os intervenientes na acção educativa”.

O currículo de Matemática do 2º e 3º Ciclos do Ensino Básico é, ao nível dos seus pressupostos, fiel às intenções definidas para o Ensino Básico em geral e deixam espaço à concretização de actividades matemáticas de natureza diversa que vão no sentido da pesquisa, da integração e da diferenciação.

Na introdução à apresentação dos objectivos gerais definidos para a disciplina de Matemática quer do 2º Ciclo quer do 3º Ciclo (*Organização Curricular e Programas do Ensino Básico, volume I*) pode ler-se, a título de exemplo: “Relativamente aos programas anteriores, a alteração fundamental consiste em serem considerados conteúdos de aprendizagem tanto os conhecimentos a adquirir como as atitudes e as aptidões a desenvolver, o que implica necessariamente uma mudança de métodos”. É referido igualmente que a sua distinção na apresentação dos objectivos gerais pretende dar destaque a cada um daqueles domínios mas que na prática pedagógica deverão ser tratados de modo integrado.

No capítulo das orientações metodológicas do documento acima referido, e também a título de exemplo, pode ler-se:

“tendo como pressuposto ser o aluno agente da sua própria aprendizagem, propõe-se uma metodologia em que a) os conceitos são construídos a partir da experiência de cada um e de situações concretas; b) os conceitos são abordados sob diferentes pontos de vista e progressivos níveis de rigor e formalização”;

“as actividades a promover, individualmente ou em grupo, serão diversificadas e motivadoras, visando desenvolver o espírito de pesquisa, a criatividade, o gosto de aprender, a autonomia e o sentido de cooperação”;

“como actividade [a resolução de problemas] estimula o espírito de pesquisa, dando aos alunos oportunidade de observar, experimentar, seleccionar e organizar dados, relacionar, fazer conjecturas, argumentar, concluir e avaliar”;

“é relevante a criação de situações que favoreçam o desenvolvimento do raciocínio indutivo e valorizem os aspectos intuitivos da Matemática”;

“as calculadoras são meios facilitadores e incentivadores do espírito de pesquisa”.

Quando concretizam o roteiro de trabalho a partir dos temas de matemática, os documentos oficiais explicitam objectivos específicos (na maior parte dos casos definindo comportamentos e modos de fazer) e observações/sugestões metodológicas. Apesar de chamarem a atenção para a necessidade de gestão flexível do currículo, por exemplo no que diz respeito à sequência do roteiro e ao número de horas proposto para cada unidade temática, percebem-se dificuldades de passar à prática os pressupostos atrás enunciados e o currículo vai-se fixando nos conteúdos da Matemática e ganhando uma natureza menos aberta e flexível.

O currículo do 2º e 3º Ciclos do Ensino Básico, embora não faça qualquer menção explícita às actividades de investigação, define um quadro teórico onde as investigações se enquadram com naturalidade e explicita a necessidade dos alunos criarem hábitos de pesquisa. O currículo de Matemática do Ensino Secundário, para além desse quadro teórico, já sublinha a necessidade de os alunos realizarem pequenas investigações. Por exemplo, nas orientações metodológicas, pode ler-se: “também se pretende que os alunos realizem pequenas investigações” (...); “no estudo das famílias de funções os alunos podem realizar pequenas investigações”. No anexo relativo ao historial da construção do programa pode também ler-se: “os alunos não precisam, em geral, de ser investigadores, mas precisam de ter espírito de investigação...”.

Este sinal mais claro sobre a necessidade de os alunos realizarem investigações deve-se, muito provavelmente, ao facto deste currículo ter sido reformulado em 1997 e, por isso, ter considerado algumas das críticas apontadas à versão anterior. Contudo, a recomendação de que os alunos realizem “pequenas investigações” também pode pressupor a necessidade de um domínio apreciável de conhecimentos matemáticos e alguma maturidade intelectual, só possível em alunos do ensino secundário. Se esta dúvida tiver alguma consistência poderemos estar perante uma concepção restritiva sobre a natureza e o papel das investigações matemáticas que, em limite, tende a vedar aos alunos do Ensino Básico a possibilidade teórica de fazerem investigações matemáticas. E, sobre este aspecto, é importante sublinhar que a experiência do Projecto tem demonstrado o contrário.

Em síntese, poder-se-á afirmar que, no conjunto dos currículos de Matemática do 5º ao 12º ano, embora as actividades de investigação não tenham um grande destaque, existe uma considerável margem de liberdade para a sua consecução.

Aliás, nenhum currículo por mais prescritivo que seja se pode considerar “à prova” de actividades de investigação. O que em última análise possibilita ou condiciona a realização de tarefas de natureza mais aberta e problemática é a interpretação que os professores fazem do currículo oficial e as práticas que implementam, tendo como base essa interpretação.

Mas também é claro hoje que as práticas dos professores são influenciadas por uma cultura de currículo que ainda é dominante nas escolas e cuja origem podemos encontrar também no exterior. O roteiro de temas proposto, com uma organização alicerçada quase exclusivamente em conteúdos de matemática que se sobrepõem aos pressupostos e objectivos gerais, o isolamento em que trabalha a maioria dos

professores nas escolas, a interpretação restritiva que a maior parte dos manuais adoptados fazem do texto curricular e a pressão que o próprio sistema educativo exerce através dos exames, das referências nucleares de aprendizagem, etc., são alguns exemplos de aspectos decisivos que influenciam a interpretação dos currículos e as práticas dos professores e determinam, em última análise, a cultura de currículo dominante.

De facto, a prática de muitos professores de Matemática ainda não assenta em pressupostos metodológicos de integração de atitudes, capacidades e conhecimentos ou em preocupações de estabelecimento de conexões matemáticas ou na abordagem em espiral dos conceitos ou na concepção de tarefas que possibilitem aos alunos fazer matemática e desenvolverem o seu poder matemático, como este é definido pelo NCTM (1991): “a capacidade para explorar, conjecturar e raciocinar logicamente; para resolver problemas não rotineiros; para comunicar sobre a matemática e através dela; e para estabelecer conexões dentro da matemática e entre a matemática e outras actividades intelectuais”.

No entanto, muitas experiências de ensino bem sucedidas têm evidenciado a validade dos pressupostos metodológicos apontados anteriormente. Diversos trabalhos de investigação têm também mostrado que, nestes casos, o trabalho de grupo entre professores na concepção das aulas tem sido a mola determinante de projectos de currículo implementado que assentam naqueles pressupostos (por exemplo, Abrantes, Leal, Teixeira e Veloso, 1997). Criar um contexto de aula propício ao diálogo, onde o professor lança boas questões para trabalho prático com informação mínima e onde, após alguma discussão, os alunos partem para formas de trabalho de tipo exploratório, formulação de problemas, investigações ou pequenos projectos que o professor acompanha e incentiva, assumindo em momento posterior a coordenação da sistematização do trabalho desenvolvido e/ou da formalização de aspectos matemáticos inerentes aquele trabalho, constitui um bom exemplo de aula(s) de trabalho investigativo e uma referência de currículo implementado a ter em conta.

É importante pensarmos, mesmo que em termos gerais, em duas formas de interpretar o currículo.

Numa interpretação mais fechada de currículo, restringido ao desenvolvimento de conteúdos de matemática, as actividades de investigação podem, mesmo assim, ser inseridas no currículo, embora perdendo de vista algumas das suas maiores possibilidades formativas como a capacidade de integrar objectivos de diferentes níveis

e, correndo o risco, por via disso, de se transformarem em actividades guiadas apenas para a exploração de determinado conceito onde todos os alunos deverão fazer o mesmo, com graus de aprofundamento e generalização claramente previsíveis.

Pelo contrário, numa interpretação mais flexível do currículo, as actividades de investigação são naturalmente inseridas no currículo, não apenas porque permitem a abordagem dos conteúdos mas sobretudo porque constituem um importante recurso de concretização dos objectivos do ensino da Matemática e podem contribuir decisivamente para o desenvolvimento dos objectivos gerais do ensino básico e secundário.

De facto, as actividades de investigação lidam com o essencial da natureza da actividade matemática (formulação e resolução de problemas); permitem uma melhor compreensão da natureza dos processos de fazer matemática (experimentar/explorar, identificar padrões, formular e testar conjecturas, generalizar e demonstrar); estimulam o pensamento globalizante (relacionando tópicos da matemática); permitem de forma significativa trabalho diferenciado de alunos com diferentes competências e estilos cognitivos em matemática; facilitam o desenvolvimento integrado de atitudes, capacidades e conhecimentos. É nesse sentido que pensamos que elas podem potenciar o desenvolvimento matemático e pessoal dos alunos e contribuir para a concretização dos valores da integração e da diferenciação, decisivos na *escola para todos*.

3. Currículo vs actividades de investigação:

Como evoluir para a consonância?

Tendo em atenção as características genéricas das investigações na aula de Matemática, como poderíamos imaginar um currículo em que este tipo de actividades fosse estimulado (aceite sem conflito, processo natural de trabalho)?

Considerando que não é provável, nem desejável, que futuras mudanças de currículo e de programas de Matemática sejam globais, radicais, substituindo por exemplo o currículo actual por outro inteiramente consonante com a utilização corrente de tarefas de investigação na aula, a pergunta anterior transforma-se naturalmente nas seguintes, para efeitos práticos:

- Que características no actual currículo impedem, ou pelo menos dificultam, a tarefa do professor que reconhece as vantagens da utilização de actividades de

investigação e o pretende fazer de forma regular, continuada, e devem portanto ser “inimigos a abater” no processo de desenvolvimento curricular?

- Que aberturas e flexibilidade existem no actual currículo que permitem, apesar de tudo, que professores proponham, com menor ou maior frequência, tarefas de investigação aos seus alunos, e que portanto devem ser objecto, por parte dos responsáveis pelo desenvolvimento curricular, de especial atenção, no sentido do crescimento da sua relevância na evolução futura do currículo de Matemática?
- Que outras características curriculares, não presentes, pelo menos com nível e clareza suficientes, no actual currículo, devem ser incluídas nas linhas de força do desenvolvimento curricular, de modo a caminhar para a harmonia desejável entre o texto curricular e uma forte presença de actividades de investigação na aula de Matemática?

Um aspecto importante a considerar na evolução do currículo, de modo a torná-lo pelo menos favorável à presença de actividades de investigação na aula, refere-se à própria organização curricular. Como afirma Goldenberg (1998),

“[...] para qualquer conjunto de conteúdos e ideias, existe mais de uma maneira de os arranjar de forma a construir um currículo coerente. Não podemos falar de modo razoável sobre a “melhor” maneira de distribuir a matéria num curso sem considerar os objectivos do curso (...) e outros factores como a origem dos alunos e os seus próprios objectivos, e o estilo e tendências do professor. O que torna uma determinada organização coerente é ela ter um “enredo” (*story-line* no original inglês), uma mensagem sobre a matemática que é posta em relevo ao longo da explicitação dos conteúdos”.

Devemos portanto perguntar:

Que mensagem sobre a matemática deve ser posta em relevo num currículo que pretende dar um lugar importante às actividades de investigação na aula? Como deverão aí ser explicitados, ao lado das atitudes e dos comportamentos, os conteúdos, e como deverão estar estes distribuídos ao longo do currículo?

Considerando que as pequenas e grandes revisões curriculares conduzirão sempre a um texto concreto, programático, proposto aos professores, devemos colocar ainda as seguintes questões:

- Deve o texto curricular apresentar listas de investigações, com indicações adicionais sobre a sua utilização, correspondentes às diversas partes do currículo, ou deveremos esperar que indicações metodológicas, mais explícitas do que as actuais sejam suficientes — esperando naturalmente que os manuais escolares e outros

recursos, ou mesmo materiais desenvolvidos pelos professores completem o texto curricular?

- De que modo devem ser articulados conteúdos e investigações?

Algumas destas questões já foram objecto de análise na primeira e segunda partes deste trabalho. No entanto, serão retomadas aqui como ponto de partida para o lançamento de pistas de discussão relativamente às restantes questões. Por outro lado, este documento não tem a pretensão de responder a todas as questões anteriores, mas simplesmente de apresentar pontos de vista sobre algumas delas.

Dissonâncias

Nenhum currículo é “à prova” da realização de investigações na aula de Matemática. Em todos os tempos e com qualquer currículo, sempre houve professores que reconheceram o valor pedagógico das tarefas de investigação, sem lhes chamar porventura desta forma. Desde actividades com materiais manipuláveis nos primeiros anos de escolaridade até à resolução de problemas (com características de investigação) nos últimos anos, tarefas de investigação, embora de forma limitada e quase sempre esporádica, estiveram presentes na prática pedagógica concreta do ensino não universitário.

Alguns professores universitários, eles próprios investigadores matemáticos, transformavam — e outros continuam certamente a fazê-lo actualmente — as suas aulas de cariz tradicional e “inteiramente expositivas” em verdadeiros *shows* de investigação, mostrando de forma viva como é usada a intuição para explorar situações e formular e tentar resolver problemas, e como são avançadas conjecturas e depois refutadas ou provadas. Isto era por exemplo a prática corrente de Sebastião e Silva, que levava este estilo pedagógico até ao ponto de propor aos seus alunos nas aulas práticas, e mesmo nos exames (que por vezes duravam dias inteiros...), verdadeiras tarefas de investigação.

Independentemente do currículo e do programa que está a “cumprir”, o professor de Matemática tem sempre a possibilidade de integrar nas suas lições um “espírito investigativo” e assim transmitir aos seus alunos uma mensagem importante, e mesmo essencial, sobre a matemática.

Embora estes aspectos sejam importantes, não é deles que estamos a tratar. A nossa preocupação é saber até que ponto o actual currículo se opõe, e em que aspectos,

ao desenvolvimento de actividades de investigação na aula. Uma ligeira adaptação de um episódio real pode elucidar melhor esta questão.

Numa turma do décimo ano uma professora, no início do ano, propõe uma tarefa de investigação aos alunos sobre o conceito de poliedro regular. O que se pede aos alunos é que, conhecida a definição de polígono regular (que é fornecida: todos os lados e ângulos internos congruentes), investiguem e apresentem o que poderia ser uma definição de poliedro regular. Como auxiliar são fornecidos quatro poliedros para manipular: uma bipirâmide triangular cujas faces são triângulos equiláteros, uma pirâmide de base quadrangular cujas faces são triângulos equiláteros, um cuboctaedro e um octaedro regular. A professora pede aos alunos que escrevam a sua definição de poliedro regular.

O decorrer da investigação dá origem a várias questões levantadas pelos alunos. Antes da discussão das respostas, as principais questões levantadas são:

- que corresponde, no poliedro, à condição “lados congruentes” no polígono?
- o que corresponde, no poliedro, à condição “ângulos internos congruentes” no polígono?

“Esclarecidas” estas questões, os alunos entregam as suas respostas. Muitos dão a resposta esperada pelos proponentes: num poliedro regular, as faces são polígonos regulares congruentes e os “ângulos sólidos” (conceito construído no decorrer da investigação) são também congruentes (no sentido de sobreponíveis). Alguns apenas exigem que num poliedro regular as faces sejam todas polígonos regulares congruentes.

No decorrer da síntese, correspondente a estas respostas, em que a professora (seguindo de resto a perspectiva do grupo de geometria do projecto “Explorar e Investigar para Aprender Matemática”) aceita apenas como resposta correcta a definição habitualmente adoptada de poliedro regular, surge uma nova questão:

- não bastará que os ângulos sólidos sejam congruentes para que as faces sejam polígonos regulares congruentes?

O decurso desta actividade sugere as seguintes observações:

a) Nas condições actuais, poderá a professora seguir todas as pistas levantadas pelas questões dos alunos? Dada a pressão provocada pela reconhecida extensão dos

programas (em termos de conteúdos), a professora não pode arriscar prolongar muito o tempo dedicado a esta investigação. Assim, tende a dar relevância apenas àquilo que conduz à esperada definição de poliedro regular, e a ignorar, ou pelo menos a não explorar como gostaria, outros desenvolvimentos.

Assim, uma característica reconhecida da abordagem investigativa — a saber, o facto de não se tratar de um processo de convergência, mas poder conduzir a vias divergentes (Ernest, 1996) — é contrariado pela falta de flexibilidade (em tempo e conteúdos) do currículo actual. Na realidade, uma actividade prevista para uma a duas aulas, como a que apresentámos neste exemplo, passaria a ocupar talvez duas semanas se as pistas lançadas pelos alunos fossem seguidas. Isto seria incomportável nas actuais condições. Em lugar de “a ênfase estar em explorar uma questão da matemática em todas as direcções”, de “o objectivo” ser “a viagem, não o destino” (Pirie, 1987), na situação actual os professores vêm-se compelidos a reduzir ao mínimo as vias divergentes, a privilegiar o destino.

b) Uma segunda observação, decorrente do mesmo exemplo, não nos parece menos importante. O facto de se aceitar apenas como “destino” desta investigação a definição habitual de poliedro, e não admitir como possível por exemplo a definição em que apenas se exige que as faces sejam polígonos regulares congruentes, transmite uma mensagem demasiado rígida sobre a matemática. As definições aparecem com um carácter dogmático que estão longe de ter em matemática, onde são meras convenções — embora essenciais para permitir a comunicação —, que circunstâncias da evolução do pensamento matemático podem levar a alterar. Por exemplo, a própria definição de poliedro regular sofreu historicamente uma evolução profunda, quando se passou a admitir polígonos regulares não convexos (estrelados) como faces de poliedros. O número de poliedros regulares cresceu nesse momento de cinco para nove.

Assim, uma finalização adequada desta investigação seria a professora aceitar todas as definições, imaginadas pelos grupos de alunos, que fossem razoáveis, isto é, que correspondessem de qualquer modo à definição de polígono regular. E depois informar, com a fundamentação possível, qual a definição de poliedro regular que a comunidade dos matemáticos adopta neste momento.

A visão tradicional, que não é combatida pelo actual currículo, de uma matemática rígida, onde em particular as definições têm carácter como que absoluto, aparece assim oposta àquela que as tarefas de investigação, se aceites com as suas características próprias, podem veicular. Enquanto a cultura de currículo e de avaliação

dos alunos não mudar, será improvável que muitos professores arrisquem dar o primeiro passo, pois o mundo dos testes e dos exames a que os seus alunos vão ser submetidos é um mundo feito de destinos e não de viagens, de soluções e não de investigações.

Podemos assim identificar dois aspectos no actual contexto da aprendizagem da Matemática que dificultam a utilização regular de tarefas de investigação. Um deles é o grande número e dimensão dos conteúdos curriculares. Outro é a mensagem sobre a natureza da matemática que é transmitida pelos programas actuais e sobretudo pelas práticas de avaliação geralmente utilizadas — testes e exames.

Consonâncias

Como já vimos anteriormente, há aspectos no actual currículo de Matemática que favorecem a integração de investigações na prática pedagógica, designadamente:

- a inclusão como objectivos do ensino da Matemática de atitudes e capacidades, a par da aquisição de conhecimentos;
- as numerosas indicações metodológicas que, embora nem sempre explicitamente, recomendam a inclusão de investigações na prática corrente da aula de Matemática;
- a indicação frequente de que os conceitos devem ser abordados inicialmente de forma intuitiva, não formal.

Deste modo, o currículo dá indicações de que a simples aquisição de conhecimentos factuais, a resolução de exercícios e o treino em técnicas de cálculo são insuficientes para atingir as finalidades do ensino da nossa disciplina. Parece claro que a prática continuada da abordagem investigativa é um meio privilegiado de corresponder à nova formulação (conhecimentos, atitudes, capacidades) dos objectivos gerais do ensino da Matemática. Assim, a integração das investigações como método habitual de trabalho dos alunos deveria ser levada até às últimas consequências, do ponto de vista da estrutura do currículo, e não deixada apenas como mera indicação, ignorando as contradições com outras dominantes curriculares. Retomaremos esta questão num ponto posterior.

No que diz respeito à construção de conceitos através de abordagens intuitivas, as actividades de investigação são um veículo importante. Na realidade, os conceitos surgem na Matemática, em geral, como resultado das necessidades da investigação e da resolução de problemas. Quando, por exemplo, no decorrer de uma investigação, se

formula uma conjectura, esta inclui sempre conceitos matemáticos e apenas é clara na medida em que os conceitos o são. Da mesma forma, durante a prova ou a refutação da conjectura, é necessário frequentemente refinar ou redefinir os conceitos envolvidos. Numa palavra, a abordagem intuitiva dos conceitos e a sua progressiva construção, na mente dos alunos, encontra um contexto privilegiado nas actividades de investigação.

A reformulação necessária das finalidades do ensino da Matemática

Ao procurar responder às questões levantadas no início desta secção do texto, a questão da reformulação das finalidades surge como pré-requisito. Na realidade, é difícil distinguir o que é essencial na formulação difusa e prolixa do actual currículo. Por outro lado, como referimos logo no início deste texto, a dimensão utilitária (utilidade prática, importância para prosseguir estudos de nível superior, características de pré-requisito para a escolha de determinadas profissões) da formação matemática dos alunos surge claramente como prioritária, quando confrontada com a dimensão cultural — implicitamente ao longo de todo o currículo do ensino básico, explicitamente no ensino secundário. Procuraremos nos próximos pontos apresentar de forma sintética uma possível (re)formulação das finalidades do ensino/aprendizagem da Matemática para todos os alunos e todos os anos que antecedem os cursos especializados de matemática.

A escola, e as aprendizagens que no seu seio se desenvolvem, tem por finalidade criar um ambiente rico e estimulante para a apropriação, por parte dos alunos, da herança cultural presente na sociedade (global e local) em que se vão inserir.

No caso particular da disciplina de Matemática, esta tem por finalidades:

- a compreensão vivida da natureza da matemática, das características da actividade dos matemáticos, e do papel que a matemática tem desempenhado, historicamente e também na actualidade, na construção da nossa sociedade;
- a criação de uma atitude positiva perante a matemática.

As finalidades indicadas apenas podem ser atingidas através da experiência matemática dos alunos. Esta experiência deve ser i) permanente ao longo de toda a escolaridade, ii) positiva, do ponto de vista afectivo, e iii) significativa, isto é, fazer

sentido por si só e não como preparação para outras actividades e aprendizagens distanciadas no futuro.

A construção de conceitos, a aquisição de conhecimentos matemáticos de diversos tipos e a proficiência em certas rotinas básicas decorrem da experiência matemática dos alunos. Esta comporta simultaneamente a exigência de certos conhecimentos e conduz à sua aprendizagem de modo natural. É geradora do poder matemático dos alunos e pressupõe-o, ao mesmo tempo. O principal papel do professor é a condução da experiência matemática dos alunos ao longo da escolaridade, de modo a promover a sua progressiva autonomia.

O ponto anterior não deve fazer esquecer, no entanto, que as finalidades da Matemática, na escolaridade antes da especialização, referem-se à formação geral dos alunos. A proficiência técnica e os próprios conhecimentos específicos apenas fazem sentido na medida em que contribuem para aquelas finalidades.

Experiência matemática e actividades de investigação

A actividade matemática dos alunos deve consistir essencialmente em experimentar, ao seu nível de maturidade matemática, o trabalho dos matemáticos profissionais. Sendo a investigação uma actividade central destes, a experiência dos alunos deve incluir, como metodologia privilegiada, a realização de actividades de investigação.

Mas a finalidade com que os alunos realizam tarefas de investigação é completamente diferente, como é óbvio, da dos matemáticos profissionais. Nos alunos, as actividades de investigação são um veículo para um conhecimento da natureza da matemática e dos seus principais processos de desenvolvimento. Nos matemáticos profissionais, a investigação tem por finalidade fazer avançar a matemática como ciência, como corpo de conhecimentos.

Por isso, é essencial que os alunos reflectam sobre as investigações que fazem, com a finalidade de tomar consciência dos processos que seguiram. Ao longo da escolaridade, compreenderão que alguns desses processos característicos ou ideias poderosas reaparecem sistematicamente nas diferentes investigações. Começarão porventura a identificá-los com a própria matemática, estando assim no bom caminho para atingir os objectivos curriculares em Matemática.

Mas, para os matemáticos profissionais, a investigação matemática, a invenção de novos conceitos e a descoberta de novos teoremas, é apenas parte do caminho. Esses novos conceitos e teoremas devem ser integrados no edifício matemático, vão mesmo

porventura exigir uma reestruturação de certas regiões da matemática. Em certos momentos da história da matemática, essa reestruturação, e a reflexão filosófica que daí decorreu, foram de tal amplitude que constituíram uma verdadeira revolução.

A compreensão por parte dos alunos da natureza da matemática ficaria certamente grandemente prejudicada se esta perspectiva fosse totalmente ignorada no currículo. Por isso, e naturalmente nos últimos anos do secundário, essa compreensão — sempre através da experiência — deve ser considerada. Mas a preparação para esse momento deve ser iniciada muito antes, nos primeiros anos da escolaridade, e prosseguida ao longo desta, através da realização de actividades de organização local da matemática. Muitas actividades apropriadas para este fim tomam a forma de investigações.

Um currículo organizado em torno de ideias poderosas ou processos característicos da matemática

Ainda que nenhum currículo seja “à prova” de actividades de investigação, existem diversos tipos de organização curricular que facilitam a sua realização. Estamos aqui interessados em imaginar uma organização curricular que tenha esta característica mas que, ao mesmo tempo, o faça de modo a tornar salientes as ideias poderosas ou processos característicos da matemática atrás referidos.

Naturalmente, dada a posição central que a investigação ocupa na actividade dos matemáticos, essas ideias poderosas e processos característicos foram historicamente criados no decorrer das investigações e estão presentes mesmo nas investigações elementares que sugerimos sejam prática frequente dos alunos na aula de Matemática ao longo de toda a escolaridade.

Sendo assim, um modo de identificar essas ideias e processos será examinar com atenção um conjunto extenso de actividades de investigação. No entanto, devemos abandonar uma certa ideia estrita de investigação que a reduz à procura de regularidades. Entendemos que a maior parte dos tipos de investigação desenvolvidos pelos matemáticos têm equivalentes elementares que podem e devem ser propostos como tarefas aos alunos, de modo que eles experimentem um leque alargado de ideias e processos matemáticos.

Não cabe aqui enunciar uma lista pretensamente completa dessas ideias e processos, mas entre eles estarão certamente incluídos: as ideias de relação funcional e de transformação; a procura de regularidades e de invariantes; a abstracção e a generalização; a construção de conceitos por analogia; a procura de modelos

matemáticos para situações do mundo concreto ou estudadas noutros domínios científicos; o uso da intuição na exploração de situações envolvendo objectos matemáticos; a formulação de conjecturas; a sua demonstração ou refutação.

Numa perspectiva possível de currículo, que se pretende favoreça a prática das actividades de investigação, estes seriam os verdadeiros conteúdos. Na realidade, se considerarmos cada um destes processos e ideias, reconhecemos que qualquer deles diz respeito à matemática em geral e não o podemos associar com exclusividade aos números, ou à geometria, ou à álgebra, ou a qualquer outro domínio específico da matemática.

O facto de se tomarem estas ideias e processos como os verdadeiros conteúdos, e não os habituais conteúdos em aritmética, geometria, etc. não significa obviamente que estes desapareçam. Não é possível ter ideias e desenvolver processos em matemática sem ser sobre “qualquer coisa”, e esta qualquer coisa serão evidentemente os temas usuais do currículo de matemática. Uma nova perspectiva do currículo, no entanto, poderá ter o mérito de transmitir uma mensagem diferente da matemática — uma mensagem que subalternize as rotinas e o cálculo e privilegie as ideias e os processos fundamentais da matemática, e a partir daí a compreensão da sua natureza.

Por outro lado, um currículo em que os temas obrigatórios são os processos matemáticos transversais aos vários domínios e não as técnicas específicas de cada um (as regras das operações com potências, os critérios de igualdade de triângulos, a regra de Ruffini, a memorização das regras de derivação, as técnicas do cálculo dos limites de sucessões, por exemplo), pode ajudar a explorar as conexões entre os vários domínios, contribuindo assim para aquela compreensão.

Não se vê como necessário, pelo menos numa primeira fase da evolução para um tal currículo, que deixem de existir, nos diversos anos de escolaridade, tempos dedicados à aritmética, à geometria, às probabilidades, etc. Mas a perspectiva adoptada no interior de cada tema deve ser progressivamente alterada:

- as actividades de investigação e de resolução de problemas devem ser utilizadas com regularidade;
- as técnicas e as rotinas de cálculo devem estar inteiramente subordinadas à realização das actividades e nunca treinadas intensamente com vista a obter uma proficiência eventualmente necessária num futuro longínquo;

- o professor deve ter consciência dos processos matemáticos utilizados em cada investigação, nas várias formas e profundidade com que devem obrigatoriamente aparecer, ao longo de toda a escolaridade;
- os alunos irão, ao longo da escolaridade, tomando consciência das ideias e processos matemáticos, cabendo ao professor, na reflexão que deverá fazer com os alunos relativamente às actividades realizadas, avaliar o grau de explicitação que a maturidade dos alunos lhe permitirá fazer dessas ideias e processos.

Uma organização curricular progressivamente dominada pelas ideias e processos matemáticos, e não pelos particularismos técnicos dos vários temas, permite ainda que seja gradualmente minorada, e eliminada mesmo no futuro, a pressão uniformizante do actual contexto curricular — todos os alunos, em todo o país, trabalham exactamente os mesmo temas, com a mesma profundidade. Podemos imaginar que, dentro de cada domínio (geometria, análise, etc.), existam opções, isto é, que diferentes tópicos possam estar a ser trabalhados em diferentes turmas e escolas.

Referências

- Abrantes, P., Leal, L., Teixeira, P. & Veloso, E. (1997). *MAT789: Inovação Curricular em Matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Ernest, Paul (1996). Investigações, resolução de Problemas e pedagogia. Em P. Abrantes, L. Leal & J. Ponte (orgs), *Investigar para Aprender Matemática*. Lisboa: Projecto Matemática para Todos & APM. Tradução do último capítulo de *The Philosophy of Mathematics Education*, The Falmer Press, 1991.
- Davis, P. & Hersh, R. (1995). *A Experiência Matemática*.
- Flato, Moshé (1994). *O poder da Matemática*. Lisboa: Terramar.
- Goldenberg, Paul (1998). “Hábitos de pensamento”: um princípio organizador para o currículo (I). *Educação e Matemática*, nº 47. Tradução de “‘Habits of mind’ as an organizer for the curriculum”, publicado em 1996 no *Journal of Education* 178 (1):13-34, da Boston University.
- National Council of Teachers of Mathematics (1994). *Normas Profissionais para o Ensino da Matemática*. Lisboa: APM&IIE. Tradução portuguesa do original americano de 1991 do NCTM.
- Ministério da Educação (1991). *Organização Curricular e Programas do Ensino Básico, volumes 1 e 2*. Lisboa: ME.
- Ministério da Educação (1991). *Reajustamento do Programa de Matemática para o Ensino Secundário*. Lisboa: ME.
- Pirie, Susan (1987). *Mathematical Investigations in your Classroom*. Basingstoke, Macmillan.