

Perspectivas históricas da resolução de problemas no currículo de Matemática¹

George M. A. Stanic, *Universidade da Georgia, EUA*

Jeremy Kilpatrick, *Universidade da Georgia, EUA*

Os problemas ocupam um lugar central nos currículos desde a antiguidade, mas a resolução de problemas não. Só recentemente apareceram educadores matemáticos aceitando a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas merece especial atenção. Nesta focagem sobre a resolução de problemas tem havido confusão. O termo resolução de problemas transformou-se num *slogan* englobando diferentes visões da educação, da escolaridade, da Matemática e das razões porque devemos ensinar Matemática em geral e resolução de problemas em particular.

Esta confusão é exemplificada na *Agenda para a acção* do National Council of Teachers of Mathematics (1980), que propõe que a “resolução de problemas deve ser o foco da Matemática escolar” (p. 1). Na *Agenda*, a resolução de problemas é caracterizada como uma das dez “áreas de capacidades básicas²”. A *Agenda* assume que há uma relação directa entre a resolução de problemas, nas aulas de Matemática e a resolução de problemas noutras partes da nossa vida. Não há uma clarificação adequada do que é resolução de problemas, porque deveremos fazê-la ou que posição assume no contexto histórico.

Neste artigo, vários são os temas identificados como tendo caracterizado historicamente o papel da resolução de problemas nos currículos escolares. Estes temas estão entrelaçados e mantêm-se largamente por examinar. O que os educadores matemáticos dizem uns aos outros, hoje, acerca da resolução de problemas está ligado a várias tradições nos campos da Psicologia, do currículo e do ensino da Matemática.

¹ Stanic, G. M. A., & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 1-22). Reston, VA: NCTM e Lawrence Erlbaum.

² No original, *basic skills*. Ao longo de todo o texto traduzimos *skill* por capacidade.

Problemas no currículo

Os problemas nos currículos remontam, pelo menos, ao tempo dos antigos egípcios, chineses e gregos. Por exemplo, o Papiro de Ahmes, copiado pelo escriba Ahmes, cerca de 1650 A. C., de um documento mais antigo, é um manuscrito matemático egípcio que consiste numa colecção de problemas. Num dos problemas (ver as Figuras 1 e 2), é pedido ao aluno que efectue a soma de cinco termos de uma progressão geométrica, onde o primeiro termo e a razão são ambos 7 (Chase, 1979, pp. 59, 136-137). No próprio papiro, só é dada uma forma abreviada do problema, com dois métodos de resolução e a resposta. O facto de o problema referir casas, gatos, ratos, etc., para serem adicionados, sugere que era um problema recreativo ou um *puzzle* (ver a Figura 1).

Um segundo exemplo vem de *Nine sections*, um documento chinês, datado de cerca de 1000 a. C.:

De duas ervas daninhas de água, uma cresce três “pés” e a outra um “pé”, no primeiro dia. O crescimento da primeira é, todos os dias, metade do do dia anterior, enquanto a outra cresce duas vezes o que cresceu no dia anterior. Em quantos dias terão as duas atingido a mesma altura? (citado em Stanford, 1927, p. 7).

E do grego antigo, temos uma versão primitiva do problema da cisterna:

Eu sou um leão de bronze; as minhas goteiras são os meus dois olhos, a minha boca e a parte lisa da minha pata direita. O meu olho direito debita um jarro em dois dias, o meu olho esquerdo em três, e o meu pé em quatro. A minha boca é capaz de o encher em seis horas. Diga-me quanto tempo, os quatro juntos, levarão a enchê-lo. (citado em Stanford, 1927, p. 69).

Métodos particulares de resolução de problemas têm também uma longa história. Por exemplo, uma técnica muito semelhante à Regra da Falsa Posição aparece no Papiro de Ahmes (ver a Figura 2). Na história dos problemas de Álgebra, Vera Stanford (1927) dá um exemplo do uso da Regra da Falsa Posição no problema seguinte, tirado de um trabalho do séc. XV, por Phillip Calandri:

A cabeça de um peixe pesa $\frac{1}{3}$ de todo o peixe, a sua cauda pesa $\frac{1}{4}$, e o seu corpo pesa 30 onças. Qual é o peso de todo o peixe? (p. 19)

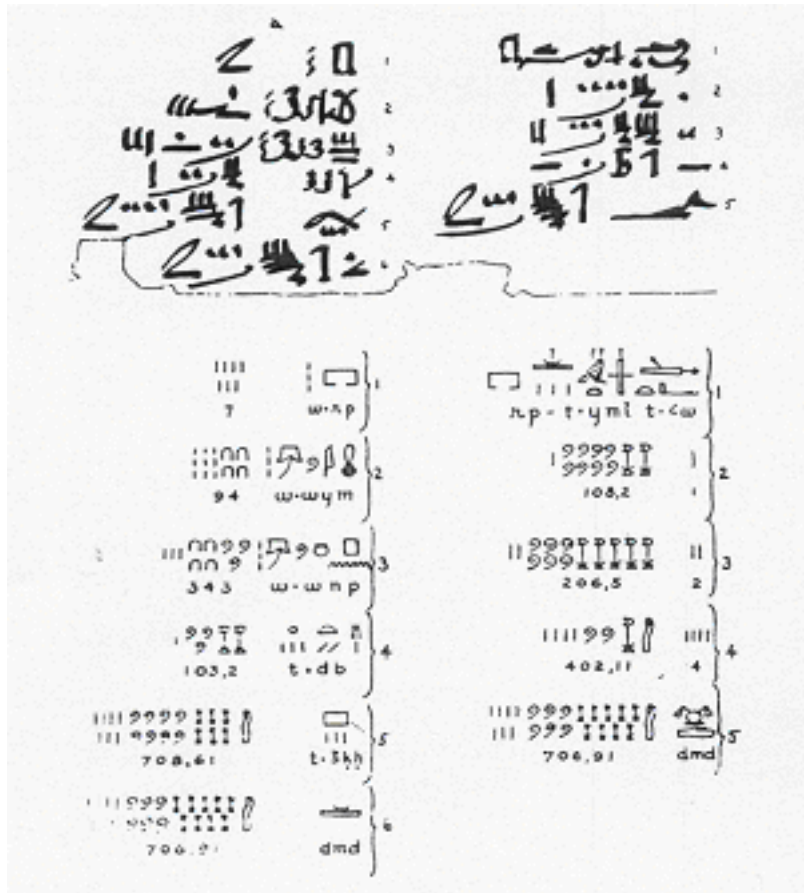


Figura 1 – Um problema com progressões geométricas do Papiro de Ahmes (Chase, 1979, p. 17)

w-t*	imy-t-pr (?)	pr-w	7
A	house-inventory (?)	houses	
1	2,801	myw-w	49
2	5,602	catr	
4	11,204*	pnw-w	343
		mice	
dmd	19,607.	bd-t	2,301*
Total		spell	
		bk-t	16,807
		hekat	
		dmd	19,607.
		Total	

* This heading is very corrupt. The phonetic part of w-t is clear but either the usual stroke determinative is absent or the imy-sign is not here. We agree with Peet (page 122) that w-t imy-t-pr is as likely a reading as anything that can account for the hieratic as it stands, but we do not see how the stroke and the imy-sign can both be present as on Peet's Plate W. When the word w-t, over, precedes its noun the two are always connected at this period by the genitive n and one wonders whether the light horizontal stroke of the sign tentatively read imy is possibly an n added later. This would, of course, make the reading imy-t-pr impossible while it would restore the stroke to w-t. The form used here would be most unusual for imy at this time. Elsewhere in the Rhind (Problems 65, 82-84, and 86, where it has the value wnm) the sign has two vertical strokes.

* The compound means that which is in a house and came to be the regular word for an estate in the legal sense. The first part of the word is an adjective from the preposition m.

* Note the sign for 10,000. * Mistake for 2,401.

Figura 2 – Tradução de um problema de da progressão geométrica do Papiro de Ahmes (Chase, 1979, p. 16)

Stanford explica que a Regra da Falsa Posição foi usada para resolver o problema do seguinte modo:

Se todo o peixe pesa 12 onças, então a cabeça pesa 4, a cauda 3, e o corpo 5. Evidentemente, o peso do peixe é o mesmo múltiplo de 12 que 30 é de 5, e então, o peso do peixe é 72 onças. (p. 10)

Encontraram-se problemas semelhantes, em livros de Matemática dos séc. XIX e XX. A questão importante a ser sublinhada acerca destes exemplos, é que é assumida uma visão muito estreita da aprendizagem da resolução de problemas. Até muito recentemente, ensinar a resolução de problemas significava apresentar problemas e talvez, incluir um exemplo de uma solução técnica específica. Uma página do texto intitulado *A mental arithmetic*, de William J. Milne de 1897, reflecte esta visão do ensino da resolução de problemas (ver a Figura 3). O texto intitulado *New school algebra*, de G. A. Wentworth de 1900, é similar (ver a Figura 4).

Clifford B. Upton, no seu texto de 1939, intitulado *Social utility arithmetics*, tentou que as crianças pensassem acerca do processo de resolver um problema, apresentando problemas sem números (ver a Figura 5), mas não chegou a discutir o que é que se pode aprender com tais problemas.

Mesmo textos escritos para professores apresentam visões limitadas da resolução de problemas. Um bom exemplo é *The principles of arithmetic* de H. O. R. Siefert, publicado em 1902 (ver as Figuras 6 e 7). Considere-se também a página da *Normal elementary algebra* de Edward Brooks, publicado em 1871 (ver as Figuras 8 e 9). Brooks pelo menos falava acerca do “método de resolver um problema”.

Há exemplos de discussões mais detalhadas sobre como resolver problemas, como mostra a página de *Plane and solid geometry* de Wentworth, publicado em 1899 (ver a Figura 10). O *Strayer-Upton arithmetics-higher grades*, publicado em 1928, faz um aviso “como resolver problemas difíceis” (ver a Figura 11).

A atenção dada hoje ao desenvolvimento das capacidades de resolução de problemas dos alunos pode ser vista na Figura 12, que mostra uma página do livro do 5º ano de escolaridade da série *Addison-Wesley Mathematics* (Eicholz, O’Daffer, Fleenor, Charles, Young, & Barnett, 1987).



Figura 3 – Uma página do livro *A mental arithmetic* de W. J. Milne (1897)

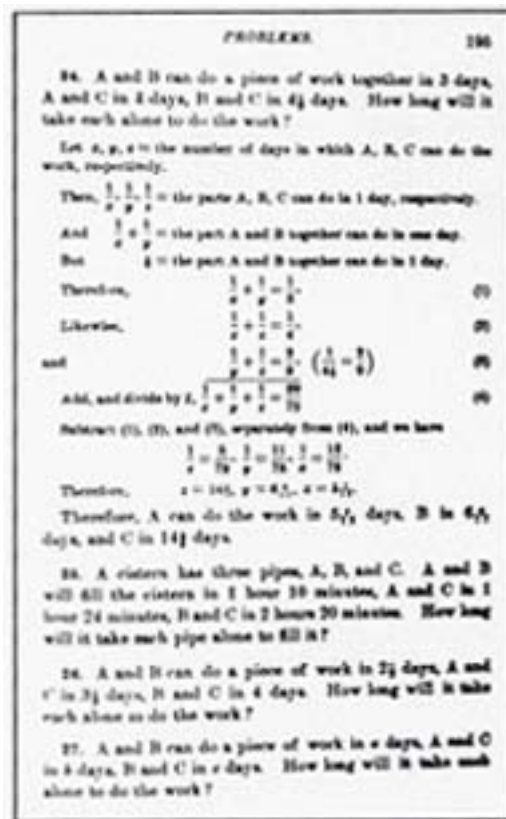


Figura 4 – Uma página do livro *Nova álgebra escolar* de G. A. Wentworth (1990)

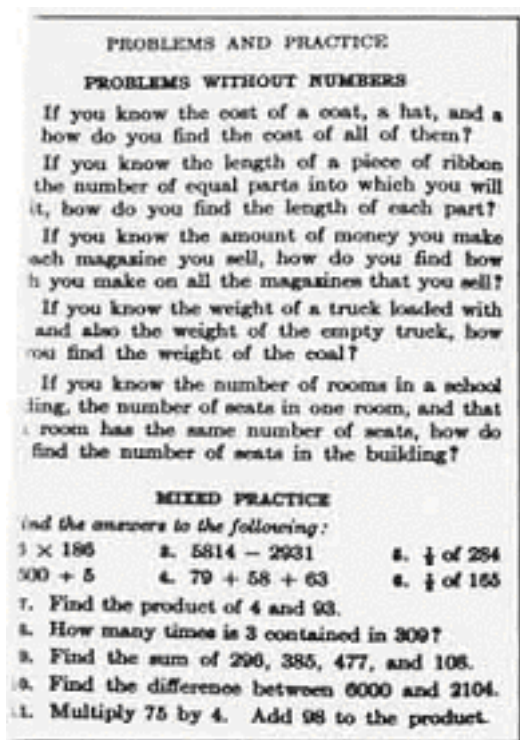


Figura 5 – Uma página do livro *Aritmética de utilidade social* de Clifford B. Upton (1939)

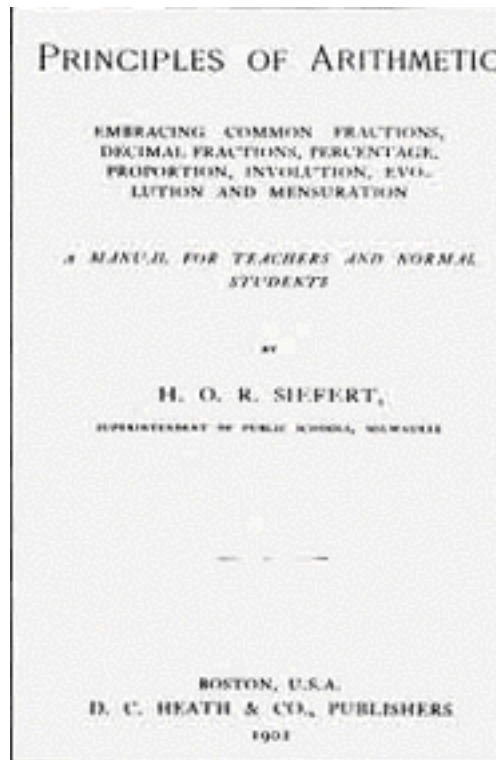


Figura 6 – Capa do manual escolar para professores de H. O. R. Siefer (1902)

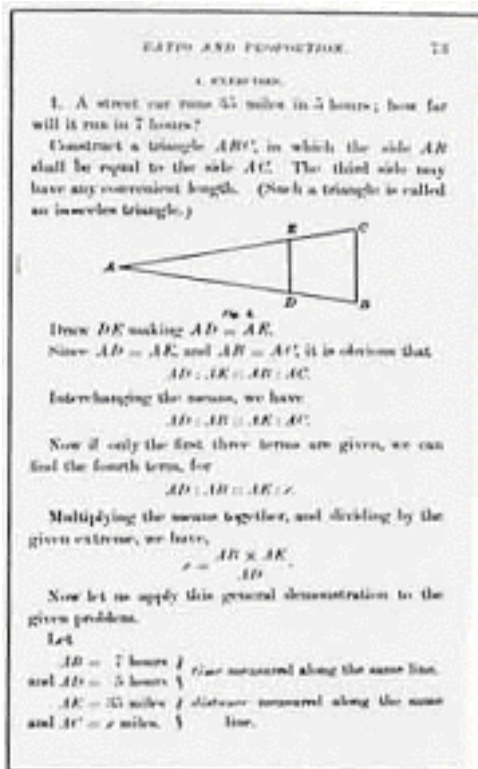


Figura 7 – Uma página do livro *Principios de aritmética* de H. O. R. Siefer (1902)

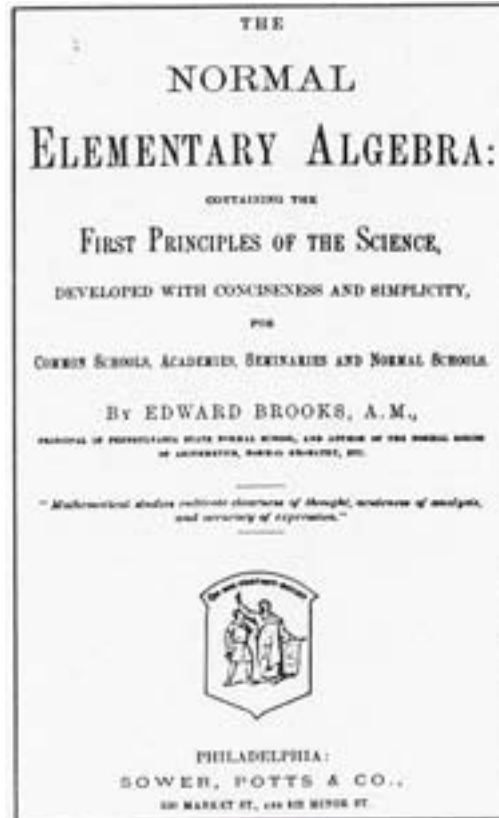


Figura 8 – Capa do manual escolar para a escola do magistério de Edward Brooks (1871)



Figura 9 – Uma página de *Álgebra elemental para a escola do magistério* de Edward Brooks (1871)

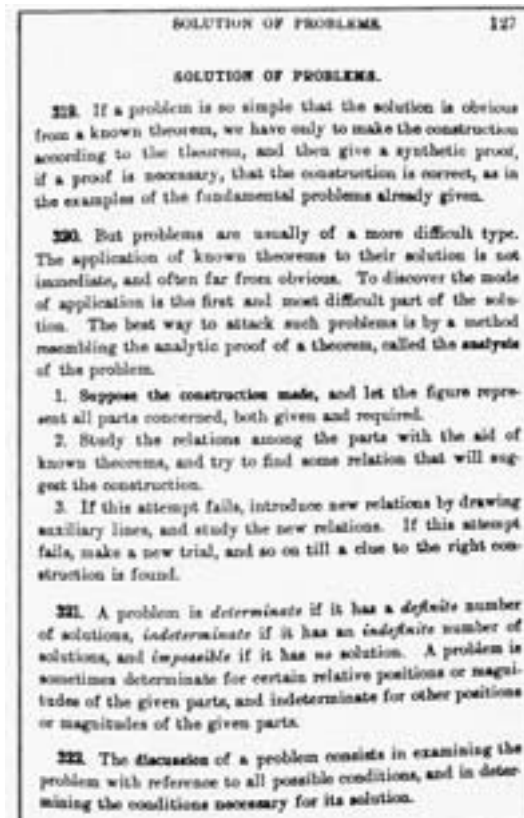


Figura 10 – Uma página de *Geometrias plana e sólida* de G. A. Wetworth (1899)

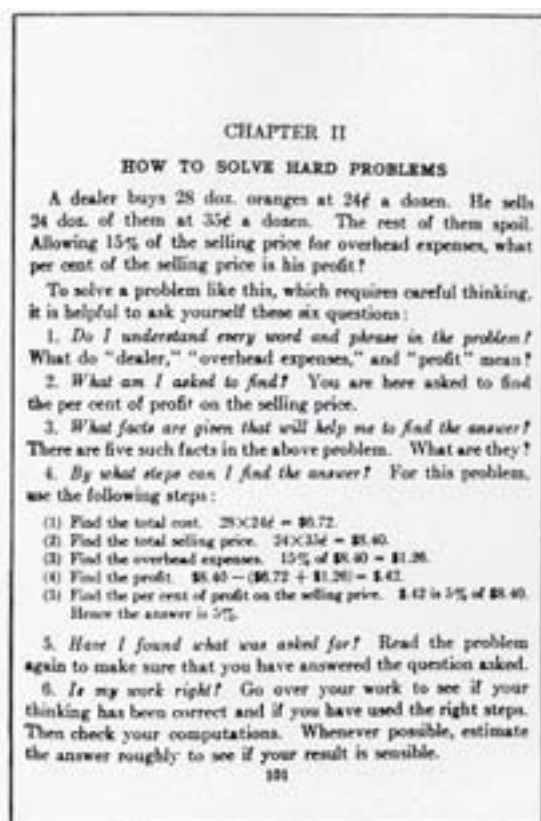


Figura 11 – Uma página de *Aritmética de Strayer-Upton – Níveis superiores* (1928)



Figura 12 – Uma página da *Matemática de Addison-Wesley* (livro 5)

A mudança de papel da resolução de problemas

Como estes exemplos mostram, os problemas têm uma longa história nos currículos de Matemática. Contudo, principalmente no decurso do último século, a discussão sobre o ensino da resolução de problemas passou da defesa de que se devem simplesmente apresentar aos alunos problemas ou regras para a resolução de problemas particulares para o desenvolvimento de abordagens mais gerais da resolução de problemas. Embora o ensino da resolução de problemas esteja agora a receber grande ênfase, os educadores matemáticos não examinaram totalmente a razão porque devemos ensinar a resolução de problemas. O papel da resolução de problemas na Matemática escolar é o resultado do conflito entre forças ligadas a ideias antigas e persistentes acerca das vantagens do estudo da Matemática e uma variedade de acontecimentos que se influenciaram uns aos outros e que ocorreram no princípio do séc. XX.

A principal razão para a maior ênfase dada pelos educadores matemáticos ao ensino da resolução de problemas é que, até este século, era assumido que o estudo da

Matemática – de qualquer Matemática, não apenas daquela que agora consideramos problemas – melhoraria, de uma maneira geral, o pensamento das pessoas. Platão dizia que “aqueles que são por natureza bons em cálculo são, pode-se dizê-lo, naturalmente argutos em todos os outros estudos, e (...) aqueles que são lentos nisso, se são educados e exercitados nesse estudo, melhoram e tornam-se mais competentes do que eram” (Grube, 1974, p. 18). Por isso, desde pelo menos Platão, temos a ideia que, estudando Matemática, melhoramos as capacidades de pensar, raciocinar e resolver problemas com que nos confrontaremos no mundo real. Num certo sentido, a resolução de problemas nos currículos foi simplesmente um meio de conseguir que os alunos estudassem Matemática. Os problemas foram um elemento do currículo de Matemática que contribuiu, tal como outros elementos, para o desenvolvimento do poder de raciocinar.

Durante o século XIX, a teoria da disciplina mental providenciou um quadro para expressar estas ideias. A teoria resultou de uma fusão nem sempre pacífica entre a psicologia das faculdades e a tradição das artes liberais. A psicologia das faculdades olhava a mente das pessoas como sendo composta de várias capacidades, ou faculdades, tais como a percepção, memória, imaginação, compreensão e intuição ou razão. Como uma teoria curricular, a disciplina mental baseava-se na ideia que era tarefa da escola ajudar os alunos a desenvolverem estas faculdades (e que a tradição das artes liberais – isto é, a Matemática e as línguas clássicas – eram os melhores veículos para o desenvolvimento destas faculdades). De acordo com a disciplina mental, a Matemática, especialmente os mais altos níveis matemáticos, propiciariam o principal veículo para o desenvolvimento da faculdade do raciocínio.

Embora a tradição reflectida da teoria da disciplina mental continue a manter-se, acontecimentos que ocorreram perto do final do século XIX, acarretaram mudanças significativas na forma como era visto o estudo da Matemática. O trabalho de Edward L. Thorndike é geralmente aceite como refutando as noções básicas da teoria da disciplina mental. Embora o trabalho de Thorndike desempenhasse claramente um papel fundamental no declínio da teoria, ele nunca rejeitou completamente a ideia da disciplina mental e até mesmo a ideia de dividir o intelecto nos seus componentes. Thorndike argumentou essencialmente que as várias categorias de capacidade e faculdades eram demasiado gerais e assuntos particulares não tinham valor disciplinar muito diferente. De acordo com Thorndike e R. S. Woodworth, na sua experiência clássica de transferência-por-treino publicada em 1901, “é ilusório falar do sentido da

discriminação, atenção, memória, observação, precisão, rapidez, etc.”, porque “várias funções individuais são referidas por qualquer destas palavras. Estas funções podem ter pouco de comum” (p. 249). Num estudo publicado em 1924, Thorndike tira a seguinte conclusão:

O valor intelectual dos estudos deveria ser determinado, largamente, pela informação especial, hábitos, interesses, atitudes e ideais que eles demonstradamente produzem. A expectativa de uma grande diferença na melhoria geral da mente do estudo de um assunto mais do que outro, parece condenada ao desapontamento. A principal razão porque os bons pensadores parecem à primeira vista terem surgido por terem tido certos estudos escolares, é que os bons pensadores fizeram tais estudos, tornaram-se melhores pela inerente tendência dos melhores para ganhar mais do que os outros de qualquer estudo... Os valores disciplinares podem ser reais e merecer peso no currículo, mas esse peso deve ser razoável (p. 27).

O facto de Thorndike estar ainda a lidar com o assunto em 1924 mostra que a teoria da disciplina mental não desapareceu com a viragem do século. Contudo, o trabalho de Thorndike, combinado com outros desenvolvimentos, levou claramente ao declínio da importância da teoria da disciplina mental. Cada vez mais, psicólogos, sociólogos e educadores iam tomando posição contra a teoria. Estes críticos olhavam para uma sociedade em mudança sofrendo uma intensa industrialização, urbanização e imigração, estavam preocupados com a população escolar que cresceria vinte vezes entre 1890 e 1940 e concluíram que o currículo escolar tinha de mudar. Eles argumentavam que uma pessoa necessitava de estudar só o que era directamente funcional para o seu futuro papel na sociedade. Análises da actividade dos vários papéis na sociedade foram usadas para estabelecer objectivos específicos para os currículos escolares. E o movimento das medidas mentais cresceu à medida que as pessoas se voltaram para os testes de inteligência para decidir quem teria acesso a que conhecimento nos currículos escolares. A Matemática, que era um elemento crucial no currículo baseado na teoria da disciplina mental, ficou sob ataque directo. Os críticos concordavam que a Matemática era muito importante mas argumentavam que muitas pessoas não precisavam de saber mais do que a Aritmética do 6º ano de escolaridade (Stanic, 1983/1984).

Então, o virar do século assistiu a duas maneiras muito diferentes de ver as pessoas, a educação e o currículo escolar. A teoria da disciplina mental (que é, ironicamente, muitas vezes associada a uma visão elitista da educação) produziu uma

visão fundamentalmente otimista de inteligência humana. Embora os defensores da teoria da disciplina mental reconheçam as óbvias diferenças que existem entre as pessoas, o que era muito importante para eles era que todas as pessoas nascessem com as mesmas faculdades; e era tarefa da escola desenvolver estas faculdades que todos tinham. Porque todas as pessoas tinham as mesmas faculdades, os defensores da teoria da disciplina mental argumentavam que quando se ia decidir o que deveria ser ensinado e a quem, o que era bom para um estudante era bom para todos. Todos os alunos deviam ter acesso ao mesmo conhecimento e métodos de instrução.

Em alternativa, a visão baseada no trabalho de Thorndike não apresenta uma perspectiva otimista da inteligência humana. As pessoas como Thorndike e Granville Stanley Hall, que falaram do “grande exército de incapazes” nas escolas (Hall, 1904, p. 50), promoveram os fundamentos da ideia que as diferenças individuais ditam a necessidade de expor diferentes crianças a diferentes matérias e métodos de instrução.

Deixou de ser assumido que o estudo da Matemática promove inevitavelmente o pensamento das pessoas. Esta visão estabelece as condições para uma maior ênfase da parte dos educadores matemáticos como, exactamente, os alunos devem melhorar a sua capacidade de pensar, de raciocinar, de “resolver problemas”, através do estudo da Matemática. Muitos dos nossos antepassados profissionais, contudo, estavam relutantes em desistir da tradição que vinha desde Platão e dava um lugar tão proeminente à Matemática nos currículos escolares.

No princípio do século XX, pessoas como David Eugene Smith, no Teachers College, Columbia University, e Jacob William Albert Young, na Universidade de Chicago, estabeleciam a educação matemática como um campo legítimo de estudos profissionais nas universidades e outras escolas superiores do país. Smith, Young e muitos dos nossos outros antepassados profissionais viam a Matemática, incluindo a Matemática de alto nível, como apropriada para todos os estudantes e como um veículo essencial para desenvolver a capacidade de raciocínio dos alunos.

É irónico como à medida que começou a crescer o número de educadores matemáticos profissionais de Matemática nas universidades e escolas superiores do país, o lugar da Matemática no currículo escolar tenha começado a estar sob ataque. Os educadores matemáticos tentaram ajustar-se à mudança de tempos e ideias, alguns até abraçando ideias dos críticos, mas o conflito resultante das tradições em competição levou a uma crise na educação matemática, nos anos 30, crise essa que ainda não resolvida (Stanic, 1983/1984, 1986).

É especialmente irónico que, em parte por causa deste ataque ao lugar da Matemática no currículo escolar, muitos dos nossos antepassados, embora advogando os benefícios da Matemática para o desenvolvimento do pensamento humano, olhavam de soslaio para a ideia de dar aos problemas um papel exagerado no currículo. Matemáticos, tais como Felix Klein na Alemanha, John Perry na Inglaterra e Eliakim Hastings Moore nos Estados Unidos, discutiam a relação entre Matemática pura e aplicada no currículo escolar, advogando, no essencial, um maior papel para as aplicações. Mas muitos educadores matemáticos, particularmente Smith, não queriam dar um papel tão grande às aplicações porque os críticos do currículo escolar que não eram matemáticos também pediam que a Matemática escolar se tornasse mais relevante para a vida real. No essencial, Smith receava desistir do que ele via como o papel e conteúdo essencial da Matemática por causa das aplicações, e receava dar demasiado apoio à causa dos críticos.

Klein, Perry e Moore não pediam para se tirar as aplicações do currículo. Moore (1903/1926) pedia a unificação da Matemática pura e aplicada e Klein prevenia acerca do exagero das vantagens das aplicações:

É possível que através da simples quantidade de aplicações interessantes, o treino da lógica real possa ser deformado e em nenhuma circunstância isto pode acontecer porque, então, perde-se a real essência do todo. Então: nós desejamos enfaticamente um animar da instrução da Matemática por meio da sua aplicação, mas desejamos também que o pêndulo que em décadas anteriores talvez baloiçasse muito longe na direcção abstracta, não deve agora baloiçar para o outro extremo, mas sim ficar no meio termo. (Klein, citado em Young, 1903, p. 54).

Smith, contudo, não estava convencido. Da famosa comunicação presidencial de Moore, produzida em 1902 diante da American Mathematical Society, Smith (1905) dizia “era um facto aparente para todos aqueles que o ouviram que a comunicação não foi favoravelmente recebida por muitos dos presentes” (p. 135). Num artigo de 1909, Smith expressou preocupação acerca da “tendência de todo o país de tornar a Aritmética, assim como outros assuntos, mais interessantes para as crianças”, argumentando que “nós devemos fazer tudo o que pudermos para tornar a Aritmética interessante ou mesmo atractiva para as crianças, mas que não devemos esperar atingir estes resultados oferecendo uma fraca substituta para o vigoroso assunto que nos chegou” (p. 39). Smith não desejava desistir simplesmente da ideia que qualquer trabalho em Matemática pode contribuir para a capacidade de uma pessoa “para atacar

os problemas do dia a dia” (Smith, 1900, p. 2); para Smith, calcular o máximo divisor comum era tão valioso como resolver um “problema aplicado”.

Deste modo, acontecimentos rodeando o declínio da teoria da disciplina mental podem ter estabelecido um quadro para os educadores matemáticos começarem a dar uma ênfase mais específica ao desenvolvimento da capacidade para “resolver problemas”, mas o confronto das ideias básicas acerca da inteligência humana, educação e o currículo escolar ainda permeia as discussões sobre a resolução de problemas. E, se olharmos para a resolução de problemas nos currículos desde o antigo Egito até ao presente, diferentes temas são revelados.

Temas da resolução de problemas

Três temas gerais caracterizam o papel da resolução de problemas nos currículos de Matemática das escolas: resolução de problemas como contexto, resolução de problemas como capacidade e resolução de problemas como arte.

Resolução de problemas como contexto

A resolução de problemas como contexto tem pelo menos cinco subtemas, todos eles baseados na ideia de que os problemas e a resolução de problemas são meios para atingir fins importantes.

Resolução de problemas como justificação. Historicamente, a resolução de problemas foi incluída no currículo de Matemática em parte porque os problemas fornecem uma justificação para ensinar Matemática. Presumivelmente, pelo menos alguns problemas relacionados de algum modo com experiências do mundo real foram incluídos no currículo para convencer os alunos e professores do valor da Matemática.

Resolução de problemas como motivação. O subtema da motivação está relacionado com o da justificação, em que os problemas justificavam a Matemática que se ensinava. Contudo, no caso da motivação, a conexão é muito mais específica, e é procurado o objectivo de atrair o interesse dos alunos. Por exemplo, um problema específico envolvendo a adição com reagrupamento deve ser usado para introduzir uma série de lições conduzindo à aprendizagem do algoritmo mais eficiente para adicionar números.

Resolução de problemas como actividade lúdica. O subtema da actividade lúdica está relacionado com o da motivação porque o interesse dos alunos está envolvido, mas no caso da actividade lúdica os problemas são fornecidos não tanto para motivar os alunos a aprender mas para lhes permitir ter algum divertimento com a Matemática que eles já aprenderam. Presumivelmente, tais problemas satisfazem um interesse humano natural em explorar situações não usuais. O problema do Papiro Ahmes, anteriormente mostrado, é uma boa ilustração. O subtema da actividade lúdica também difere dos dois primeiros na medida em que *puzzles* ou problemas sem qualquer ligação ao mundo do real são perfeitamente apropriados.

Resolução de problemas como veículo. Os problemas são muitas vezes fornecidos, não simplesmente para motivar os alunos a interessar-se na instrução directa de um tópico, mas como veículo através do qual um novo conceito ou técnica deve ser aprendido. Os métodos de descoberta reflectem em parte a ideia de que a resolução de problemas pode ser um veículo para a aprendizagem de novos conceitos e técnicas. E quando o currículo da Matemática consistia exclusivamente em problemas, estes servem obviamente de veículo.

Resolução de problemas como prática. Dos cinco subtemas, a resolução de problemas como prática tem tido a maior influência no currículo de Matemática. Neste subtema, os problemas não providenciam justificação, motivação, actividade lúdica ou veículo tanto como a prática necessária para reforçar capacidades e conceitos ensinados directamente. Uma página do texto de Nelson M. Holbrook, de 1854, intitulada *The child's first book in arithmetic*, mostra um bom exemplo deste subtema. Note-se que os “exercícios mentais” na divisão seguem o trabalho da tabela de divisão (ver a Figura 13).

A resolução de problemas é muitas vezes vista como uma de entre várias capacidades a serem ensinadas no currículo escolar. De acordo com esta visão, a resolução de problemas não é necessariamente uma capacidade unitária, mas há claramente uma orientação para as capacidades.

Embora a resolução de problemas como contexto se mantenha como um tema forte e persistente, o tema resolução de problemas como capacidade tornou-se dominante para aqueles que vêem a resolução de problemas como uma valiosa finalidade curricular, merecendo especial atenção, em vez de ser simplesmente um meio para atingir outros fins ou um inevitável produto do estudo da Matemática.

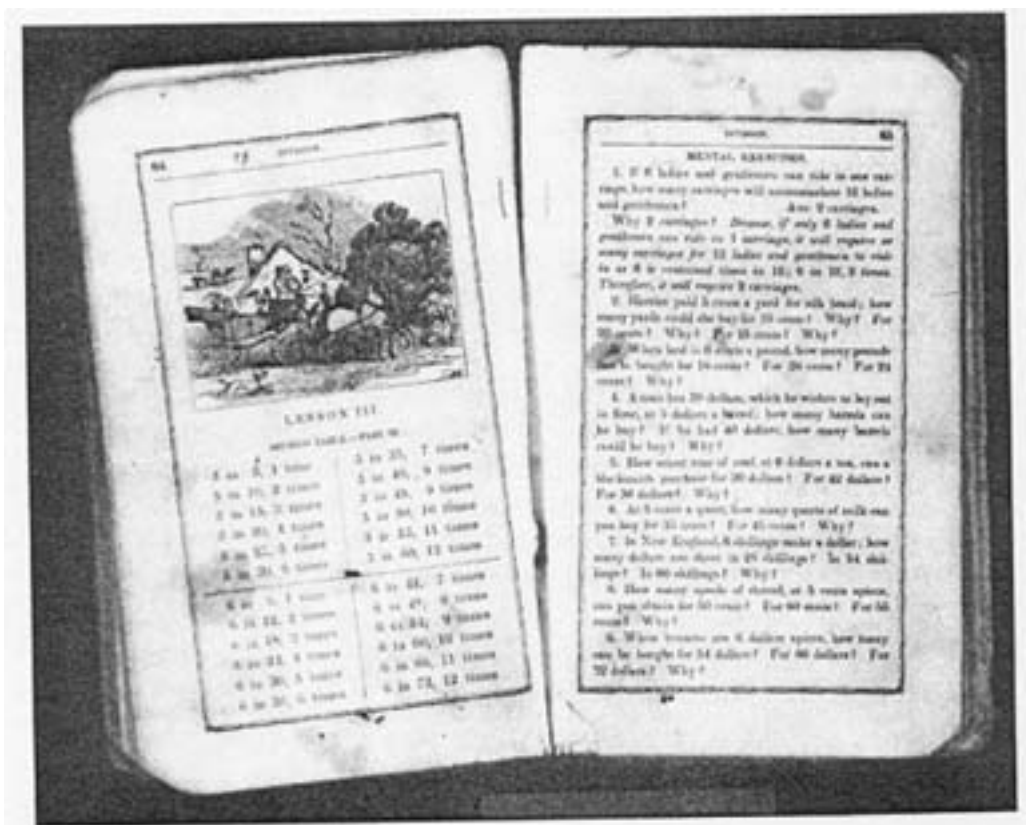


Figura 13 – Páginas de *O primeiro livro de aritmética da criança* de Nelson M. Holbrook (1854)

Resolução de problemas como capacidade

O tema capacidade está claramente relacionado com as mudanças que tiveram lugar perto do virar do século XIX para o século XX, embora nem todos os que advogam este ponto de vista reclamem uma associação com, por exemplo, o trabalho de Thorndike. No entanto, largamente pela influência de Thorndike (e também por outras mudanças anteriormente discutidas), muitos educadores não tardaram a assumir que o estudo da Matemática melhorava o pensamento e tornava-nos melhores as resolver problemas do mundo real. Especialmente porque muitos dos nossos antepassados profissionais tiveram relutância em desistir das suas ideias acerca da Matemática e em incluir mais problemas aplicados no currículo, eles, no essencial, permitiam a psicólogos como Thorndike, definir urna nova visão da resolução de problemas.

Colocar a resolução de problemas na hierarquia das capacidades a adquirir pelos alunos conduz a certas consequências para o papel da resolução de problemas no currículo. Uma consequência é que, dentro das capacidades gerais da resolução de

problemas, fazem-se distinções hierárquicas entre resolver problemas de rotina e problemas não rotineiros. E que, a resolução de problemas não rotineiros é caracterizada como uma capacidade de nível elevado a ser adquirida depois da capacidade de resolução de problemas de rotina (que, por sua vez é adquirida depois de os alunos apreenderem conceitos e capacidades matemáticas básicas). Esta visão adia a atenção à resolução de problemas não rotineiros e, como resultado, apenas alguns alunos que conseguiram dominar os pré-requisitos chegam a ser expostos a tais problemas. Mais do que para todos os alunos, a resolução de problemas não rotineiros torna-se então uma actividade para os estudantes especialmente capazes.

Resolução de problemas como arte

Uma visão mais profunda e mais compreensiva da resolução de problemas nos currículos escolares de Matemática – a visão da resolução de problemas como arte – emergiu do trabalho de George Pólya, que reviveu no nosso tempo a ideia da heurística (a arte da descoberta). Matemáticos antigos como Euclides e Pappus e mais recentes como Descartes, Leibnitz e Bolzano, discutiram métodos e regras para a descoberta e invenção em Matemática, mas as suas ideias nunca tiveram grande eco nos currículos escolares. Ficou para Pólya a tarefa de reformular, estender e ilustrar várias ideias acerca da descoberta matemática de tal modo que os professores as pudessem compreender e usar.

A experiência de Pólya na aprendizagem e ensino da Matemática levou-o a perguntar como é que a Matemática surge – como é que as pessoas fizeram descobertas matemáticas? Não perceberiam os alunos melhor a Matemática se vissem como esta era criada, em primeiro lugar, e não poderiam eles alcançar algum gosto pela descoberta em Matemática? A experiência de Pólya como matemático levou-o a concluir que a face acabada da Matemática, apresentada dedutivamente em revistas matemáticas e em manuais escolares não fazia justiça a este assunto. A Matemática acabada requer raciocínio demonstrativo, enquanto fazer Matemática requer raciocínio plausível. Se os alunos devem usar raciocínio plausível, precisam de ser ensinados como.

Como os nossos antepassados profissionais Smith e Young, Pólya argumentava que o principal objectivo da educação é o desenvolvimento da inteligência – ensinar os jovens a pensar. Na escola primária, as crianças devem ser ensinadas a fazer a sua

Aritmética muito mais com compreensão³ do que mecanicamente porque, embora o comportamento que envolve compreensão seja um objectivo mais ambicioso, tem de facto uma maior probabilidade de sucesso. Este objectivo produz resultados mais rápidos e mais permanentes. Na escola secundária, a Matemática deve oferecer algo àqueles que a usarão e àqueles que não a usarão nas suas carreiras ou estudos posteriores. A mesma Matemática deve ser ensinada a todos os alunos porque ninguém pode saber logo à partida quais os alunos que eventualmente usarão profissionalmente a Matemática.

Se o ensino da Matemática dá só uma perspectiva unilateral, incompleta, do pensamento de um matemático, se se suprime totalmente aquelas actividades informais de conjecturar⁴ e extrair conceitos matemáticos do mundo visível à nossa volta, ela negligencia aquilo que pode ser a parte mais interessante para a generalidade dos alunos, a mais instrutiva para o futuro utilizador da Matemática e mais inspiradora para o futuro matemático (Pólya, 1966, pp. 124-125).

Do ponto de vista de Pólya, a Matemática consiste em informação e saber fazer⁵. Não obstante a maneira mais ou menos conseguida como as escolas comunicam a informação matemática, se elas não ensinarem os alunos a usar essa informação, estes esquecerá-la-ão. “Saber Matemática é ser capaz de fazer Matemática” (Pólya, 1969/1984, p. 574). “O que é o saber fazer em Matemática? A capacidade de resolver problemas” (Pólya, 1981, p. xi).

Na perspectiva de Pólya, a resolução de problemas era uma arte prática, “como nadar, ou fazer esqui ou tocar piano” (1981, p. ix). Aprendem-se tais artes por imitação e por prática. Pólya assumia que nem a resolução de problemas por si só, sem uma orientação, conduz a um melhor comportamento, nem o estudo da Matemática pela sua natureza própria, nos eleva o nível geral de inteligência. Em vez disso, reconhecia que as técnicas de resolução de problemas precisam de ser ilustradas pelo professor, discutidas com os alunos e praticadas de uma maneira compreendida e não mecanizada. Além disso, ele observou que, embora os problemas de rotina pudessem ser usados para cumprir certas funções pedagógicas do ensino dos alunos, para seguir um procedimento específico ou usar uma definição correctamente, só através de um uso judicioso de

³ No original, *insightfully*.

⁴ No original, *guessing*.

⁵ No original, *know-how*.

problemas não rotineiros podem os alunos desenvolver a sua capacidade de “resolver problemas”.

Na formulação de Pólya, o professor é a chave. Só um professor sensível pode estabelecer o tipo correcto de problemas para uma dada aula e promover a quantidade de ajuda apropriada. Porque ensinar também é uma arte, ninguém pode programar ou mecanizar o ensino da resolução de problemas; ela permanece uma actividade humana que requer experiência, gosto e julgamento.

Há, hoje em dia, quem aparentemente se reclame do trabalho de Pólya, mas que reduz as regras heurísticas a capacidades procedimentais, quase tomando uma visão algorítmica da heurística (ou seja, heurísticas específicas aplicadas a situações específicas). A heurística torna-se uma capacidade, uma técnica, ou, paradoxalmente, mesmo um algoritmo. Num certo sentido, a resolução de problemas como arte fica reduzida à resolução de problemas como capacidade quando são feitas tentativas para implementar as ideias de Pólya salientando os seus passos e colocando-os nos manuais escolares. Embora a distorção possa não ser inevitável, quando os educadores tentam captar em manuais e guias para professores o que é essencialmente um esforço artístico, a tarefa é claramente difícil.

Dos três temas, vemos a resolução de problemas como arte como a mais defensável, mais justa e mais prometedora. Mas ao mesmo tempo é o tema mais problemático porque é o mais difícil de operacionalizar em manuais escolares e salas de aula. O problema para os educadores matemáticos que acreditam que a resolução de problemas é uma forma de arte é como desenvolver esta capacidade artística nos estudantes.

Por causa da caricatura que muita gente mantém de John Dewey, temos relutância em trazer o seu trabalho para a discussão. Mas acreditamos que as ideias de Dewey acerca da resolução de problemas complementam as de Pólya. Dewey não fornece todas as respostas; de facto, ele demonstra que a situação é mesmo muito mais complexa do que se pode pensar. Mas dá uma orientação valiosa e outra maneira de pensar sobre a resolução de problemas.

Embora Dewey seja claramente o principal filósofo americano da educação do século XX, ele é acusado muitas vezes e por várias pessoas por tudo aquilo que está errado na educação americana, e a sua influência foi mínima no currículo escolar em geral e no currículo de Matemática em particular. A multidão de educadores e psicólogos que vai de Moore a Thorndike louva as ideias de Dewey; contudo, excepto

para a escola-laboratório da Universidade de Chicago no virar do século, não há exemplo de implementação das suas ideias tal como ele as entendia. O que tem sido chamado de educação progressiva teve uma influência nos currículos da Matemática escolar, mas a crítica à educação progressiva fornecida por Dewey (1938/1963) em *Experience and education* mostra como os outros reformadores estavam bem longe das suas ideias básicas. Apesar disso, Dewey continua a ser a principal figura na educação americana porque muitas pessoas afirmaram a sua ligação com o seu trabalho, incluindo as poucas pessoas que realmente despenderam tempo a ler os próprios escritos de Dewey em vez de distorções em segunda mão.

Dewey não usou muitas vezes o termo *resolução de problemas*, mas é claro que a resolução de problemas era essencial na sua visão sobre educação e escola. Aquilo que referimos como resolução de problemas, Dewey designava, usualmente, de *pensamento reflexivo*. Mais do que ser uma maneira como os homens lidam com o mundo, a resolução de problemas era, para Dewey, a essência do pensamento humano: ser capaz de pensar reflexivamente faz de nós humanos. Dewey distinguia entre vários tipos de pensamento, mas quando ele escreveu *How we think*, em 1910, e o reviu em 1933, pensar significava pensar reflexivamente.

Melhor do que ninguém, Dewey combinou as ideias da resolução de problemas como meio e como fim merecedor de especial atenção. Dewey usou muito do *How we think* para discutir como o pensamento pode ser treinado, tal era a importância que dava ao desenvolvimento da capacidade da resolução de problemas das pessoas. Mas isso não era um fim separado da organização progressiva da matéria que é um resultado directo do pensamento reflexivo. Tão simples e óbvio como isto pode soar, a nossa história de fracassos em atingir o duplo objectivo de ajudar os alunos a desenvolver a capacidade de “resolver problemas” e organizar a matéria de Matemática, é uma evidência convincente de como a tarefa é complexa.

Talvez a concepção falsa mais grave acerca de John Dewey seja a que ele se preocupava com a criança e não com a matéria. O problema, diz Dewey (1902/1964), “é justamente desembaraçar-se da noção prejudicial que há numa diferença em espécie (tão distinta do grau) entre a experiência da criança e as várias formas de matéria que constitui o plano de estudos” (p. 344). Dewey argumentava que a experiência da criança “contém em si mesma elementos – factos e verdades – exactamente do mesmo tipo dos que entram no estudo formulado... e [ainda mais importante] as atitudes, os

motivos, e o interesse que operam no desenvolvimento e organização da matéria no lugar que agora ela ocupa” (p. 344).

Para Dewey, a experiência era central, os problemas surgem naturalmente dentro da experiência, ensinar e aprender consiste na reconstrução da experiência que conduz à progressiva organização da matéria, e a reconstrução da experiência requer pensamento reflexivo (ou resolução de problemas).

Como Pólya, Dewey colocou uma grande ênfase no professor. Dewey não rejeitou a ideia de que os professores transmitem informação aos alunos. De facto, ele disse que “nenhuma questão educacional é de maior importância do que obter a maneira mais lógica de aprender através da transmissão dos outros” (Dewey, 1910, p. 197). Dewey disse que o problema era como converter tal informação num bem intelectual. “Como trataremos nós a matéria dada pelo manual escolar e ensinaremos de modo que ela funcione como matéria para exame reflexivo, não como um alimento intelectual já pronto a ser aceite e engolido exactamente como fornecido pela história?” (pp. 197-198). Dewey respondeu à sua própria questão, dizendo que a informação transmitida não deve ser alguma coisa que os alunos podem facilmente descobrir através da sua própria inquirição directa⁶; que a informação “deve ser fornecida por meio de estímulos, não com finalidade e rigidez dogmática”, e que a informação deve ser relevante para uma questão vital na própria experiência dos alunos” (pp. 198-199). De acordo com Dewey,

Instrução em matéria que não se relacione com qualquer problema já abordado na própria experiência do estudante, ou que não seja apresentado para resolver um problema é pior do que inútil para propósitos intelectuais. Na medida em que não entra em qualquer processo de reflexão, é desnecessária; mantém-se em mente como madeiras e escombros sem préstimo, é uma barreira, um obstáculo no caminho do pensamento efectivo quando o problema surge (p. 199).

Os professores, então, podem justificadamente transmitir informação, de acordo com Dewey, mas só se a informação está ligada à experiência da criança e aos problemas que surgem dentro dessa experiência. Num certo sentido, a matéria é mesmo mais importante para o professor que para o aluno. O professor precisa de usar o seu conhecimento da matéria de modo a ajudar a criança a reconstruir a experiência de maneira que a matéria se torne progressivamente mais organizada para a criança.

⁶ No original, *direct inquiry*.

Em *A criança e o currículo*, Dewey (1902/1964), comparou a matéria logicamente organizada a um mapa. O mapa, disse Dewey é um “testemunho formulado da experiência” (p. 350). Os alunos reconstróem a sua experiência, eles fazem um mapa da matéria. Eles podem também usar mapas construídos por outros como guias de futuras jornadas, mas nenhum mapa pode “substituir uma experiência pessoal” (p. 350). Um mapa “não toma o lugar de uma jornada efectiva” (p. 350). Como Pólya, Dewey estava preocupado com a transformação logicamente organizada da matéria para a experiência dos alunos psicologicamente significativa.

O processo de pensar reflexivamente, da resolução de problemas que surge dentro da experiência, era para Dewey, uma forma de arte. Dewey (1910) dizia que “nenhuma regra de ferro (para o pensamento reflectivo) pode ser criada” (p. 78). Ele acreditava que os alunos podem ser “competentes em métodos de ataque e solução” (p. 78). Mas expressou preocupação acerca de uma “formulação ultraconsciente de métodos e procedimentos” (p. 112). Então, de acordo com Dewey, a capacidade está envolvida no pensamento reflexivo, ou na resolução de problemas, mas o pensamento reflexivo, ele próprio, não é uma capacidade. De facto, Dewey expressou uma preocupação muito grande com a ênfase na aquisição de capacidades. “Capacidades práticas, modos de técnica efectivas, podem ser inteligentemente usadas, não mecanicamente”, dizia ele, “só quando a inteligência participou na sua *aquisição*” (p. 52).

Para além disso, Dewey (1910) acreditava não só que os estudantes devem ser “competentes em métodos de ataque e solução” mas também que eles devem ser “sensíveis aos problemas” (p. 78). Isto é, *atitudes* adequadas eram muito importantes para Dewey:

Por causa da importância das atitudes, a capacidade de treinar o pensamento não é atingida só pelo conhecimento das melhores formas de pensar. A posse desta informação não é garantia para a capacidade de pensar bem. Além disso, não há conjuntos de exercícios de pensamento correcto, cuja repetição leve a ser um bom pensador. A informação e os exercícios são ambos valiosos. Mas nenhum indivíduo atinge o seu valor, excepto se estiver pessoalmente animado por certas atitudes dominantes no seu próprio carácter (Dewey, 1933, p. 29).

O que é necessário, disse Dewey (1933), é a união da atitude e método competente⁷. Dewey acreditava que as três atitudes mais importantes a serem cultivadas são abertura de espírito, empenhamento e responsabilidade. O desenvolvimento de tais atitudes era tão importante para Dewey que ele dizia que se fosse forçado a fazer uma escolha entre estudantes que tivessem estas atitudes e estudantes que tivessem conhecimento acerca de princípios de raciocínio e algum grau de técnica no raciocínio, ele escolheria as atitudes. “Afortunadamente”, dizia ele, “uma tal escolha não tem que ser feita, porque não há oposição entre as atitudes pessoais e os processos lógicos... O que é necessário é interligá-los numa unidade” (p. 34).

A ligação de Dewey a Pólya parece clara. Pólya (1981) sugeria que “em vez de acelerar através de todos os detalhes de um programa demasiado extenso, o professor deve concentrar-se em alguns problemas realmente significativos e tratá-los com vagar e inteiramente” (Vol. 2, pág. 123). Dewey (1933) dizia que “uns quantos assuntos e uns quantos factos e mais responsabilidade para pensar profundamente a matéria destes assuntos e factos para compreender o que eles envolvem, deve dar melhores resultados” (p. 33).

A crença de Pólya e Dewey que a Matemática e a resolução de problemas são para todos e a fé básica na inteligência humana liga-os aos nossos antecessores profissionais em educação matemática. Smith e Young não podiam ou não deveriam ver em Dewey a oportunidade de reformular a sua visão das vantagens dos estudos clássicos⁸ com vista a mudar a sociedade. Num certo sentido, precisamos usar o trabalho de Dewey e Pólya para capturar de novo e rever a tradição incorporada no trabalho de Smith e Young.

Conclusão

Uma consequência do retomar desta tradição é tomar seriamente a noção que a resolução de problemas é realmente para todos. Precisamos de olhar mais para o que as crianças podem de facto fazer e insistir na larga evidência do que conta como capacidade de resolver problemas. Por outras palavras, devemos estudar mais cuidadosamente o papel do contexto na resolução de problemas. Algumas pesquisas recentes mostram que as crianças que têm dificuldades na resolução de problemas na

⁷ No original, *skilled method*.

⁸ No original, *liberal arts*.

escola, podem resolver problemas semelhantes em situações fora da escola que são mais significativas para elas. Tomar seriamente a noção de que a resolução de problemas é para todos, significa estudar as crianças numa variedade de situações e providenciar exemplos para ensinar o que as crianças podem fazer quando uma tentativa é feita para ligar a matéria à experiência.

Uma vez mais, nem Dewey nem Pólya têm todas as respostas, mas eles ajudam-nos com as ideias básicas do que é a resolução de problemas, porque devemos ensiná-la e como ela se relaciona com a progressiva organização da matéria. E o seu trabalho fornece-nos um veículo através do qual devemos “examinar criticamente a nossa herança como um campo de estudo” levando a um “diálogo... com os nossos antepassados profissionais” (Kliebard, 1968, p. 83).

Referências bibliográficas

- Brooks, E. (1871). *The normal elementary algebra: Containing the first principles of the science, developed with conciseness and simplicity, for common schools, academies, seminaries and normal schools*. Philadelphia: Sower, Potts.
- Chase, A. B. (1979). *The Rhind mathematical papyrus*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Dewey, J. (1964). The child and the curriculum. In R. D. Archambault (Ed.), *John Dewey on education: Selected writings* (pp. 339-358). Chicago: University of Chicago Press. (Original work published 1902)
- Dewey, J. (1910). *How we think*. Boston: Heath.
- Dewey, J. (1933). *How we think: A restatement of the relation of reflective thinking to the educative process*. Boston: Heath.
- Dewey, J. (1963). *Experience and education*. New York: Collier. (Original work published 1938)
- Eichoiz, R. E., O'Daffer, P G., Fleenor, C. R., Charles, R. I., Young, S., & Barnett, C. S. (1987). *Addison-Wesley mathematics* (Book 5). Menio Park, CA: Addison-Wesley.
- Grube, G. M. A. (Trans). (1974). *Plato's Republic*. Indianapolis: Hackett.
- Hall, G. S. (1904). *Adolescence* (Vol. 2). New York: Appleton.
- Holbrook, N. M. (1854). *The child's first book in arithmetic*. Portland, ME: Sanborn & Carter.
- Kliebard, H. M. (1968). The curriculum field in retrospect. In P Witt (Ed.), *Technology and the curriculum* (pp. 69-84). New York: Teachers College Press.
- Milne, W J. (1897). *A mental arithmetic*. New York: American Book.
- Moore, E. H. (1926). On the foundations of mathematics. In R. Schorling (Ed.), *A general survey of progress in the last twenty-five years* (First Yearbook of the

- National Council of Teachers of Mathematics, pp. 32-57). New York: Columbia University, Teachers College, Bureau of Publications. (Original work published 1903)
- National Council of Teachers of Mathematics. (1980). *An agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980s*. Reston, VA: Author.
- Polya, G. (1966). On teaching problem solving. In E. G. Begle (Ed.), *The role of axiomatics and problem solving in mathematics* (pp. 123-129). Boston: Ginn.
- Pólya, G. (1981). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving* (Combined ed.). New York: Wiley.
- Pólya, G. (1984). Fundamental ideas and objectives of mathematical education. In G. C. Rota (Ed.), *George Polya: Collected papers: Vol. 4. Probability; combinatorics; teaching and learning in mathematics* (pp. 569-578). Cambridge, MA: MIT Press. (Reprinted from *Mathematics in Commonwealth Schools*, 1969, pp. 27-34)
- Sanford, V. (1927). *The history and significance of certain standard problems in algebra*. New York: Columbia University, Teachers College, Bureau of Publications.
- Siefert, H. O. R. (1902). *Principles of arithmetic: Embracing common fractions, decimal fractions, percentage, proportion, involution, evolution and mensuration. A manual for teachers and normal students*. Boston: Heath.
- Smith, D. E. (1900). *The teaching of elementary mathematics*. New York: Macmillan.
- Smith, D. E. (1905). Movements in mathematical teaching. *School Science and Mathematics*, 5, 134-139.
- Smith, D. E. (1909). *The teaching of arithmetic*. New York: Columbia University, Teachers College.
- Stanic, G. M. A. (1984). Why teach mathematics? A historical study of the justification and question (Doctoral dissertation, University of Wisconsin-Madison, 1983). *Dissertation Abstracts International*, 44, 2347A.
- Stanic, G. M. A. (1986). The growing crisis in mathematics education in the early twentieth century. *Journal for Research in Mathematics education*, 17, 190-205.
- Strayer, G. D., & Upton, C. B. (1928). *Strayer-Upton arithmetics-Higher grades*. New York: American Book.
- Thorndike, E. L. (1924). Mental discipline in high school studies. *Journal of Educational Psychology*, 15, 1-22, 83-98.
- Thorndike, E. L., & Woodworth, R. S. (1901). The influence of improvement in one mental function upon the efficiency of other functions (1). *Psychological Review*, 8, 247-261. Upton, C. B. (1939). *Social utility arithmetics-First book*. New York: American Book. Wentworth, G. A. (1899). *Plane and solid geometry*. Boston: Ginn.
- Wentworth, G. A. (1900). *New school algebra*. Boston: Athenaeum.
- Young, J. W. A. (1903). What is the laboratory method? *Mathematical Supplement of School Science*, 1, 50-56.