MARÍLIA BARROS DE OLIVEIRA

# CONSTRUINDO SIGNIFICADOS PARA A LINGUAGEM ALGÉBRICA COM O AUXÍLIO DO JOGO CODIFICAÇÃO-DECODIFICAÇÃO

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP
São Paulo
2004

**MARÍLIA BARROS DE OLIVEIRA**

# CONSTRUINDO SIGNIFICADOS PARA A LINGUAGEM ALGÉBRICA COM O AUXÍLIO DO JOGO CODIFICAÇÃO-DECODIFICAÇÃO

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de* ***MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA****, sob a orientação d(a)* ***Prof(a). Dr(a). Sandra Maria Pinto Magina.***

**PUC/SP**

**São Paulo**

**2004**

Banca Examinadora

______________________________________

______________________________________

______________________________________

À minha base:

Gilvan, Lucy e Emília,

Pelo apoio e credibilidade.

# AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela vida e oportunidade.

Às pessoas que direta ou indiretamente auxiliaram na elaboração e desenvolvimento deste trabalho.

À Profª Drª Sandra Maria Pinto Magina, companheira e incansável orientadora.

À Profª Drª Silvia Dias de Alcântara Machado, pelas preciosas contribuições.

Ao Prof Dr Romulo Campos Lins, pelo auxílio nos vários momentos de dúvidas.

À CAPES, pela bolsa que possibilitou o término deste trabalho.

À todos professores, coordenação e funcionários do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP.

Aos colegas de mestrado, cuja união e persistência (e almoços!) sempre nos motivaram, em especial aos amigos Tana, Mauro, Inara e Dermeval.

À Escola Municipal Professor Almeida Júnior: direção, professores, funcionários e alunos da 6ª série do ano de 2003. Especial agradecimento à professora Maria José, pelo apoio incondicional, sem o qual este trabalho não teria se realizado.

À minha amada mãe (D. Emilia) e minha querida irmã Lucy, compreensivas, companheiras, auxiliares, base e suporte.

Ao meu marido (Gilvan) pela paciência e compreensão pela falta de tempo e irritabilidade.

Ao Nino, meu cachorrinho, companheiro no combate ao stress.

Aos colegas: Neno, Samuel e Sonia pelo auxílio com a língua inglesa, Arena pela leitura do trabalho, Cássio pela revisão ortográfica.

Ao meu (ou minha) bebê que está por vir.

# RESUMO

A presente dissertação teve por objetivo investigar a formação da linguagem algébrica e uma construção de significados para essa linguagem, com o auxílio do jogo codificação-decodificação. O estudo se propôs a responder a seguinte questão de pesquisa: "*quais as contribuições que o jogo codificação-decodificação traz para a construção de significados da linguagem algébrica?".*

Para tanto, desenvolvemos um trabalho experimental com dois grupos de alunos da 6ª série do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública municipal de São Paulo. A pesquisa constou de uma intervenção de ensino, dividida em duas fases, e três instrumentos diagnósticos – pré, intermediário e pós testes – aplicados, respectivamente, no início, no meio e no fim da intervenção de ensino. Um dos grupos – grupo experimental – participou da aplicação dos testes, do jogo codificação-decodificação (fase I da intervenção) e das atividades de resolução de problemas, estabelecendo conexões entre o jogo e a Álgebra formal (fase II da intervenção). O outro grupo – o grupo de controle – participou da aplicação dos instrumentos diagnósticos, da aprendizagem de resolução de equações (fase I da intervenção) e da aprendizagem de resolução de equações complexas e problemas (fase II da intervenção).

Os resultados obtidos apontam uma superioridade de desempenho algébrico do grupo experimental em relação ao grupo de controle. Esta superioridade foi ainda mais evidente nos exercícios que questionavam acerca da linguagem algébrica. Tais dados nos permitem concluir que a introdução à Álgebra, auxiliada pelo jogo codificação-decodificação, produz resultados significativos para a constituição de significados dos objetos algébricos.

**Palavras-chaves:** álgebra, intervenção de ensino, jogos de ensino, linguagem algébrica.

# ABSTRACT

The purpose of this paper was to investigate the formation of algebraic language and the construction of its meanings supported by the coding/decoding game. The study set out to answer the question *"What are the contributions that the coding/decoding game brings to the construction of meanings of the algebraic language?"*.

I to answer the question, an experimental work was developed with two groups of Sixth Grade Fundamental School students in São Paulo municipal public educational system. The research introduced a learning intervention divided in two fases and three diagnostics instruments – pre, intermediate and post tests – applied at the beginning, middle and at the end of the learning intervention. One of the groups - the experimental group - participated in the application of the tests, in the coding/decoding game (Phase I of intervention) and in the problem solving activities, establishing connections between the game and formal Algebra (Phase II of intervention). The other group - the control group - participated in the application of diagnostic instruments, in the learning of how to solve equations (Phase I of intervention) and in the learning of how to solve complex equations and problems (Phase II of intervention)

The results indicate a superior algebraic performance in the experimental group in relation to the control group. Such superiority was even more evident in the exercises concerning the algebraic language. These data allow the conclusion that the introduction to Algebra supported by the coding/decoding game brings about significant results for the algebraic objects meaning constitution.

**Key-words**: Algebra, teaching intervention, learning games, algebraic language.

# SUMÁRIO

# LISTA DE QUADROS

# LISTA DE FIGURAS

# LISTA DE GRÁFICOS

# LISTA DE TABELAS

# LISTA DE ANEXOS

# CAPÍTULO 1

## APRESENTAÇÃO

## 1.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo discutiremos os motivos que nos levaram a realizar esta pesquisa, nossas aspirações e anseios em relação a ela, além de sua relevância.

Apresentaremos também nossa problemática e objetivos além de um resumo do que se apresentará em cada capítulo do trabalho.

## 1.2 MOTIVAÇÃO E RELEVÂNCIA DA PESQUISA

O motivo inicial que nos levou a refletir e levantar questionamentos sobre a introdução da linguagem algébrica provém de nossa prática docente. Como professora do Ensino Fundamental II de escolas das redes pública e particular, sempre nos deparamos com as dificuldades dos alunos frente a utilização da linguagem simbólica no ensino de Álgebra. Muitas vezes, os procedimentos utilizados para a resolução de uma equação eram dominados pelos alunos, mas os mesmos se mostravam sem sentido, resolviam e encontravam o “valor do x”, mas não sabiam o que era aquele x e nem o que estavam calculando, apenas calculavam. Já nos deparamos com um aluno que resolveu a equação e ao final encontrou x = 11 e virou-se para nós e disse *“Já resolvi, deu 11, mas quanto vale o x?”*. Outra grande dificuldade surgia nos momentos de trabalharmos a resolução de problemas que utilizassem a representação algébrica para a busca da solução. Primeiro porque os alunos não sentiam a necessidade de utilizar uma equação para resolver o problema, muitas vezes faziam várias tentativas aritméticas para encontrar a solução. Dos que caminhavam para equacionar o problema, muitos se bloqueavam em algumas representações simbólicas. Percebemos, ao longo de nossa experiência, que o desafio não estava apenas no entendimento do problema, e sim em utilizar uma linguagem que não lhes era comum, que não percebiam como um objeto matemático que poderia ser manipulado a favor da resolução de um problema que, na maioria das vezes, se apresentava contextualizado[1]. O fato de não terem se apropriado da linguagem simbólica, de não atribuírem significados aos objetos algébricos, impedia-os de serem resolvidos.

Acreditamos em que um dos motivos que contribuem para esse bloqueio frente a utilização e entendimento da linguagem simbólica deva-se à maneira pela qual ela é apresentada por um grande número de professores e livros didáticos. O início à Álgebra é feito pela utilização das expressões algébricas, sua manipulação e resolução de equações, exaustivamente. Após esta fase o aluno é colocado frente a problemas que "devem" ser resolvidos com as equações que já se aprendeu. Acreditamos que o caminho deva ser justamente o contrário. Se o aluno tiver a oportunidade de se deparar com uma representação e buscar justificativas que dêem significados para as mesmas, e mais, se ele puder criar uma representação sua para solucionar problemas e produzir justificações (LINS, 1994-b) para estas representações, pode ser que a partir de então o trabalho de manipulação algébrica obtenha maiores sucessos. Partir do que cada um construiu e, em consenso com todos gerar justificativas comuns, as quais todos reconheçam como verdadeiras para que possam utilizá-las para se comunicar, assim a manipulação algébrica pode tornar-se mais significativa.

---

[1] Problemas Contextualizados para nós são problemas que envolvam uma situação fictícia proveniente ou não de fatos reais.

Também em conversas com professores de Álgebra no Ensino Fundamental, pudemos levantar que uma das grandes dificuldades citadas por eles é o fato de muitos alunos demonstrarem falha na formação das habilidades algébricas iniciais, como a conversão de registros (DUVAL, 2003) da linguagem natural para a linguagem algébrica. Estes mesmos alunos, frente a uma situação de resolução de equação, não apresentavam tantas dificuldades com as técnicas de solução.

Em leituras iniciais, buscamos justificativas para o desenvolvimento desta pesquisa, fatos que a firmassem como consistente e necessária.

Kieran (1992), em seu trabalho, conclui que são necessárias pesquisas em Álgebra no que se refere ao ensino e a aprendizagem, não importando o conteúdo específico. Levanta como uma dificuldade inicial para lidar com as representações simbólicas justamente a passagem da linguagem natural para a algébrica, pois esta última é semanticamente fraca, isto é, a simbologia algébrica é desprovida de significados para os alunos.

Nobre (1996) levanta que *"dentre as dificuldades das crianças que se iniciam em Álgebra, apontadas pelos pesquisadores da área,* (está) *a passagem da linguagem natural para a algébrica"* (pp. 28, 29).

Para o PCN (1997) *"o ensino de Álgebra precisa continuar garantindo que os alunos trabalhem com problemas, que lhes permitam dar significados à linguagem e às idéias matemáticas"* (p.84), pois a Álgebra é *"uma poderosa ferramenta para resolver problemas"* (p.115).

No último relatório do Saeb (2001)[2] os resultados referentes a conteúdos algébricos dos alunos da 8ª série do Ensino Fundamental II, ultrapassam 55% de

[2] Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica.

erros em grande parte do país. Uma hipótese para este fato é o não reconhecimento de expressões algébricas ou equações como objetos matemáticos sobre os quais podemos operar; ou ainda a ausência de relação entre linguagem natural e linguagem simbólica. O próprio relatório coloca que os alunos, ao final da 8ª série, *“demonstram nível de dificuldade com o uso da linguagem simbólica ou algébrica na resolução de problemas”* (INEP, 2002, p.53).

Vergnaud (1987, p.260)[3] coloca que *“... a Álgebra consiste em escrever as relações explícitas entre incógnitas e dados e remetê-las em seguida a procedimentos relativamente automáticos para achar as soluções.”*, o que está a favor desta pesquisa que enfocará essa relação entre incógnita e dados, buscando investigar o desenvolvimento da simbologia algébrica e seus significados.

Por tudo isso, optamos por uma pesquisa que investigasse as concepções dos alunos quanto à representação algébrica, isto é, que estudasse a passagem da linguagem natural para a simbólica, mais especificamente, a construção da linguagem simbólica algébrica.

[3] Texto original em francês: “...l’algèbre consiste à écrire des relations explicites entre inconnues et données, et à s’em remettre ensuite à dês procédures de traitement relativement automatiques pour trouver la soluction.”

## 1.3 PROBLEMÁTICA E OBJETIVO

Esta pesquisa tem por objetivo estudar a aquisição e o desenvolvimento inicial de significados para a linguagem algébrica em alunos da 6ª série do Ensino Fundamental II.

Pretendemos investigar como os alunos concebem, desenvolvem e dão significados à passagem da linguagem natural para a linguagem simbólica, além de estudar seu desenvolvimento e utilização para representar situações-problema.

Para tal, assumimos a hipótese que o jogo codificação-decodificação de situações-problema auxilia na constituição de significados para a linguagem algébrica. O jogo se desenvolve em dois momentos, no primeiro uma dupla de alunos recebe a tarefa de codificar um problema aritmético elaborando assim uma mensagem para que uma outra dupla – no segundo momento – a decodifique e utilize na resolução de um problema semelhante, mas com dados numéricos diferentes. O objetivo maior do jogo é que o aluno perceba que utilizando o código criado, a resolução do problema ocorre de maneira mais rápida, pois basta substituir os valores numéricos do problema no código e realizar as operações indicadas, poupando-lhe o tempo de reflexão sobre qual operação utilizar.

Partimos dos resultados de uma pesquisa anterior feita por Nobre (1996) com um grupo de quatro alunos, duas duplas, a qual descreveremos no capítulo 2. Baseadas nesta pesquisa queremos estudar a eficácia do jogo em uma situação real, de sala de aula comum, com aproximadamente 35 alunos, e analisar suas reais contribuições para o ensino e aprendizagem da linguagem simbólica da Álgebra.

Elaboramos uma intervenção de ensino a qual consta de duas fases. Na primeira trabalhamos o jogo codificação-decodificação e na segunda procuramos desenvolver atividades que estabelecessem relações entre os códigos elaborados durante o jogo e as equações do 1º grau com uma incógnita. As atividades propostas tanto na primeira quanto na segunda fase foram baseadas na resolução de situações-problema as quais levassem à investigação e reflexão. No início, no meio e no fim da intervenção aplicamos instrumentos diagnósticos. O primeiro levantou os conhecimentos espontâneos dos alunos no que tange a construção e manipulação algébrica, o segundo investigou o que os alunos adquiriram ao longo da primeira fase da intervenção e o terceiro estudou o quanto o jogo codificação-decodificação contribuiu para a aquisição da linguagem algébrica.

Nossa pesquisa trata-se de um estudo experimental e teve por público alvo alunos de duas 6ªs séries do Ensino Fundamental II de uma escola da rede pública municipal de São Paulo. Uma das 6ªs séries foi o nosso grupo experimental onde trabalhamos a intervenção de ensino. A outra 6ª série constituiu nosso grupo de controle que trabalhou os conteúdos algébricos normalmente com a professora de classe. A escolha por esta série específica justifica-se pelo fato de ser nela o início dos estudos algébricos efetivamente, conforme indicações do PCN.

Baseadas nesta problemática nosso estudo se propõe a investigar a seguinte questão de pesquisa:

> **Quais as contribuições que o jogo codificação-decodificação traz para a construção de significados da linguagem algébrica?**

Na busca de obtermos subsídios para responder à nossa questão de pesquisa, elaboramos nossa estrutura de dissertação, cuja síntese apresentaremos na seção seguinte.

## 1.4 SÍNTESE DA DISSERTAÇÃO

Neste capítulo apresentamos nossa motivação inicial, relevância do trabalho, objetivos, problemática e questão de pesquisa.

No capítulo 2, discutiremos acerca de nosso embasamento teórico. Apresentaremos aqui idéias teóricas de: VERGNAUD sobre os Campos Conceituais, LINS sobre o Modelo dos Campos Semânticos e DUVAL sobre os Registros de Representação Semiótica. Além disso, levantaremos algumas pesquisas correlatas ao tema como as de KIERAN, DA ROCHA FALCÃO, GALLARDO & ROJANO e FILLOY & ROJANO.

No capítulo 3, descreveremos nossa metodologia. Apresentaremos o público alvo – alunos de 6ª série de uma escola pública – descreveremos o grupo experimental e o grupo de controle justificando a existência de cada um. Discutiremos em detalhes os instrumentos diagnósticos, aplicados aos dois grupos, e a intervenção de ensino que foi aplicada apenas no grupo experimental.

No capítulo 4, faremos a análise dos resultados baseadas na coleta de dados efetuada. Pretendemos realizar vários tipos de análises que vão desde uma comparação global entre os grupos até uma análise da evolução intra-grupo no grupo experimental.

No capítulo 5, apresentaremos nossas conclusões a respeito do trabalho, procurando responder nossa questão de pesquisa e levantar sugestões para pesquisas posteriores.

# CAPÍTULO 2

# CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS

## 2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentaremos nossa fundamentação teórica bem como uma revisão de literaturas ligadas ao nosso tema.

Tendo por objetivo principal investigar a constituição de significados para a linguagem algébrica, a primeira leitura a que recorremos foi o Modelo dos Campos Semânticos de LINS. Esse modelo fornece elementos para a análise das atividades com o jogo codificação-decodificação, dentre outras.

Para auxiliar o estudo no que concerne à aprendizagem e representações buscamos idéias de alguns pesquisadores em Educação Matemática como VERGNAUD e DUVAL.

Em seguida discutiremos algumas leituras que dissertam sobre nosso tema, com suas reflexões, argumentações e indagações. A primeira é NOBRE (1996), nossa fonte de inspiração inicial quanto a utilização do jogo codificação-decodificação. Em seguida faremos uma releitura de DA ROCHA FALCÃO (1993, 1994, 1997) que apresenta vários trabalhos no que concerne a representação de problemas utilizando a linguagem algébrica. Também dissertaremos acerca dos trabalhos de KIERAN (1992, 1994, 1997), FILLOY & ROJANO (1989) e GALLARDO & ROJANO (1998).

## 2.2 TEORIAS

Iniciaremos nossa discussão sobre os trabalhos de LINS, VERGNAUD e DUVAL, expondo seus principais resultados e levantando os aspectos que auxiliarão no desenvolvimento de nosso trabalho e análises.

### *2.2.1 O MODELO DOS CAMPOS SEMÂNTICOS*

O MCS (Modelo dos Campos Semânticos) é um modelo que tem por objetivo fazer uma análise epistemológica do conhecimento, sendo que *"Epistemologia é a atividade humana que estuda as seguintes questões: (i) o que é conhecimento?; (ii) como é que conhecimento é produzido?; (iii) como é que conhecemos o que conhecemos?"* (LINS, 1993, p. 77).

Para o MCS, o ponto central de toda aprendizagem é a produção de significados e, destaca como objetivos centrais da educação algébrica *"... 1) permitir que os alunos sejam capazes de produzir significados [no sentido do MCS] para a álgebra; e, 2) permitir que os alunos desenvolvam a capacidade de pensar algebricamente."* (LINS & GIMENEZ, 1997, p. 152). Buscando entender melhor o MCS, apresentamos suas principais noções abaixo:

- Conhecimento: composto pelo par (crença-afirmação, justificação), no qual a crença afirmação pode ser um pensamento, uma fala, um gesto, uma escrita, um diagrama etc; e a justificação garante a legitimidade da enunciação da crença-afirmação;

- Objeto: é constituído na produção de significados;
- Significado: conjunto das coisas que efetivamente se dizem a respeito de um objeto no interior de uma atividade;
- Interlocutores: direções nas quais as pessoas falam;
- Estipulações: crenças-afirmações que são constitutivas de campos semânticos e que, localmente, não precisam ser justificadas, pois são tomadas como absolutamente verdadeiras dentro da atividade;
- Núcleo: conjunto de estipulações locais que estão em jogo dentro de uma atividade;
- Espaço comunicativo: é o que se estabelece quando se compartilha interlocutores;
- Texto: "... é constituído como um resíduo de uma enunciação ..." (LINS, 1999, p.88), e só quando produz significado para o texto é que o leitor pode reconhecê-lo como tal;
- Legitimidade: que está ligada à lógica das operações;
- Limite epistemológico: impossibilidade de produzir significados para um determinado objeto em relação a um núcleo.

Um campo semântico é um modo de produzir significado, no qual os objetos são sempre constituídos dentro de uma atividade.

De acordo com o MCS, não existe conhecimento sem enunciação, pois conhecimento é uma crença-afirmação acompanhada de uma justificação para a mesma. Tais justificações garantem a legitimidade da enunciação.

Ainda quanto a conhecimento, este é considerado do domínio da fala e não do texto, por isso um mesmo texto, enunciado com diferentes justificações, pode constituir conhecimentos distintos.

O conhecimento tem sempre um sujeito (o sujeito que fala), por isso ao se falar de conhecimento é do conhecimento de um sujeito que se fala. A produção deste conhecimento é feita na direção de um interlocutor e se refere a um sujeito que o enuncia. Assim sendo, o pensamento algébrico é um modo de produzir significado para a álgebra e uma justificação para a mesma, quando é enunciado.

Para LINS (1994) e LINS & GIMENEZ (1997), o pensamento algébrico possui três aspectos que caracterizam um (e não único) modo de produzir significado para a álgebra. São eles:

- Pensar aritmeticamente: no qual os objetos que se lidam são números, operações aritméticas e relações de igualdade;
- Pensar internamente: no qual as propriedades destes objetos sustentam a lógica das operações, não se referindo a nada fora do domínio destes objetos;
- Pensar analiticamente: no qual “incógnitas” são tratadas como se fossem “dados”, o genérico é tratado como especifico. O desconhecido é tratado como se fosse conhecido (como quando “operamos sobre o x”).

Uma afirmação (ou uma “coisa”) pode constituir-se em objeto – em um campo semântico – e o mesmo pode não ocorrer em outro. Um exemplo clássico de LINS (LINS, 1993; LINS, 1994-a; LINS 1994-b; LINS & GIMENEZ, 1997), a equação 3x + 100 = 10 constitui objeto em um “campo semântico de máquinas estado-operador” mas não o constitui em um “campo semântico das balanças de dois pratos”.

Já a equação 3x + 10 = 100 pode se constituir objeto em ambos os campos semânticos. Temos então, diferentes justificações para o mesmo objeto. Produzir significados para um objeto, em um determinado campo semântico, não quer dizer que o mesmo objeto terá significado em outro.

No caso das equações, por exemplo, pode-se produzir significado em um “campo semântico das balanças de dois pratos” para a equação 2x + 40 = 100 e constituí-la como um objeto dentro deste núcleo. A partir de então, pode-se “trabalhar” com este objeto constituído, efetuando diferentes transformações sem recorrer as balanças. Porém, ao querer efetuar as mesmas transformações para a equação 2x + 100 = 40 deve-se deixar claro ao aluno que não estamos mais no “campo semântico das balanças de dois pratos”, mas que podemos efetuar as mesmas transformações ao objeto equação 2x + 100 = 40.

A nossa intenção neste trabalho com o jogo codificação-decodificação, é proporcionar aos alunos um campo semântico – o dos códigos – no qual eles possam constituir objetos e dar significados às representações algébricas – ao uso de letras para representar dados numéricos. Com isso, esperamos que os alunos obtenham um maior sucesso e produzam significados efetivos ao lidar com as “coisas” da álgebra, focando nossa análise na idéia de que *“a mudança de perspectiva mais importante refere-se a passarmos a pensar em termos de significados sendo produzidos no interior de atividades, e não, como até aqui, pensamos em termos de técnicas ou conteúdos.”* (LINS & GIMENEZ,1997, p.161)

### *2.2.2 TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS*

Gérard Vergnaud, conciliou Psicologia e Matemática em sua teoria dos campos conceituais, cujo objetivo central é discutir o comportamento cognitivo do sujeito em situações de aprendizagem.

A Teoria dos Campos Conceituais se baseia na formação e desenvolvimento de conceitos, na qual um conceito não se forma sozinho, isolado, mas interligado a vários outros conceitos numa vasta gama de situações.

A premissa da teoria é que o sujeito adquire e desenvolve seu conhecimento por meio da interação e da resolução de muitas situações-problema, pois a cada nova situação esse sujeito utiliza conceitos anteriormente formados, adaptando-os às novas situações e, ao mesmo tempo, incorpora novos aspectos a estes conceitos, desenvolvendo competências cada vez mais complexas.

Para que isso ocorra, a situação-problema deve despertar o interesse do sujeito, desafiá-lo e deve também considerar as competências e concepções envolvidas. Segundo essa teoria, a competência está ligada a ação, cujo conhecimento ainda está implícito. Já a concepção é vista como o conhecimento explícito, e é apresentada por representações simbólicas assumidas pelo sujeito tais como expressões escritas.

No desenvolvimento de um conceito relacionando competências e concepções, devemos considerar os esquemas que atuam no processo de aprendizagem. Para VERGNAUD (1998) os esquemas são as formas como o sujeito organiza seus componentes cognitivos que permitem gerar diferentes seqüências de ações e tomadas de informações em relação às variáveis do problema. Diante de uma nova situação, o sujeito evoca esquemas de maneiras sucessivas e, por vezes, simultâneas.

Esses componentes cognitivos essenciais aos esquemas são chamados pelo autor de invariantes de ação e podem ser implícitos ou explícitos. Implícitos quando ligados aos esquemas de ação do sujeito e, explícitos quando ligados a uma concepção.

VERGNAUD (1997) considera que o conhecimento se caracteriza por uma terna, que numa situação de aprendizagem considera para o desenvolvimento de um conceito, ao mesmo tempo, o plano das situações, os invariantes operatórios e as representações simbólicas. Assim sendo, a terna é representada por (S, I, s), onde:

- S é o conjunto de situações que dão sentido ao conceito, é o referente;
- I é o conjunto dos invariantes operatórios do conceito, é o significado;
- s é o conjunto das representações simbólicas, é o significante.

Invariantes operatórios são as ações do sujeito e as propriedades matemáticas utilizadas na resolução de um problema. Estes invariantes podem ser implícitos ou explícitos.

Invariantes implícitos estão ligados à competência ou aos significados de maneira a serem reconhecidos pela ação do sujeito ao resolver um problema, são também chamados de teoremas-em-ação. Os teoremas-em-ação são as relações matemáticas que o sujeito leva em consideração, inconscientemente, quando escolhe uma operação ou uma seqüência de operações para resolver um problema. É utilizado de forma intuitiva na ação do sujeito, possuindo por vezes uma validade local, não universal.

Os invariantes explícitos estão ligados à concepção e aos significantes, são expressos por qualquer representação simbólica do sujeito, ou seja, quando o sujeito consegue exteriorizar os invariantes operatórios, através de representações diversas como oralidade ou escrita, ele cria o conceito.

Os conceitos estão sempre se expandindo, em constante evolução e nunca são criados isoladamente, segundo esta teoria. Desta forma, para que o processo de aprendizagem ocorra de forma satisfatória, é necessário que o sujeito interaja com várias situações-problema.

De acordo com a teoria, o papel da linguagem e do símbolo na representação é tornar explícito o conhecimento, pois desta forma ele poderá ser comunicado e compartilhado com outras pessoas, caso contrário este conhecimento ficaria simplesmente implícito, restrito ao sujeito.

É através da linguagem e dos símbolos que os invariantes operacionais podem se transformar em sentenças, isto é, os conceitos e os teoremas-em-ação podem, progressivamente, tornarem-se conceitos científicos e teoremas reais.

Os teoremas-em-ação possuem uma validade local e limitada, pois estão restritos a experiência do sujeito. Quando se tornam explícitos, pelo uso da linguagem e dos símbolos, adquirem domínios mais amplos podendo tornar sua validade universal.

Quando as propriedades relevantes de objetos matemáticos e operações envolvidas numa ação tornam-se explícitas, podemos analisar as conexões entre elas e demonstrar, por vezes, que um determinado conjunto de regras é válido para algumas situações.

Para nossa pesquisa, as idéias de VERGNAUD que realmente utilizaremos são três. Primeiro a sua premissa – de que todo conhecimento emerge na resolução de problemas desafiadores – com a qual concordamos e temos particulares demonstrações disso, provenientes de nossa experiência em sala de aula. Segundo, a sugestão da resolução de várias situações-problema para que se reutilize os conceitos anteriormente formados no desenvolvimento de novos conhecimentos. E, terceira, o fato de que o uso de propriedades relevantes de objetos matemáticos envolvidos numa ação, pode ter conexões com outros e se validar como uma regra. Essa última idéia ocorre muito no ensino de Álgebra, porém as regras são, geralmente, apresentadas sem se explicitar as conexões entre os objetos e as atividades.

### *2.2.3 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA*

A aprendizagem matemática é composta de atividades cognitivas e por este motivo necessita que se utilizem sistemas de representação, os quais são essenciais ao funcionamento e desenvolvimento do conhecimento.

Segundo DUVAL (2003) as representações semióticas possuem dois aspectos que não podem ser confundidos: a forma (representante) e o conteúdo (representado) e, para que haja compreensão em Matemática o objeto matemático deve ser sempre distinguido de sua representação, que existe para permitir a comunicação entre o sujeito e as atividades cognitivas do pensamento.

Cada objeto matemático possui vários registros de representação e estes devem ser integrados para que ocorra a apreensão conceitual. Quanto mais opções de registros de representação para se operar, mais possibilidades o sujeito terá para apreender determinado objeto, pois cada registro de representação oferece a visão de propriedades diferentes deste objeto.

A passagem de uma representação a outra ou a utilização de mais de um sistema de representação no desenvolvimento de uma atividade, constituem tarefas difíceis para os alunos que, em grande maioria, não conseguem reconhecer um mesmo objeto representado por sistemas diferentes.

DUVAL (2003) destaca a importância de não confundir o objeto com sua representação e também a necessidade de se trabalhar com diferentes formas de registros para o mesmo objeto. Levanta duas transformações possíveis a que os objetos matemáticos podem ser submetidos, na busca deste trabalho com diferentes registros, os tratamentos e as conversões.

Os tratamentos de uma representação são as transformações internas a um determinado registro de representação semiótica. Por exemplo, a simplificação da expressão $2x + 2y$ para $2(x + y)$ é um tratamento dentro do registro de representação algébrico.

As conversões de uma representação são as transformações desta representação para uma outra em um outro registro de representação semiótica, que conservam parte ou a totalidade do objeto representado. Por exemplo, escrever a equação $2x + 1 = 7$ após ter lido *"o dobro de um número somado a uma unidade resulta em sete unidades"*, é uma conversão de registros na qual uma sentença apresentada no registro de representação da linguagem natural é convertida para um registro de representação da simbologia algébrica.

Geralmente, o que se nota no ensino é uma ênfase nos tratamentos e quase total esquecimento das conversões.

Em nosso trabalho, vamos utilizar as idéias de Duval no que concerne a realização de tratamentos e conversões na solução de atividades, tanto nos momentos do jogo codificação-decodificação quanto nos momentos de resolução dos instrumentos diagnósticos. Consideramos tratamentos mais simples de serem efetuados devido a ênfase costumeira. Já as conversões exigem a mobilização de maiores conhecimentos e nem sempre conservam as propriedades inicias dos objetos em questão, por este motivo a consideramos mais difíceis de serem realizadas, principalmente de maneira espontânea.

## 2.3 PESQUISAS CORRELATAS

Descreveremos a seguir alguns trabalhos que discutem sobre a Álgebra e seu ensino. Cada qual com seu valor, cada qual com suas indagações. Contemplamos algumas das pesquisas existentes nesta área como NOBRE (1996), DA ROCHA FALCÃO (1993, 1994 e 1997), KIERAN (1992, 1994, 1997), FILLOY & ROJANO (1989) e GALLARDO & ROJANO (1998).

### *2.3.1 NOBRE – Nossa inspiração inicial*

A pesquisa de NOBRE (1996) foi realizada com quatro alunos de uma escola pública do Estado de São Paulo e teve por objetivo central analisar como um aluno codifica a resolução de problemas aritméticos no início do estudo algébrico, dando assim oportunidade para que o aluno crie seu próprio código utilizando sua linguagem e comece a dar sentido aos símbolos algébricos.

Para tal, desenvolveu uma situação de comunicação[4] para propiciar às duplas oportunidades de elaborar mensagens sobre a resolução de um problema aritmético, e em seguida trocar, decodificar e aplicar na resolução de um novo problema semelhante ao primeiro.

Sua hipótese de pesquisa é que “se o aluno, em uma situação de comunicação, tem a oportunidade de criar seu próprio código e aprimorá-lo, no sentido de aproximá-lo da linguagem algébrica formal, então ele dará mais sentido ao uso de letras e terá facilitado sua aprendizagem inicial da álgebra” (NOBRE, 1996, p.38).

O desenvolvimento do estudo ocorreu em 4 encontros onde os alunos recebiam papel impresso com os problemas, folhas em branco numeradas para resolverem os mesmos e 1 caneta por dupla para que a escrita fosse feita em consenso.

No primeiro encontro a dupla A resolveu o problema 1 e elaborou a mensagem A1 enquanto a dupla B aguardava em outro local. Em seguida entra a

[4] “Segundo Collete Laborde,” Uma situação de comunicação, como definida por Brousseau, é uma situação envolvendo dois parceiros A e B. (A ou B podem ser um grupo de indivíduos; B pode ser uma máquina). B tem que resolver uma tarefa definida mas não tem informação suficiente para fazê-lo. A tem esta informação mas não pode fazer a tarefa por si mesmo. Para possibilitar que B faça a tarefa, A deve comunicar a informação necessária e suficiente em uma mensagem (oral ou escrita). A qualidade da mensagem é uma condição fundamental para B ter sucesso.”“ (NOBRE, 1996, p.39)

dupla B, rapidamente para não haver contato com a dupla A, e decodifica A1 e usa na resolução do problema 2 que é semelhante ao 1.

O segundo encontro foi dividido em quatro momentos. No primeiro a dupla B resolveu o problema 3 e elaborou a mensagem B1, enquanto a dupla A aguardava em outro local. Em seguida, também sem o contato entre as duplas, a dupla A decodificou B1 e usou na resolução do problema 4 semelhante ao 3. Num terceiro momento a dupla A reelaborou a mensagem B1, isto é, a dupla foi solicitada a resumir sua mensagem, surgindo assim A2. E, por fim, a dupla B se junta a dupla A para juntos resolverem o problema 5, que também é semelhante ao 3, utilizando a mensagem.

Repete-se no terceiro encontro a seqüência do primeiro. A dupla B resolveu o problema 6 e elaborou a mensagem B2. Após entrou a dupla A decodificou B2 e usou na resolução do problema 7 que era semelhante ao 6.

O último encontro foi subdividido em três momentos. Primeiro a dupla A resolveu o problema 8 e elaborou a mensagem A3. Em seguida sai a dupla A e entrou a dupla B que decodificou A3 e usou na resolução do problema 9 que era semelhante ao 8. No momento final as duplas A e B, juntas, reelaboraram a mensagem A3 e usaram na resolução do problema 10, também semelhante ao 8.

A autora conclui que o trabalho de codificação e decodificação produz resultados significativos e constitui um instrumento facilitador ao desenvolvimento da linguagem algébrica e encerra seu trabalho levantando a idéia de utilizar esse processo em uma sala de aula comum para reafirmar sua utilidade.

Consideramos este trabalho de grande valia para a prática docente, pois auxilia na construção de significados para a linguagem simbólica algébrica que se mostra por muitas vezes sem sentido algum para os alunos que apenas a utilizam mecanicamente. Acreditando também em sua eficácia optamos por utilizá-lo como ponto de partida para nossa pesquisa e estudar seu desenvolvimento em uma sala de aula comum, com 35 alunos aproximadamente, na qual os trabalhos em duplas ocorrerão todos ao mesmo tempo e, por conseqüência, as intervenções do pesquisador em auxílio às atividades, serão menores.

### *2.3.2 DA ROCHA FALCÃO*

Em seus trabalhos, DA ROCHA FALCÃO (1993, 1994 e 1997) discute a Álgebra sob dois pontos de vista, como objeto matemático e como ferramenta matemática. Vista como objeto matemático, a Álgebra opera em si mesma com suas leis abstratas e objetos próprios, não apresenta nenhum contexto. Vista como ferramenta matemática, a Álgebra é suporte para se trabalhar em outros campos conceituais matemáticos.

Destaca como principal função da Álgebra a serventia que ela possui na transposição de dados apresentados em linguagem natural para a linguagem simbólica Matemática, principalmente na resolução de situações-problema contextualizadas, onde a etapa fundamental de resolução consiste nesta reescrita do problema utilizando a linguagem simbólica e, somente após, é que se deve dedicar atenção à escolha de um algoritmo adequado que solucione a equação encontrada.

Infelizmente este não é o retrato que encontramos no ensino de Álgebra em grande parte das escolas. Normalmente os alunos são apresentados à

Álgebra de maneira exaustivamente algorítmica, ou seja, é dada grande ênfase aos algoritmos de resolução de equações, apresentando a Álgebra apenas como um objeto matemático, deixando de apresentar seu lado ferramenta.

O autor discute quatro aspectos levantados pela Teoria dos Campos Conceituais, importantes para a apropriação da Álgebra, que *“constitui uma tarefa cognitiva árdua”* (DA ROCHA FALCÃO, 1993, p.90), são eles:

1- reconhecer algumas funções da Álgebra através da geração de modelos, de demonstrações e resolução de problemas impossíveis de serem solucionados aritmeticamente;
2- formalizar problemas colocando-os em equações, extraindo seus parâmetros, variáveis e as relações pertencentes ao problema, além de dispor dos registros de representação necessários a tal tarefa;
3- conhecer os objetos algébricos como as funções, as fórmulas, as equações, as variáveis e as incógnitas;
4- conhecer o que fazer após ter a equação mobilizando algumas regras para solucionar o problema (se solucionável).

Apresenta também algumas etapas que se deve considerar na resolução de um problema, são elas:

1- Mapeamento: é a primeira representação do problema, é ainda mental e envolve a busca de uma categoria de semelhança a problemas anteriores (se existir), levantamento dos dados e relações existentes, tanto os conhecidos como os que necessitam calcular;
2- Escrita algébrica: é a codificação dos dados obtidos na primeira etapa para a linguagem simbólica, onde a equação (objeto matemático) será constituída para ser resolvida na próxima etapa;

3- Resolução: nesta etapa o objeto matemático constituído será confrontado com regras de algoritmo para se encontrar a sua solução (se existir);
4- Obtenção da resposta final: retorno ao problema em sua linguagem natural para uma confrontação entre o dado numérico encontrado na etapa anterior e o contexto do problema.

DA ROCHA FALCÃO (1993) propõe então uma abordagem para a Álgebra que respeite os seus dois pontos de vista, Álgebra como objeto e Álgebra como ferramenta. Propõe ainda que o professor procure fazer uma análise do desenvolvimento da passagem da Aritmética à Álgebra através de atividades que envolvam resolução de situações-problema, na qual a Álgebra ferramenta auxilie a representação do problema e, somente após esta etapa ser concluída e compreendida, é que a Álgebra objeto auxiliará com os algoritmos de resolução de equações.

Em relação a isto, apresenta os resultados de suas pesquisas que comprovam esta ênfase no trabalho com a Álgebra ferramenta de representação para situações-problema, mesmo que as situações-problema sejam aritméticas para serem modeladas, despertam grande interesse no trabalho de introdução à Álgebra. Por isso, sugere que o ensino inicial da Álgebra não seja o trabalho exaustivo com a resolução de equações dadas, mas que constantemente se coloque para os alunos situações-problema para serem transformadas em equações e isto pode ser feito com auxílio de materiais didáticos, como jogos e recursos tecnológicos (computador, por exemplo), e também como uma tarefa que envolva observações e tentativas de modelizações dentro de outras disciplinas escolares como a Física, por exemplo.

Para o autor (1994, p.47), o campo conceitual algébrico é um domínio complexo, *“onde convivem Álgebra-ferramenta, instrumento de modelização, linguagem com sintaxe própria, suporte de representação fundamental à construção conceitual, ao lado da Álgebra-objeto, a Álgebra algorítmica, entidade semanticamente abstrata, um ente matemático”*.

DA ROCHA FALCÃO (1993, 1994, 1997) utiliza as idéias dos Campos Conceituais em suas pesquisas nas quais estuda, particularmente nestes artigos, o Campo Conceitual Algébrico e apresenta sugestões de que um trabalho de introdução à Álgebra aborde sua dupla face – objeto e ferramenta – e que se realize a partir da modelização de situações-problema, mesmo que esses problemas possam ser resolvidos aritmeticamente. São justamente essas idéias que exploramos nesta dissertação, o trabalho de codificação de situações-problema que podem ser resolvidos aritmeticamente. Segundo a linguagem do autor, trabalhamos com a Álgebra ferramenta, ao codificar os problemas, para que a Álgebra objeto comece a constituir seus significados.

### *2.3.3 ROJANO e Outros*[5]

GALLARDO & ROJANO (1988) apresentam resultados de entrevistas feitas com alunos participantes do projeto “Aquisição da Linguagem Algébrica” realizado na Cidade de México nos anos de 1982-1987 e que tinha por objetivo principal analisar os fenômenos da transição do pensamento aritmético para o algébrico.

---

[5] FILLOY & ROJANO e GALLARDO & ROJANO.

Estes alunos selecionados (após uma etapa inicial) apresentam baixo nível de rendimento nas relações pré-algébricas. Com estas entrevistas os autores conseguiram identificar áreas de dificuldades comuns na aprendizagem da Álgebra destacando os números negativos como um grande obstáculo às equações.

Estes resultados foram importantes em nosso estudo para que selecionássemos problemas e atividades que evitassem esses obstáculos, uma vez que nosso estudo visava diagnosticar as possíveis contribuições do jogo codificação-decodificação. Acreditamos em que, tendo eliminado possíveis obstáculos, as análises dos resultados do jogo se tornariam mais precisas.

FILLOY & ROJANO (1989) discutem novamente o projeto “Aquisição da Linguagem Algébrica” (acima citado). Aqui estão mais focados em estudar a transição entre Aritmética e Álgebra, o que eles nomeiam por “pré-Álgebra”. Para tal, levantam duas posições de ensino. A posição mais comum, baseada no modelo de Viète (segundo os autores), apresenta as regras algébricas e suas aplicações que posteriormente serão utilizadas na resolução de problemas. A segunda posição propõe modelar situações de um contexto familiar fazendo disto um ponto de partida para a construção de significados algébricos. E foi esta segunda posição que os autores optaram por utilizar, lançando mão de dois modelos – o da balança de dois pratos e o geométrico.

As conclusões obtidas foram que se os modelos não são bem explorados e discutidos e, se após o estudo das manipulações desse modelo o professor não instruir os alunos a abstraírem as operações possíveis, o trabalho pode ser prejudicado e gerar bloqueios que atrapalharão o completo desenvolvimento da linguagem algébrica. Por isso, apontam que são necessárias instruções, por parte dos professores, nos pontos principais desencadeados durante os períodos inicias da aquisição da linguagem algébrica com a utilização de modelos.

Este último apontamento dos autores nos estimulou a refletir sobre a segunda fase da nossa intervenção de ensino, na qual procuramos desenvolver atividades que permitam uma aproximação entre o jogo codificação-decodificação e a álgebra propriamente dita.

### *2.3.4 KIERAN*

KIERAN (1992) retoma pesquisas relacionadas com as questões de conteúdo, ensino e aprendizagem da Álgebra e como estas questões contribuem no que tange às dificuldades que os alunos encontram no seu estudo. Apresenta uma análise histórica do desenvolvimento algébrico, descreve os conteúdos da Álgebra e as exigências psicológicas que estes conteúdos requerem dos alunos. Fornece uma breve visão sobre o ensino da disciplina e discute descobertas de pesquisas quanto a aprendizagem e o ensino da mesma.

Como resultados destas pesquisas relatadas pela autora, destacamos as dificuldades dos alunos em conceituarem os objetos algébricos, o não tratar a igualdade como um símbolo da simetria e a inabilidade para traduzir problemas em equações. Dentre suas propostas para solucionar os problemas educacionais algébricos quanto a aprendizagem, ensino e currículo, sugere que se enfatize atividades que propiciem o desenvolvimento da Álgebra ferramenta e tornem claras as transições ferramenta e objeto[6].

Tais resultados e sugestões nos auxiliaram a refletir sobre a elaboração dos instrumentos diagnósticos e intervenção de ensino, visando abranger estas duas visões da Álgebra – ferramenta e objeto – e não somente a de objeto manipulativo como é comumente apresentada nos livros didáticos e no ensino.

Em KIERAN (1994) são apresentados os resultados de uma experiência que a autora realizou durante três meses com seis alunos da 7ª série. Sua questão de pesquisa era *“Como os alunos vêem as equações e a resolução de equações na fase inicial do aprendizado de álgebra?”* (KIERAN, 1994, p.105). Com base nos resultados obtidos ela classificou duas abordagens distintas, uma que chamou de abordagem aritmética, na qual os alunos tinham por foco as operações dadas, afirmando que as letras eram números. A outra que chamou de abordagem algébrica, na qual os alunos apresentavam como foco as operações inversas. Conclui seu trabalho sugerindo aos professores que o processo de ensino da Álgebra poderia se iniciar na escola elementar e que levar em conta essas duas abordagens para a aprendizagem algébrica traria um ensino melhor sucedido.

KIERAN (1997) discute principalmente a aprendizagem de funções e suas variáveis como parâmetros, ligadas ao ensino da Álgebra enquanto generalizadora da aritmética. Levanta as idéias de Sfard e sua maneira de conceber as noções matemáticas, como objeto (estrutural) e como processo (operacional), além de seu modelo tri-fase – interiorização, condensação e reitificação. Essas idéias de Sfard também são discutidas por KIERAN (1992) de

---

[6] Os termos ferramenta e objeto não são utilizados pela autora, e sim por nós.

uma maneira mais detalhada. Apresenta relatos de pesquisas sobre o ensino da Álgebra com o auxílio do computador e alguns de seus resultados como, por exemplo, a de que os alunos não usam a Álgebra como ferramenta útil para traduzir problemas em equações, apesar de serem tecnicamente competentes nas manipulações algébricas.

Essa última conclusão reforçou nossa idéia de iniciar o trabalho algébrico pela codificação de problemas procurando, desta forma, primeiro propiciar oportunidades para que se iniciasse a construção de significados aos objetos algébricos e, somente depois, se deparar com o trabalho manipulativo.

# CAPÍTULO 3

# METODOLOGIA

## 3.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo irá relatar a metodologia de nosso estudo de campo. Inicialmente descreveremos o método de pesquisa utilizado que, no nosso caso, trata-se de uma variante do estudo experimental clássico (Rudio, 1979), o qual envolve um grupo experimental e um grupo de controle. Em seguida, descreveremos o universo de estudo e os grupos de pesquisa. Apresentaremos um desenho geral do experimento e descreveremos as suas seis etapas que envolvem os instrumentos diagnósticos, a escolha por emparelhamento dos grupos de pesquisa e a intervenção de ensino.

## 3.2 MÉTODO DE PESQUISA

Nossa pesquisa trata-se de uma variante do estudo experimental clássico (Rudio,1979), o qual envolve um grupo experimental e um grupo de controle e três testes – pré, intermediário e pós.

Os grupos foram escolhidos por emparelhamento de resultados obtidos no teste inicial de maneira a aproximá-los ao máximo para iniciarmos a intervenção. Os dois grupos são compostos por alunos da 6ª série do Ensino Fundamental II e ambos são considerados, pela professora das classes, medianos em relação às médias e notas, não havendo fator que a auxilie a distinguir um ou outro como mais forte (ou fraco).

Assumimos como hipótese de pesquisa que o jogo codificação-decodificação auxilia na aquisição e construção de significados para a linguagem algébrica, por isso o jogo foi o nosso fator de intervenção no grupo experimental e não foi aplicado no grupo de controle, o qual recebeu apenas instruções de introdução à Álgebra pelos métodos comuns apresentados em muitos livros didáticos.

Após a aplicação do pós-teste, fizemos as tabulações das médias obtidas em cada grupo nos três instrumentos diagnósticos e, então, prosseguimos com análises sobre os resultados, diagnosticando se o jogo realmente proporciona um maior sucesso no trabalho inicial com a linguagem algébrica.

## 3.3 O UNIVERSO DE ESTUDO

Nosso estudo foi desenvolvido em uma escola pública da rede municipal da cidade de São Paulo, localizada em Santo Amaro, bairro da zona Sul. Essa escola oferece todas as séries do Ensino Fundamental em quatro períodos possuindo 40 salas de aulas, o que permite atender a, aproximadamente, 1.400 alunos. Dois motivos nos levaram a escolhê-la: primeiro porque é uma representante da instituição que mais recebe alunos, uma vez que trata-se do ensino público o qual cerca de 87% da população brasileira estuda[7], o que aproximará mais nosso estudo da realidade escolar brasileira. Respeitando o primeiro motivo, o segundo foi pragmático, já que trata-se de uma escola que nos recebeu com grande atenção e interesse.

Trabalhamos com duas 6as séries do Ensino Fundamental II. Cada uma dessas séries possuía entre 35 e 40 alunos. Uma delas consistiu do nosso grupo experimental (GE), com o qual desenvolvemos nossa intervenção de ensino, sem a presença da professora de classe. A outra serviu de grupo de controle (GC)[8] recebendo instrução sobre o conteúdo com a professora de classe, sem a nossa presença, e só participou da aplicação de nossos instrumentos diagnósticos (pré, intermediário e pós-testes).

A escolha pela 6ª série deveu-se ao fato de que é nela que o conteúdo algébrico, propriamente dito, é trabalhado. Embora seja comum nas séries anteriores, o ensino da Álgebra já comece por meio de trabalhos com generalizações. De fato, o PCN (1997) propõe uma introdução superficial da Álgebra iniciando pelas generalizações, mas sugerem que a Álgebra seja trabalhada apenas a partir da 6ª série.

---

[7] http://www.inep.gov.br/basica/censo/default.asp em 17/11/03.
[8] A partir deste momento estaremos nos referindo ao grupo experimental como GE e ao grupo de controle como GC.

### 3.3.1 *DESCRIÇÃO DOS GRUPOS DE PESQUISA*

Nosso grupo de pesquisa, como já foi dito, era composto por duas salas do Ensino Fundamental II, ambas da 6ª série, que constituem o GE e o GC.

As salas foram escolhidas após a aplicação do pré-teste, o qual foi realizado com todas as cinco 5ªs séries da escola no final do ano letivo anterior a aplicação da intervenção de ensino (novembro de 2002). Selecionamos para participar do estudo as duas classes que apresentaram percentual de acertos muito próximos. Destas duas sorteamos a que viria a ser o GE e o GC.

O GE era composto por 36 alunos na etapa em que aplicamos o pré-teste. Já no início de nossa intervenção tivemos quatro alunos os quais saíram da escola e cinco novos que entraram no grupo. Optamos por não aplicar o pré-teste a estes novos alunos a fim de não comprometer nossos resultados, uma vez que os demais alunos haviam feito o mesmo teste no ano letivo anterior, há aproximadamente quatro meses. Por isso estes cinco novos alunos não fizeram parte de nossos sujeitos de pesquisa, mas participaram de todas as etapas do estudo. No decorrer do experimento, houve alunos que faltaram em um ou outro encontro e por este motivo também deixaram de fazer parte de nossos sujeitos de pesquisa, mas continuaram participando das atividades propostas. Concluímos o trabalho com 20 sujeitos para análise. Estes 20 sujeitos participaram de todos os quinze encontros, sendo três destinados a resolução dos instrumentos diagnósticos e doze para a intervenção de ensino.

O GC era composto por 36 alunos na etapa do pré-teste. Sofreu alterações na virada do ano letivo com a saída de 11 alunos e a entrada de outros 10 que, assim como no GE, participaram das outras etapas do estudo, mas não entraram para a análise como sujeitos de pesquisa. Os alunos que faltaram na aplicação dos outros instrumentos diagnósticos (intermediário e pós) também foram eliminados de nossa contagem. Por grande coincidência, fechamos este grupo com 20 sujeitos para análise, igualmente ao GE. O grupo participou dos quinze encontros, três destinados a resolução de nossos instrumentos diagnósticos e doze encontros de intervenção de ensino com a professora de classe seguindo a introdução à Álgebra segundo o livro adotado.

## 3.4 DESENHO DO EXPERIMENTO

Apresentaremos o desenho do experimento cronologicamente, na seqüência em que foi desenvolvido. O quadro a seguir é um quadro resumo para que o leitor tenha uma visão geral do experimento como um todo. Após, discutiremos cada uma destas etapas.

**ETAPAS DO ESTUDO**

**ETAPA 1** – Pré-teste

Aplicado nas cinco turmas de 5ª série existentes na escola no final do ano letivo anterior ao experimento. A aplicação foi feita coletivamente com resolução individual.

**ETAPA 2** – Escolha por emparelhamento dos grupos de estudo

Foram corrigidos os testes das cinco turmas e escolhidas aquelas que obtiveram média de scores mais similares (menos de 5% de diferença entre as médias de acerto geral das turmas).

**ETAPA 3** – Fase I da intervenção de ensino

Teve início no segundo mês do ano letivo e com duração de 8 encontros. O GE teve o jogo codificação-decodificação e o GC aulas sobre introdução a Álgebra com a professora de classe.

**ETAPA 4** – Teste Intermediário

Foi aplicado aos dois grupos, GE e GC, simultaneamente, sem a presença da professora de classe. A aplicação foi coletiva com resolução individual.

**ETAPA 5** – Fase II da intervenção de ensino

Nesta fase os alunos do GE receberam fichas de atividades que visavam destacar relações entre o jogo codificação-decodificação e as equações do 1º grau. O GC continuou com as aulas de Álgebra ministradas pela professora de classe.

**ETAPA 6** – Pós-teste

Este teste também foi aplicado aos dois grupos, GE e GC simultaneamente, sem a da professora de classe. A aplicação foi coletiva com resolução individual.

**Quadro 3.1:** Desenho Geral do Experimento.

## 3.4.1 ETAPA 1 – PRÉ-TESTE

Descreveremos a seguir o pré-teste desde sua elaboração, com a aplicação de dois estudos pilotos, até sua versão final e como ocorreu sua aplicação.

### *3.4.1.1 Elaboração*

A elaboração do teste passou por quatro momentos: a escolha das questões, o primeiro estudo piloto, o segundo estudo piloto e finalmente o pré-teste.

A escolha das questões iniciou-se numa pesquisa a alguns livros didáticos de Matemática de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental, selecionados arbitrariamente de acordo com o que nos estava disponível. Buscamos modelos de questões as quais aparecessem com maior freqüência nos livros e também que formassem um nível de crescimento de dificuldades – fácil, médio e difícil. Selecionamos algumas e criamos outras para analisarmos mais detalhadamente. Dentre essas selecionadas, em reunião de orientação, escolhemos oito para constituir o nosso primeiro estudo piloto.

O primeiro estudo piloto continha oito questões, das quais as quatro primeiras eram apresentadas em linguagem simbólica (equações) e as outras quatro apresentadas em linguagem natural (texto). A apresentação foi feita em duas folhas de papel impresso, com os versos reservados para rascunhos. Foi aplicado a duas alunas do Ensino Fundamental de escola particular, uma cursando a 5ª série e outra a 6ª, ambas não haviam ainda iniciado a aprendizagem formal da Álgebra. Estas receberam as folhas com os testes impressos e canetas, e deveriam resolvê-los individualmente, para isso tomamos o cuidado de acomodá-las separadamente.

A seguir apresentamos um quadro com esse primeiro estudo piloto:

| | |
|---|---|
| 1) A + 112 = 286 | 2) 7 x B = 161 |
| 3) 7 x N + 33 = 152 | *4) 8 x M + 2 = 6 x M + 10* |
| 5) Tia Marina é a madrinha de batismo de Alessandra, uma garota muito simpática. Tia Marina tem 7 anos menos que o triplo da idade de Alessandra. Se a soma das idades das duas é 39, então qual é a idade de Alessandra? | 6) André joga duas partidas no videogame. Joga uma primeira e depois uma segunda. Na segunda partida ele perde 126 pontos. Depois dessas duas partidas, ele verificou que havia ganhado 237 pontos no total. O que aconteceu na primeira partida? Ele ganhou ou perdeu? Quanto? |
| 7) Pensei em um número. Multipliquei por 7. Subtraí 49. Deu 112. Descubra o número que pensei. | 8) Vamos ajudar El Habib a dividir sua herança entre seus três filhos. Ele tem 45 camelos e quer dividir de maneira que o filho do meio receba o dobro do caçula e o filho mais velho receba o triplo do caçula mais três. Quantos camelos receberá cada filho? |

**Quadro 3.2:** Primeiro Estudo Piloto **-** Formato apresentado apenas para uma boa visualização do leitor. Na aplicação, apresentou-se em duas folhas.

Solicitamos às alunas que procurassem resolver todas as questões, mesmo as que não tinham certeza quanto às regras de resolução. Pedimos que buscassem justificar todas as suas respostas, mesmo que para isso apresentassem a solução sob a forma da linguagem natural. Ao final de 35 minutos as alunas terminaram o teste. A aluna da 5ª série apresentou 50% de acertos, acertando as questões 1, 2, 3 e 6. A aluna da 6ª série apresentou 75% de questões corretas, sendo elas as questões 1, 2, 3, 6, 7 e 8.

Baseadas nestes resultados, constatamos a necessidade de acrescentar mais duas questões, uma em cada grupo, para termos um número mais preciso ao calcularmos nossas estimativas de acertos e erros.

O segundo estudo piloto constava de dez questões. Cinco apresentadas em linguagem simbólica e cinco em linguagem natural. Foi aplicado a cinco alunos do Ensino Fundamental, dos quais quatro eram de escola pública – dois de 5ª série e dois de 6ª – todos considerados alunos de rendimento mediano. O outro aluno era de escola particular, 5ª série, considerado um bom aluno em rendimento escolar.

A seguir apresentamos um quadro com nosso segundo estudo piloto:

| | |
|---|---|
| 1) A + 112 = 286 | 2) 7 x B = 161 |
| 3) 7 x N + 33 = 152 | 4) 8 x M + 2 = 6 x M + 10 |
| 5)3 x (A + 13) – 2 x A = 5 x ( 10 – A) + 19 | 6) Tia Marina é a madrinha de batismo de Alessandra, uma garota muito simpática. Tia Marina tem 7 anos menos que o triplo da idade de Alessandra. Se a soma das idades das duas é 39, então qual é a idade de Alessandra? |
| 7) André joga duas partidas no videogame. Joga uma primeira e depois uma segunda. Na segunda partida, ele perde 126 pontos. Depois dessas duas partidas, ele verificou que havia ganhado 237 pontos no total. O que aconteceu na primeira partida? Ele ganhou ou perdeu? Quanto? | 8) A “JJR” é uma banda formada pelos irmãos João, Júlia e Renato, cujas idades somam 87 anos. Júlia tem 7 anos a mais que a metade da idade de Renato e João, 9 anos a menos que o dobro da idade de Júlia. Quantos anos têm cada um deles? |
| 9) Pensei em um número. Multipliquei por 7. Subtraí 49. Deu 112. Descubra o número que pensei. | 10) Três sócios vão dividir o lucro de uma empresa, que foi de R$ 897,00, proporcionalmente a quantia que cada um investiu. Mário vai receber o triplo de Joaquim e Paulo receberá R$ 123,00 a menos que Joaquim. Quanto receberá cada sócio? |

**Quadro 3.3:** Segundo Estudo Piloto – Formato apresentado apenas para uma boa visualização do leitor. Na aplicação, apresentou-se em quatro folhas*.*

Verificamos 100% de acertos nas questões 1 e 2. Nas questões 3 e 9 tivemos 60% de acertos. A questão 7 apresentou 40% de acertos. As questões 4, 5 e 8 apresentaram 20% de acertos cada uma e as questões 6 e 10 não obtiveram nenhum acerto.

Com base nos resultados deste segundo piloto, reformulamos e concluímos nosso pré-teste. Optamos por não incluir equações com apenas um passo para a solução (como: *A + 112 = 286 ou 7 x B = 161*), pois os pilotos mostraram que os alunos dominam este tipo de atividade que é geralmente abordada nas séries anteriores do Ensino Fundamental. As demais questões foram mantidas e acrescentamos, no lugar das duas primeiras, duas questões de nível mais complexo.

Assim sendo, o teste no seu formato final, ficou como mostra o quadro abaixo:

| | |
|---|---|
| *1) 7 x N + 33 = 152* | 2) 8 x M + 2 = 6 x M + 10 |
| 3) $12 \times M - 41 - 3 \times M = \frac{30}{2} - 5 \times M$ | 4) $\frac{4 \times P}{4} + 20 - \frac{12}{6} = 50 - \frac{2 \times P}{2}$ |
| 5)3 x (A + 13) – 2 x A = 5 x ( 10 – A) + 19 | 6) Tia Marina é a madrinha de batismo de Alessandra, uma garota muito simpática. Tia Marina tem 7 anos menos que o triplo da idade de Alessandra. Se a soma das idades das duas é 37, então qual é a idade de Alessandra? |
| 7) André joga duas partidas no videogame. Joga uma primeira e depois uma segunda. Na segunda partida, ele perde 126 pontos. Depois dessas duas partidas, ele verificou que havia ganhado 237 pontos no total. O que aconteceu na primeira partida? Ele ganhou ou perdeu? Quanto? | 8) Pensei em um número. Multipliquei por 7. Subtraí 49. Deu 112. Descubra o número que pensei. |
| 9) Três sócios vão dividir o lucro de uma empresa, que foi de R$ 897,00, proporcionalmente a quantia que cada um investiu. Mário vai receber o triplo de Joaquim e Paulo receberá R$ 123,00 a menos que Joaquim. Quanto receberá cada sócio? | 10) A “JJR” é uma banda formada pelos irmãos João, Júlia e Renato, cujas idades somam 87 anos. Júlia tem 7 anos a mais que a metade da idade de Renato e João, 9 anos a menos que o dobro da idade de Júlia. Quantos anos têm cada um deles? |

**Quadro 3.4** Pré-Teste – Formato apresentado apenas para uma boa visualização do leitor. Na aplicação apresentou-se em quatro folhas.

#### *3.4.1.2 O Teste*

Como se verifica no quadro 3.4 acima, o pré-teste continha dez questões as quais estavam divididas em dois grupos: um grupo composto por questões apresentadas em linguagem simbólica – que exploram unicamente as equações do 1º grau – perfazendo um total de cinco questões. Um segundo grupo, também com cinco questões, composto por questões apresentadas em linguagem natural.

Separamos assim em dois grupos para que num momento o aluno pudesse utilizar apenas o raciocínio matemático prático para resolver equações, isto é, aplicasse as técnicas de resolução de equações e, em outro momento, pudesse trabalhar com a conversão de registros (DUVAL, 2003), convertendo o problema da linguagem natural para a linguagem simbólica e, só depois, recorrer às técnicas algébricas de resoluções.

Selecionamos estes dois tipos de questões por serem justamente as questões as quais poderiam propiciar o desenvolvimento descrito acima. Nos preocupamos também em manter a igualdade de questões, cinco, em ambos os momentos.

Com relação às questões apresentadas em linguagem simbólica, queríamos estudar o conhecimento dos alunos sobre resolução de equações e como lidavam com as incógnitas, o que elas lhes representavam.

1) 7 x N + 33 = 152

O objetivo desta questão era estudar se os alunos apresentavam algum raciocínio algébrico e se eles o utilizavam nos procedimentos algorítmicos de resolução de equações.

Trata-se de uma equação a qual poderia ser resolvida por tentativas e refinamentos, desfazendo operações ou pela propriedade da igualdade de dois termos. É uma questão fechada que apresenta uma única solução numérica.

Acreditávamos em que a maioria dos alunos a resolveria de forma intuitiva através de tentativa e refinamento.

Possíveis soluções:

1) Tentativa e refinamento

   Por exemplo, primeira tentativa: N = 10

   7 x 10 = 70

   70 + 33 = 103

   Conclusão: 10 é um valor pequeno.

   Uma nova tentativa deve ser N maior que 10.

   Repete-se a seqüência acima até encontrar a solução correta (N = 17).

2) Desfazendo operações

   152 – 33 = 119

   119 : 7 = 17

   Solução: N = 17.

3) Transposição de termos

   7 x N = 152 – 33

   7 x N = 119

   N = 119 : 7

   N = 17 Solução: N = 17

Nossa expectativa era que nenhum aluno utilizasse o terceiro procedimento de solução, pois ainda não haviam tido contato com o conteúdo algébrico.

2) $8 \times M + 2 = 6 \times M + 10$

Essa equação apresentava o mesmo objetivo da questão anterior. Consideramos uma equação com um grau de dificuldade um pouco maior que a primeira, por necessitar da manipulação de termos algébricos ($8 \times M$ e $6 \times M$), o que ainda era abstrato para quem ainda não havia tido contato com a Álgebra. Tínhamos por expectativa que haveria alguns acertos, porém menos do que na questão 1.

Possíveis soluções:

1) Tentativa e refinamento (como os feitos acima)

2) Transposição de termos

$8 \times M - 6 \times M = 10 - 2$

$2 \times M = 8$

$M = 8 : 2$

$M = 4$ Solução: $M = 4$

Nossa previsão era que o segundo procedimento não fosse utilizado, visto que havia desconhecimento, por parte dos alunos, dos procedimentos de resolução de equações do 1º grau.

3) $12 \times M - 41 - 3 \times M = \frac{30}{2} - 5 \times M$

Nosso objetivo continuava o mesmo das equações anteriores. Esta apresentava um nível de dificuldade maior que a equação 2, porque necessitava da manipulação algébrica entre três termos e apresentava um número natural na forma de fração aparente. Por isso, supomos em que o número de acertos seria zero ou próximo dele.

Possíveis soluções:

1) Tentativa e refinamento
2) Transposição de termos e substituição da fração 30/2 por 15

$12 \times M - 3 \times M + 5 \times M = 15 + 41$

$14 \times M = 56$

$M = 56 : 14$

$M = 4$ Solução: $M = 4$

3) Transposição de termos, fazendo uso do mmc

$$\frac{24 \times M - 82 - 6 \times M = 30 - 10 \times M}{2}$$

$24 \times M - 6 \times M + 10 \times M = 30 + 82$

$28 \times M = 112$

$M = 112 : 28$

$M = 4$ Solução: $M = 4$

Nossa expectativa era a seguinte: nenhum aluno usaria os procedimentos 2 ou 3 pelos mesmos motivos levantados anteriormente.

4) $\frac{4 \times P}{4} + 20 - \frac{12}{6} = 50 - \frac{2 \times P}{2}$

Nosso objetivo para esta questão ainda se repetia, estudar se os alunos apresentavam algum raciocínio algébrico e se eles utilizavam algum procedimento para resolver equações. Esta apresentava um nível de dificuldade maior que a equação 3, pois necessitava da manipulação algébrica de dois termos e apresentava um número natural e dois termos algébricos na forma de frações aparentes. Por isso, acreditávamos que o número de acertos seria nulo.

Soluções possíveis:

1) Tentativa e refinamento

2) Transposição de termos e substituição das frações aparentes

$P + 20 - 2 = 50 - P$

$P + P = 50 - 20 + 2$

$2 \times P = 32$

$P = 32 : 2$

$P = 16$ Solução: $P = 16$

3) Transposição de termos, fazendo uso do mmc

$$\frac{12 \times P + 240 - 24 = 600 - 12 \times P}{12}$$

$12 \times P + 12 \times P = 600 - 240 + 24$

$24 \times P = 384$

$P = 384 : 24$

$P = 16$ Solução: $P = 16$

5)$3 \times (A + 13) - 2 \times A = 5 \times ( 10 - A) + 19$

Nosso objetivo nesta equação, como nas anteriores, era analisar se os alunos apresentavam algum raciocínio algébrico e se eles o utilizavam na resolução de equações. Esta apresentava um nível de dificuldade maior que todas as anteriores, pois necessitava da aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e da manipulação de termos algébricos. Assim, supomos em que o número de acertos seria nulo.

Possíveis soluções:

1) Tentativa e refinamento

2) Transposição de termos

3 x A + 39 – 2 x A = 50 – 5 x A + 19

3 x A – 2 x A + 5 x A = 50 + 19 – 39

6 x A = 30

A = 30 : 5

A = 6 Solução: A = 6

Mais uma vez, fizemos uma previsão de que o segundo procedimento não seria utilizado por nenhum aluno.

6) Tia Marina é a madrinha de batismo de Alessandra, uma garota muito simpática. Tia Marina tem 7 anos menos que o triplo da idade de Alessandra. Se a soma das idades das duas é 37, então qual é a idade de Alessandra?

O objetivo desta questão era analisar se os alunos apresentavam algum raciocínio algébrico e se o utilizavam na resolução de problemas. Este problema poderia ser resolvido convertendo-o em uma equação que relacione a primeira personagem com a segunda. Também poderia ser resolvido por tentativa e refinamento ou desfazendo operações.

Possíveis soluções:

1) Tentativa e refinamento

2) Desfazendo operações

$37 + 7 = 44$

$44 : 4 = 11$ Resposta: Alessandra tem 11 anos.

3) Convertendo o problema em equação e resolvendo pela transposição de termos

$x + 3x - 7 = 37$

$4x = 37 + 7$

$4x = 44$

$x = 44 : 4$

$x = 11$ Resposta: Alessandra tem 11 anos.

Previmos que o primeiro procedimento de solução seria o mais utilizado, o segundo deveria aparecer com uma pequena freqüência e o terceiro não deveria aparecer em nenhuma resposta. Também tínhamos a expectativa de que esta questão teria um número de acertos considerável.

7) André joga duas partidas no videogame. Joga uma primeira e depois uma segunda. Na segunda partida ele perde 126 pontos. Depois dessas duas partidas, ele ganhou 237 pontos. O que aconteceu na primeira partida? Ele ganhou ou perdeu? Quanto?

O objetivo desta questão, mais uma vez, era analisar se os alunos apresentavam algum raciocínio algébrico e se o utilizavam na resolução de problemas. Este problema poderia ser solucionado com uma equação, menos complexa que a anterior. Também poderia ser resolvido através de uma operação aritmética, caso se tomasse o cuidado de não confundir a idéia de perda com subtração (neste problema).

Possíveis soluções:

1) Usando operação aritmética

126 + 237 = 363

2) Convertendo em equação e resolvendo pela transposição de termos

x – 126 = 237

x = 237 + 126

x = 363 Resposta: Na primeira partida ele ganhou 363 pontos.

Nossa expectativa era que um grande número de alunos acertasse esta questão e que todos utilizassem o primeiro procedimento de solução.

8) Pensei em um número. Multipliquei por 7. Subtraí 49. Deu 112. Descubra o número que pensei.

O objetivo desta questão era o mesmo das questões anteriores. Lembramos que este problema apresentou um grande número de acertos em nossos estudos pilotos. Poderia ser resolvido convertendo-o em uma equação, por tentativa e refinamento ou desfazendo as operações.

Possíveis soluções:

1) Tentativa e refinamento

2) Desfazendo operações

112 + 49 = 161

161 : 7 = 23 Resposta: Pensou no número 23.

3) Usando equação e transposição de termos

7n – 49 = 112

7n = 112 + 49

7n = 161

n = 161 : 7

n = 23 Resposta: Pensou no número 23.

9) Três sócios vão dividir o lucro de uma empresa, que foi de R$ 897,00, proporcionalmente a quantia que cada um investiu. Mário vai receber o triplo de Joaquim e Paulo receberá R$ 123,00 a menos que Joaquim. Quanto receberá cada sócio?

Nosso objetivo para este problema ainda se repete, estudar se os alunos apresentavam algum raciocínio algébrico e se o utilizavam na resolução de problemas. Este apresentava um nível de dificuldade maior que os anteriores, pois era composto por relações entre três personagens. As possíveis soluções poderiam provir de tentativas e refinamentos ou da resolução de uma equação que acreditávamos ser improvável e por isso esta era uma questão cujo índice de acertos esperado era nulo, pois mesmo as tentativas são complexas.

Possíveis soluções:

1) Tentativa e refinamento
2) Convertendo em equação e resolvendo pela transposição de termos

n + 3n + n – 123 = 897

5n = 897 + 123

5n = 1020

n = 1020 : 5

n = 204

Resposta: Joaquim receberá R$ 204,00, Paulo R$ 81,00 e Mário R$ 612,00.

10) A “JJR” é uma banda formada pelos irmãos João, Júlia e Renato, cujas idades somam 87 anos.Júlia tem 7 anos a mais que a metade da idade de Renato e João, 9 anos a menos que o dobro da idade de Júlia. Quantos anos têm cada um deles?

Esta questão é semelhante à questão 9, tanto em objetivos quanto em dificuldades e possíveis soluções. Também o índice de acertos esperado era semelhante, ou seja, nulo.

Possíveis soluções:

1) Tentativa e refinamento

2) Convertendo em equação e resolvendo pela transposição de termos

$$n + \frac{n}{2} + 7 + 2\left(\frac{n}{2} + 7\right) - 9 = 87$$

$$2n + n + 14 + 2n + 28 - 18 = 174$$

$$2n + n + 2n = 174 - 14 - 28 + 18$$

$$5n = 150$$

$$n = 150 : 5$$

$$n = 30$$

Resposta: Júlia tem 22 anos, Renato 30 anos e João 35 anos.

Nossa expectativa era que nenhum aluno apresentasse o segundo procedimento e que se algum aluno resolvesse o problema, o que achávamos improvável, seria pelo procedimento de tentativa e refinamento.

#### *3.4.1.3 A Aplicação do Teste*

A aplicação do pré-teste teve por objetivo avaliar os conceitos espontâneos os quais os alunos traziam consigo, uma vez que até o final da 5ª série eles não haviam realizado ainda operações algébricas como as solicitadas no teste. Este teste foi aplicado coletivamente, mas resolvido individualmente por cada um dos participantes. Tomamos o cuidado de planejar sua distribuição de maneira alternada, para tentar garantir essa individualidade nas resoluções. Assim, para metade dos alunos o teste iniciava-se pelas questões apresentadas em linguagem simbólica e para a outra metade pelas questões apresentadas em linguagem natural.

Um outro fator importante com o qual nos preocupamos foi com o fato de oferecer a maior tranqüilidade possível aos alunos, para responder ao teste. Para tanto o momento da aplicação foi antecedido por uma conversa na qual explicamos o objetivo do nosso trabalho e de sua importância no âmbito da pesquisa. Enfatizamos que eles não se preocupassem com acertos e erros ou notas, pois não era nosso intuito apontar quem acertou ou errou e sim entender quais eram as estratégias e dificuldades que os alunos encontravam ao tentarem resolver problemas matemáticos. Por isso, era muito importante que eles ficassem bem à vontade, procurassem não deixar questões sem resolver e que mantivessem todos os cálculos utilizados nas folhas do teste. Solicitamos, ainda, a resolução do teste à caneta e caso quisessem anular algo bastava riscá-lo com um X. O tempo de aplicação do teste, em todas as salas, variou entre 40 e 60 minutos.

O pré-teste foi aplicado por nós em algumas salas e por uma pesquisadora, que muito nos auxiliou, em outras.

### 3.4.2 ETAPA 2 – ESCOLHA POR EMPARELHAMENTO DOS GRUPOS DE PESQUISA

Após a aplicação do pré-teste nas cinco 5as séries da escola, iniciamos sua tabulação para, em seguida, emparelhar dois grupos que apresentassem resultados próximos, com média de scores similares e menor porcentagem de diferença possível. Feita a escolha dos dois grupos que fariam parte de nosso estudo, fizemos um sorteio para decidir quem viria ser o GE e o GC. Finalmente partimos para a terceira etapa do experimento.

### 3.4.3 ETAPA 3 – FASE I DA INTERVENÇÃO DE ENSINO

Descreveremos a intervenção segundo cada grupo, pois as intervenções do GE foram diferentes das intervenções do GC. Como já foi dito anteriormente, a primeira fase da intervenção constou de oito encontros. A seguir descreveremos cada um desses encontros:

Lembramos que a professora de classe não participou em nenhum dos encontros no GE – nem nas intervenções nem nos testes. Também nós não participamos de sua intervenção no GC, apenas aplicamos os testes sem a presença da mesma. Tivemos contato apenas com seu diário de classe e cadernos de alunos deste grupo.

#### *3.4.3.1 Grupo Experimental*

Após o primeiro encontro, utilizado para a aplicação do pré-teste, iniciamos a primeira fase de nossa intervenção de ensino com o grupo experimental. Essa primeira fase era constituída de oito encontros e estes subdivididos em dois momentos, cada qual com quatro encontros. Cada um destes momentos trabalhou o jogo codificação-decodificação seguindo a ordem: codificação, decodificação, recodificação e discussão geral.

<u>Encontro 1:</u> Codificação Espontânea

A classe foi dividida em dois grandes grupos, A e B, e esses grupos, por sua vez, foram subdivididos em duplas, as quais foram formadas de maneira a não agrupar alunos que fizeram o pré-teste no ano anterior, com alunos os quais não o fizeram. Estes últimos, embora tenham realizado todas as atividades da intervenção, não foram aproveitados como sujeitos da pesquisa. Dentre os alunos que fizeram o pré-teste procuramos agrupá-los de acordo com a freqüência de presença obtida no ano letivo de 2002, isto para buscar garantir o acompanhamento mais próximo (no sentido de obter maiores observações) das duplas mais assíduas.

Cada dupla recebeu caneta e três folhas grampeadas, sendo duas em branco e uma impressa com um problema, sendo o problema do grupo A diferente do problema do grupo B. Esses primeiros problemas poderiam ser solucionados aritmeticamente e foram assim escolhidos por se tratarem de atividades comuns a alunos dessa série.

A seguir apresentamos os problemas[9] deste encontro:

| |
|---|
| PROBLEMA 1-A: (PARA O GRUPO A)<br>SEU PEDRO COMPROU 8 CAMISETAS E 5 CALÇAS. PAGOU, EM DINHEIRO, R$ 150,00. CADA CALÇA CUSTOU R$ 13,00 E ELE RECEBEU DE TROCO R$ 37,00. QUANTO CUSTOU CADA CAMISETA? |

Este problema poderia ser solucionado com a resolução de três operações – uma multiplicação, uma subtração e uma divisão.

Uma possível solução:

13 x 5 = 65
65 + 37 = 102
150 – 102 = 48
48 : 8 = 6

R: Cada camiseta custou R$ 6,00.

Após chegarem à solução do preço de cada camiseta e a discutirem, é que se iniciou a intervenção com a codificação do problema propriamente dito.

[9] Alguns destes problemas foram retirados de NOBRE (1996) e adaptados monetariamente por nós.

PROBLEMA 1-B: (PARA O GRUPO B)

CINCO PESSOAS FIZERAM UMA "VAQUINHA" PARA JANTAR. TODOS DERAM A MESMA QUANTIA. COM O DINHEIRO DA "VAQUINHA" COMPRARAM 2 PIZZAS E 10 REFRIGERANTES. CADA PIZZA CUSTOU R$ 7,50 E CADA REFRIGERANTE R$ 0,50. SOBRARAM R$ 2,50. COM QUANTOS REAIS CADA PESSOA ENTROU NA "VAQUINHA"?

Este problema envolve a situação monetária e, por este motivo, não acreditávamos que as operações com os decimais fossem vistas como dificuldades, mas se essas dificuldades com os cálculos surgissem, auxiliaríamos.

Uma possível solução:

7,50 x 2 = 15,00

0,50 x 10 = 5,00

15,00 + 5,00 + 2,50 = 22,50

22,50 : 5 = 4,50

R: Cada pessoa entrou na "vaquinha" com R$ 4,50.

Esse encontro dividiu-se em dois momentos: o momento de resolver o problema e o momento de codificar o problema. No momento da resolução ficamos preocupadas em garantir que todas as duplas conseguissem resolvê-los realizando as operações necessárias para chegar à solução. Não tivemos muitas dificuldades nesta passagem, porque os alunos, na sua maioria, já haviam trabalhado com problemas semelhantes nas séries anteriores. Garantida a resolução, tivemos a preocupação de discutir o significado de cada um dos termos das operações, o que cada número estava representado a partir do enunciado do problema.

Quanto as nossas interferências, elas aconteceram sempre com vistas a auxiliar os alunos na busca da solução. Assim, sempre que eles nos procuravam pedindo ajuda, fazíamos questões do tipo: “Qual é a operação que você vai fazer aqui?”, “Por quê?”, “O que você acha dessa conta?”, “Vai diminuir ou vai aumentar?”.

Da mesma forma, quando as duplas já tinham resolvido o problema e estavam criando uma codificação para o mesmo nós ainda fazíamos alguma interferência, mas desta vez com menor freqüência. Estivemos atentas para garantir que ao final todas as duplas tivessem criado um código. Nossos questionamentos para as duplas eram no sentido de promover a reflexão e o entendimento do significado dos termos das operações realizadas. Em nenhum momento interferimos com repostas ou afirmações que levassem à solução. Nossas perguntas foram do tipo: “Por que vocês fizeram essa conta?”, “O que este valor representa?”, “E esse?”, “Como vocês poderiam representar essa conta em forma de código sem usar os números do problema?”, “O que essa letra (ou desenho) está representando no código?”, “O que você acha de escrever isso para que a outra dupla saiba o que a letra está representando?”, esta última atentando assim para a necessidade de uma legenda para o código.

Insistimos com os alunos para que tudo fosse feito em sigilo e que nenhuma dupla visse o trabalho da outra. Gravamos e observamos mais atentamente algumas duplas, aquelas mais assíduas de acordo com os diários de classe do ano letivo anterior. Ao final do encontro recolhemos todas as folhas utilizadas pelos alunos para análise e as duplas foram solicitadas a “passar a limpo” o código final para utilizarmos no encontro seguinte.

Encontro 2: Decodificação

Tivemos a mesma divisão de grupos e duplas do encontro anterior e, com a ocorrência de algumas faltas, fizemos um rearranjo em novas duplas. Cada dupla recebeu um novo problema acompanhado de folhas em branco numeradas, canetas e os códigos elaborados por outra dupla. O grupo A recebeu um problema semelhante ao que o grupo B recebeu no encontro 1 para que pudessem utilizar o código elaborado pela dupla desse grupo e, de posse dele, buscar solucionar o novo problema. O mesmo ocorreu com o grupo B que recebeu um problema semelhante ao resolvido pelo grupo A no encontro 1 juntamente com um código elaborado por uma das duplas desse grupo.

As duplas foram solicitadas a resolver o problema recebido utilizando o código criado pelo grupo oposto e procuramos interferir o menos possível, auxiliando apenas, quando necessário, na leitura das legendas para relacioná-las com os códigos. Ao final recolhemos todas as folhas para análise e solicitamos que anotassem as dificuldades encontradas na leitura e aplicação dos códigos.

A seguir apresentamos os problemas do encontro 2:

PROBLEMA 2 - A : (PARA O GRUPO A)

SETE PESSOAS FIZERAM UMA “VAQUINHA” PARA JANTAR. TODOS DERAM A MESMA QUANTIA. COM O DINHEIRO DA “VAQUINHA” COMPRARAM 3 PIZZAS E 15 REFRIGERANTES. CADA PIZZA CUSTOU R$ 8,40 E CADA REFRIGERANTE R$ 0,60. SOBRARAM R$ 2,20. COM QUANTOS REAIS CADA PESSOA ENTROU NA “VAQUINHA”?

O problema 2A era semelhante ao 1B anteriormente utilizado, se diferenciava apenas quanto aos valores. Os procedimentos para a resolução são os mesmos anteriormente levantados. Mais uma vez lembramos que, em caso de dificuldades com as operações, nós auxiliaríamos.

Uma possível solução:

8,40 x 3 = 25,20

0,60 x 15 = 9,00

25,20 + 9,00 + 2,20 = 36,40

36,40: 7 = 5,20

R: Cada pessoa entrou na “vaquinha” com R$ 5,20.

| |
|---|
| PROBLEMA 2 - B: (PARA O GRUPO B)<br>DONA ROBERTA COMPROU OITO CAMISETAS E 7 CALÇAS. PAGOU, EM DINHEIRO, R$ 170,00. CADA CALÇA CUSTOU R$ 9,00 E ELA RECEBEU DE TROCO R$ 11,00. QUANTO CUSTOU CADA CAMISETA? |

O problema 2B era semelhante ao problema 1A e só se diferenciava, como o anterior, quanto aos valores numéricos.

Uma possível solução:

7 x 9 = 63

63 + 11 = 74

170 – 74 = 96

96 : 8 = 12

R: Cada camiseta custou R$ 12,00.

Encontro 3: Recodificação

Este encontro teve por objetivo oferecer oportunidade para que as duplas reavaliassem seus códigos baseados nas dificuldades que surgiram no encontro anterior. Cada dupla do grupo A recebeu o código que elaborou no encontro 1 e o respectivo problema, folhas numeradas em branco, caneta e a relação de dificuldades encontradas pela dupla do grupo B que utilizou este código no encontro 2. O mesmo ocorreu para as duplas do grupo B, que receberam os códigos elaborados no encontro 1 com seus respectivos problemas e as relações de dificuldades encontradas pelas duplas do grupo A no encontro 2. Além disso, receberam também o material necessário para o desenvolvimento da atividade (folhas em branco e caneta).

Todas as duplas receberam instruções para que fizessem as alterações que julgassem necessárias, melhorando assim, seus códigos. Ao final do encontro recolhemos novamente todo o material para lê-los cuidadosamente e poder partir da produção dos alunos para mediar a discussão geral que se realizaria no encontro seguinte.

Encontro 4: Discussão Geral I

Neste encontro se encerrou o primeiro momento desta fase de nossa intervenção de ensino. Nele desenvolvemos uma discussão acerca dos encontros 1, 2, e 3. Iniciamos pedindo que os alunos expusessem suas dúvidas e/ou comentários. Como houve poucas questões nós estimulamos a discussão fazendo nós próprias perguntas sobre o tema. Estas perguntas foram baseadas na análise da resolução dos problemas ao longo dos três encontros anteriores, pois pelas fichas respondidas pelos alunos neles foi possível identificar algumas das dificuldades que eles apresentaram. Assim, fizemos perguntas que envolvessem aqueles tipos de estratégias, sendo elas certas ou erradas, para que elas pudessem vir à luz das discussões. Dessa forma, levantamos questões como: “É possível fazer isso?”, “Se eu fizer assim eu chego à resposta?”, ”Quando eu chego neste ponto qual é o melhor caminho para seguir?”, “Qual é o problema neste tipo de codificação?”, “Qual é a melhor letra para codificar?”, “O que você entende desse código?”, tomando o cuidado de não citar nenhuma dupla especificamente para não constrangê-los.

Encontro 5: Codificação de um novo problema

Neste encontro iniciamos o segundo momento desta primeira fase de nossa intervenção. A seqüência de encontros era semelhante ao primeiro momento, mas os problemas eram diferentes, porém ainda poderiam ser solucionados aritmeticamente, como se pode observar abaixo:

PROBLEMA 3 - A : (PARA O GRUPO A)

DONA VERA COMPROU REFRIGERANTES PARA A FESTA DE QUINZE ANOS DE SUA FILHA, A CLARA. COMPROU 16 EMBALAGENS DE 2,5 LITROS DE COCA-COLA E EMBALAGENS DE 1,5 LITROS DE GUARANÁ, MAS NÃO SE LEMBRA QUANTAS. NO TOTAL, ENTRE COCA-COLA E GUARANÁ, ELA COMPROU 70 LITROS DE REFRIGERANTE. QUANTAS EMBALAGENS DE GUARANÁ ELA COMPROU?

Este problema apresentava o mesmo nível de dificuldade que os anteriores. Os números são naturais ou decimais, e estes últimos são números do dia-a-dia, isto é, números os quais aparecem em situações comuns aos alunos. Por isso, acreditávamos em que não haveria maiores dificuldades com as operações necessárias, mas se elas viessem a ocorrer estaríamos prontas para saná-las e evitar que estas interferissem no trabalho de codificação do novo problema.

Uma possível solução:

16 x 2,5 = 40

70 – 40 = 30

30 : 1,5 = 20

R: D. Vera comprou 20 embalagens de guaraná.

PROBLEMA 3 - B : (PARA O GRUPO B)

O PROFESSOR DE EDUCAÇÃO FÍSICA COMPROU 5 BOLAS DE VÔLEI E 3 DE FUTEBOL, MAS NÃO SE LEMBRA DO PREÇO DA BOLA DE VÔLEI. CADA BOLA DE FUTEBOL CUSTOU R$ 25,00 E, NO TOTAL, ELE GASTOU R$ 188,50. QUANTO CUSTOU CADA BOLA DE VÔLEI?

O problema acima era semelhante ao anterior no que se refere às dificuldades para solucioná-lo.

Uma possível solução:

25,00 x 3= 75,00

188,50 – 75,00 = 113,50

113,50 : 5 = 22,70

R: Cada bola de vôlei custou R$ 22,70.

Cada dupla recebeu um novo problema para codificar, além de folhas em branco e caneta. Receberam as instruções para resolverem os problemas e depois codificá-los.

Preocupamo-nos em garantir a solução aritmética dos problemas em primeiro lugar, pois sem a mesma a codificação não poderia ser iniciada. Para tal, fizemos pequenas interferências como as descritas anteriormente no encontro 1. Também no momento de codificação do problema intervimos em alguns poucos momentos para garantir a criação dos códigos, mas nossas interferências se referiam mais às construções realizadas pelos próprios alunos no encontro 1.

Encontro 6: Decodificação do novo problema

Para este encontro as duplas do grupo A receberam um novo problema (semelhante ao problema do grupo B no encontro 5), folhas em branco, caneta e os códigos elaborados pelas duplas do grupo B no encontro anterior. No grupo B, a distribuição foi semelhante, cada dupla recebeu um problema semelhante ao do grupo A no encontro 5, folhas em branco, caneta e os códigos elaborados pelas duplas do grupo A no encontro anterior.

Tinham por tarefa resolver o novo problema utilizando apenas os códigos elaborados, pelas duplas opostas, no encontro anterior.

A seguir os problemas deste encontro:

PROBLEMA 4 - A : (PARA O GRUPO A)

O PROFESSOR DE EDUCAÇÃO FÍSICA COMPROU 8 BOLAS DE VÔLEI E 6 DE FUTEBOL, MAS NÃO SE LEMBRA DO PREÇO DA BOLA DE VÔLEI. CADA BOLA DE FUTEBOL CUSTOU R$ 28,00 E, NO TOTAL, ELE GASTOU R$ 380,00. QUANTO CUSTOU CADA BOLA DE VÔLEI?

Problema de estrutura semelhante ao 3B só havendo modificação nos valores.

Uma possível solução:

28,00 x 6 = 168,00

380,00 – 168,00 = 212,00

212,00 : 8 = 26,50

R: Cada bola de vôlei custou R$ 26,50.

PROBLEMA 4 - B : (PARA O GRUPO B)

SEU ARI COMPROU REFRIGERANTES PARA A FESTA DE FINAL DE ANO DA EMPRESA ONDE TRABALHA. COMPROU 12 EMBALAGENS DE 2,5 LITROS DE COCA-COLA E EMBALAGENS DE 1,5 LITROS DE GUARANÁ, MAS NÃO SE LEMBRA QUANTAS. NO TOTAL, ENTRE COCA-COLA E GUARANÁ, ELE COMPROU 57 LITROS QUANTAS EMBALAGENS DE GUARANÁ ELE COMPROU?

Este problema só se diferencia do 3A no que se refere aos valores numéricos.

Uma possível solução:

12 x 2,5 = 30

57 – 30 = 27

27 : 1,5 = 18

R: Seu Ari comprou 18 embalagens de guaraná.

Encontro 7: Recodificação do novo problema

Neste encontro, as duplas tiveram a oportunidade de repensarem seus códigos baseadas nas dificuldades encontradas no encontro anterior. Como no encontro 3, receberam o material necessário para refletirem sobre as dificuldades encontradas ou, simplesmente melhorarem alguns aspectos que julgassem importantes. Ao final do encontro recolhemos todo o material produzido pelas duplas, para lê-los e planejar a mediação da discussão geral no encontro 8.

Encontro 8: Discussão Geral II

Este encontro foi o fechamento do segundo e último momento desta primeira fase da intervenção de ensino. Novamente levantamos uma discussão geral sobre o trabalho com os questionamentos já citados no encontro 4 e outros que surgiram neste momento.

Buscamos também comparar as dúvidas e todas as discussões com a primeira fase da intervenção, e também discutir sobre as dificuldades que desapareceram ou surgiram nesta nova fase.

### *3.4.3.2 Grupo de Controle*

O grupo de controle teve a divisão de encontros semelhante a do grupo experimental, quinze encontros de 45 minutos cada. Destes, três foram reservados para aplicação de nossos instrumentos diagnósticos (pré, intermediário e pós-testes) que tiveram a mesma dinâmica de aplicação do GE, aplicação coletiva com resolução individual e distribuição alternada. Foram aplicados por nós e procuramos, em todos eles, enfatizar com os alunos a mesma atmosfera de tranqüilidade solicitada durante as aplicações no GE.

Nos demais encontros, os alunos tiveram aulas normalmente com sua professora de classe. Esta não conhecia nossa seqüência de trabalho para que a resolução dos testes ocorresse da maneira mais natural possível. Foram trabalhados os seguintes conteúdos nestes encontros:

<u>Encontro 1</u>

Neste encontro, a professora iniciou no GC a introdução à Álgebra apresentando o que é uma sentença matemática e quando ela é aberta ou fechada, esta última podendo ser verdadeira ou falsa. Os alunos fizeram um exercício para reconhecimento destas propriedades e este exercício foi corrigido ao final da aula.

Exemplos de sentenças matemáticas trabalhadas pela professora:

1) *$y - 2 = 8$ sentença matemática aberta*
2) *$9 + 1 = 16$ sentença matemática fechada falsa*
3) *$12 - 8 = 4$ sentença matemática fechada verdadeira*

Encontro 2

Dando continuidade ao encontro anterior, foi discutido o que é uma equação (sentença matemática aberta), coeficiente, variável, primeiro e segundo membro de uma equação.

Novamente os alunos realizaram um exercício para reconhecimento das definições acima e o corrigiram ao final da aula.

Exemplo de atividade:

Em $2x + 4 = 18$, os alunos eram solicitados a discriminarem cada membro e identificar quem era o coeficiente e quem era a variável. No caso do exemplo temos: o primeiro membro é $2x + 4$ e o segundo é 18. Em $2x$, o coeficiente é 2 e a variável é $x$.

Encontro 3

Neste momento, foi definido o que é resolver uma equação como "ato de encontrar o valor da letra que transforma a equação em uma sentença verdadeira". Esse valor recebeu o nome de raiz ou solução.

Foi proposto e corrigido um exercício para se verificar se um suposto valor era raiz ou não.

Exemplo da atividade:

*2 é raiz de* $x + 7 = 10$*?*

Encontro 4

Iniciou-se neste encontro a resolução de equações do 1º grau com uma variável. Num primeiro momento, a professora exemplificou o que era e após iniciou o ensino do algoritmo de resolução da mesma. O algoritmo proposto foi o "muda de lado, muda o sinal".

Foram propostas 6 equações para serem resolvidas.

Exemplos de equações propostas:

1) $2x - 9 = 75$

2) $7x = 25 + 2x$

3) $x - 11 = 4 - 3x$

<u>Encontro 5</u>

Foram corrigidas as equações do encontro anterior e propostas novas para serem solucionadas.

<u>Encontro 6</u>

Neste encontro, a professora iniciou o estudo de equações (do 1º grau com uma variável) fracionárias simples e propôs algumas para serem resolvidas. O método apresentado foi o do cálculo do mmc (mínimo múltiplo comum) dos denominadores e após, a aplicação do famoso processo "divide pelo de baixo e multiplica pelo de cima".

Exemplo de equação proposta neste encontro:

$$\frac{x}{7} - \frac{2}{5} = \frac{3x}{5} - \frac{1}{2}$$

<u>Encontro 7</u>

Aqui foram corrigidas as três equações propostas no encontro anterior e apresentadas mais seis como tarefa que foram corrigidas ao final da aula.

Encontro 8

A professora iniciou a discussão acerca da resolução de problemas utilizando equações e propôs alguns exemplos e dois exercícios que foram corrigidos ao final da aula.

Exemplo de problema proposto neste encontro:

*Pensei em um número, somei 34 e obtive 132. Em qual número pensei?*

Neste encontro encerrou-se a primeira fase da intervenção da professora que, a partir desta data voltou ao conteúdo que trabalhava anteriormente.

### 3.4.4 ETAPA 4 – TESTE INTERMEDIÁRIO

O teste intermediário teve por objetivo identificar o que os alunos já haviam constituído da linguagem algébrica ao término da primeira fase de nossa intervenção de ensino. Esse teste continha o mesmo número de questões do teste anterior (dez) e estava igualmente dividido em dois grupos com cinco questões cada – apresentação em linguagem simbólica e apresentação em linguagem natural. Essas questões tinham equivalência matemática ao pré-teste, mas sua ordem de apresentação estava alterada. Como o anterior, esse teste foi aplicado coletivamente com os alunos resolvendo individualmente. Pedimos que os alunos registrassem todos os seus cálculos e procedimentos, à caneta, nas folhas do teste, e que não se preocupassem com acertos e erros ou com notas. Antes de distribuirmos o teste reafirmamos enfaticamente que o mesmo não tinha caráter de uma avaliação escolar e sim o objetivo de estudar se a nossa estratégia de ensino estava tendo sucesso e, dessa forma, podermos melhorar as atividades realizadas nos próximos encontros. Salientamos que os testes eram instrumentos para nos auxiliar a melhorar as estratégias para se ensinar Matemática. Procuramos assim, criar uma atmosfera de tranqüilidade e descontração como foi a do pré-teste. A aplicação teve uma duração de 60 minutos.

Apresentamos a seguir, no quadro 3.5, as questões do teste intermediário. Não nos deteremos em fazer suas análises, pois as mesmas são equivalentes matematicamente às do pré-teste.

| | |
|---|---|
| 1) $7 \times A + 34 = 5 \times A + 46$ | 2) $\frac{5 \times N}{5} + \frac{86}{2} - 10 = 60 - \frac{2 \times N}{2}$ |
| 3) $13 \times P + 87 = 438$ | 4) $5 \times (W + 12) - 2 \times W = 3 \times (8 - w) + 12$ |
| 5) $8 \times D - 34 - 3 \times D = \frac{40}{2} - 4 \times D$ | 6) Pensei em um número. Multipliquei por 7 e subtraí 59. Obtive 186. Descubra o número que pensei |
| 7) Rosa, Maria e Leila fazem salgados para festas. Esta semana elas lucraram R$ 870,00 e vão dividir de acordo com o tempo que cada uma trabalhou e a quantidade de ingredientes que gastou. Maria vai receber R$ 70,00 a mais que a metade de Rosa. Leila vai receber R$ 90,00 a menos que o dobro de Maria. Quanto receberá cada uma? | 8) André joga duas partidas de bate-figurinha. Joga uma primeira e depois uma segunda. Na segunda partida ele perde 102 figurinhas. Depois dessas duas partidas, ele ganhou 237 figurinhas. O que aconteceu na primeira partida? Ele ganhou ou perdeu? Quanto? |
| 9) Sr. Paulo possui dois carros velhos, um verde e um azul. O carro verde tem 17 anos a menos que o dobro da idade do carro azul. Se a soma das idades dos dois carros é 46 anos, então qual é a idade de cada carro? | 10) Joel, seu pai e seu avô colecionam miniaturas de carros. Juntos eles possuem 161 carrinhos. Seu avô possui o triplo de carrinhos em relação ao seu pai. Joel possui 14 carrinhos a menos que seu pai. Quantos carrinhos possui cada um? |

**Quadro 3.5:** Teste Intermediário – Formato apresentado apenas para uma boa visualização do leitor. Na aplicação, apresentou-se em quatro folhas.

## 3.4.5 ETAPA 5 – FASE II DA INTERVENÇÃO DE ENSINO

Nossa segunda fase do experimento constou de quatro encontros. Cada um desses encontros teve a duração de uma hora/aula (45 minutos). Faremos sua análise segundo cada grupo.

### *3.4.5.1 Grupo Experimental*

Para esta segunda fase de nossa intervenção de ensino, levamos atividades impressas as quais deveriam ser resolvidas em duplas e estas, por uma questão de aproveitamento de tempo, foram as mesmas das atividades anteriores.

<u>Encontro 1:</u> Trabalhando com Códigos

Em duplas, os alunos receberam a ficha 1, que continha atividades que envolviam a utilização dos códigos e reflexão sobre os mesmos.

1- Resolva o problema utilizando o código abaixo:

Seu Pedro comprou 8 camisetas e 5 calç 50,00. Cada calça custou R$ 13,00 e ele recebeu de trc cada camiseta?

Código:
Passo 1) C x R = A
Passo 2) A + T = B
Passo 3) P – B = D
Passo 4) D ÷ S = E

Legenda:
S = número de camisetas
C = número de calças
R = preço de uma calça
E = preço de uma camiseta
P = dinheiro pago
T = troco

R: Cada camiseta custou R$ ___________.

O objetivo desta questão era o de relembrar a utilização de códigos como os utilizados na fase I da intervenção. Acreditávamos que os alunos não apresentariam dificuldades nela, pois já haviam manipulado o trabalho com codificação e decodificação anteriormente.

O problema foi o mesmo utilizado no encontro 1 da fase I.

2- Responda as questões abaixo baseadas no problema acima:

a) Como você explicaria a um colega que não tem nem o problema nem a legenda, o que a letra C representa?
b) No código, poderia ter usado outra letra que não fosse C? Qual? Como você explicaria este fato a um colega?
c) Para problemas diferentes, C poderia ter valores diferentes? Como você explicaria este fato a um colega?

O objetivo desta questão era o de estudar a compreensão dos alunos em relação a uma incógnita. Se eles a percebiam como rótulo (são as calças) ou como valor (é o número de calças) conforme Kieran (1992) classifica em seu trabalho.

Esperávamos que a maioria dos alunos apresentaria respostas que indicassem a letra como valor, pois foi o que constatamos na primeira fase da intervenção.

1- O código do primeiro problema foi reescrito em uma unidade:

$$\{ P - [ ( C \times R ) + T ] \} \div S = E$$

a) Resolva-o com os dados numéricos do problema 1 e verifique se o resultado será o mesmo?
b) O que você achou mais fácil:

( ) resolver utilizando os quatro passos (como no problema 1)

( ) resolver de uma vez só (como nesse exercício).

Como você explicaria sua opinião a um colega que não aprendeu código ainda?

O objetivo desta questão era o de apresentar as manipulações algébricas possíveis para reescrever em unidade os códigos criados. A questão objetivava mostrar aos alunos que o código reescrito em unidade chegaria ao mesmo resultado do código em passos, e também questioná-los quanto ao que achavam mais simples.

4- Tente você, reescrever o código em uma unidade:

Código:
1) Z x W = A
2) R x Y = B
3) A + B + S = C
4) C ÷ N = V

Cinco pessoas fizeram uma “vaquinha” para jantar. T sma quantia. Com o dinheiro da “vaquinha” compraram 2 pizz ntes. Cada pizza custou R$ 7,50 e cada refrigerante R$ 0,50. So Com quantos reais cada pessoa entrou na “vaquinha”?

Legenda:

N = número de pessoas

Z = número de pizzas

R = número de refrigerantes

W = preço de uma pizza

Y = preço de um refrigerante

S = dinheiro que sobrou

V = dinheiro que cada um entrou na “vaquinha”

O objetivo desta questão era, mais uma vez, apresentar as manipulações algébricas possíveis para reescrever o código em unidade, só que desta vez os alunos é que deveriam realizar a tarefa, baseados no que viram na questão anterior. Nossa expectativa era que um pequeno número de alunos a realizaria com sucesso, por ser uma tarefa avançada em relação ao que estavam estudando, mas que teríamos alunos com sucesso em sua realização. O problema é idêntico ao 1B utilizado no jogo codificação-decodificação.

Encontro 2: Códigos e Equações

Em duplas, os alunos receberam a ficha 2, que continha atividades de utilização dos códigos e reflexão sobre os mesmos.

Ficha 2

5- A dupla formada por Zezinho e Joãozinho fez a seguinte codificação para o problema: “O professor de Educação Física comprou 8 bolas de vôlei e 6 de futebol, mas não se lembra do preço da bola de vôlei. Cada bola de futebol custou R$ 28,00 e, no total, ele gastou R$ 380,00. Quanto custou cada bola de vôlei?”

Código:
Passo 1) B x C = H
Passo 2) D – F = J
Passo 3) G ÷ A = K

Legenda:

A = número de bolas de vôlei
B = número de bolas de futebol
C = preço de uma bola de futebol
E = preço de uma bola de vôlei
F = total da conta 1
G = total da conta 2
D = total gasto

A dupla formada por Mariazinha e Ritinha encontrou dificuldades no momento de resolver um novo problema com este código. Você, que entende tudo de códigos, recebe agora a tarefa de ajudar as meninas a resolver o problema. Para isto você deve indicar as dificuldades que o código apresenta e corrigi-las para que elas possam usá-lo.

O problema é o mesmo 4A utilizado no segundo momento do jogo codificação-decodificação. O objetivo desta questão era estudar se o aluno percebia a utilização de letras distintas para representar o mesmo valor. Planejamos esta questão, pois a utilização de letras diferentes para um mesmo dado foi uma das dificuldades apresentadas na elaboração e leitura dos códigos, como veremos em análise (capítulo 4).

6- Esse é o código feito por Mariazinha e Ritinha e que Joãozinho e Zezinho vão utilizar: “Dona Roberta comprou 8 regatas e 7 shorts. Pagou, em dinheiro, R$ 170,00. Cada short custou R$ 9,00 e ela recebeu de troco R$ 11,00. Quanto custou cada regata?”

Legenda

A = número de regatas

B = número de shorts

C = preço de um short

D = troco

E = dinheiro pago

F = preço de uma regata

G = total da conta 1

H = total da conta 2

J = total da conta 3

Código:

Passo 1) B x C = T
Passo 2) D + G = T
Passo 3) E – H = T
Passo 4) J ÷ A = F

Joãozinho e Zezinho também não estão conseguindo utilizar o código das meninas. Ajude-os do mesmo modo que você ajudou as meninas.

O objetivo desta questão era estudar se o aluno percebia a utilização de uma mesma letra para simbolizar dados diferentes. Essa foi também uma das dificuldades apresentadas na elaboração e leitura dos códigos. Este problema é semelhante ao 2B do primeiro momento do jogo.

7- Num problema de codificação recebi o código simplificado e o valor correspondente a cada letra, mas uma saiu apagada. Porém consegui copiar do colega ao lado a resposta C = 20. Será que agora consigo encontrar o valor da letra que está faltando?

[ (A x B) – F] + D = C

A = 4 B = 9 F = 24 D = ##

O objetivo desta questão era estabelecer relações entre códigos e equações, pois ao substituir os valores dados e procurar o valor da letra desconhecida, os alunos poderiam usar o procedimento de resolução de equações.

8- Codifique a afirmação: “Havia n lápis vermelhos e b lápis azuis em uma caixa, totalizando z lápis”.

O objetivo desta questão era estudar a compreensão e correta utilização da linguagem algébrica.

Encontro 3: Codificando e Equacionando Problemas

Em duplas, os alunos receberam a ficha 3, que continha atividades de utilização dos códigos e reflexões sobre os mesmos.

Ficha 3

9- Codifique e resolva o problema: “Um número multiplicado por 5 e depois somado a 17 resulta em 72”.

Este problema é semelhante ao oito de nosso pré-teste e bastante utilizado pela professora em suas aulas. Objetivava estudar se o aluno atribuiu significados à linguagem simbólica e se saberia utilizar a conversão de registros (DUVAL, 2003) entre linguagem natural e linguagem algébrica, apresentando o problema em forma de equação. Também visávamos estudar a compreensão e correta utilização dos procedimentos de resolução de equações.

10- Crie um texto para o código: 2 x B + 13 = 55 (lembre-se 2 x B = 2**.**B = 2B).

Esta questão apresenta uma equação em linguagem simbólica e solicita que se faça uma conversão de registros para a linguagem natural. Nossos objetivos eram de estudar se o aluno seria capaz de efetuar tal conversão (conforme autor acima), uma vez que tal atividade não havia sido trabalhada em sala de aula (nem por nós, nem pela professora de classe).

11- Em: 3T + 5 = 38, André encontrou como solução o número 12 e Rui o número 11.

( ) André está certo

( ) Rui está certo

( ) Os dois estão certos

( ) Os dois estão errados

O objetivo desta questão era estudar se o aluno havia compreendido e saberia aplicar o processo de resolução de equações do primeiro grau simples.

12- Em 5B – 1 = 4B + 6 , o valor de B é: ( ) 7 ( ) 8

O objetivo desta questão era estudar se o aluno havia compreendido e saberia aplicar o processo de resolução de equações do primeiro grau, que envolviam a manipulação de termos algébricos.

13- Codifique e resolva os problemas:

a) Tia Marina é a madrinha de batismo de Alessandra, uma garota muito simpática. Tia Marina tem 17 anos menos que o triplo da idade de Alessandra. Se a soma das idades das duas é 37, então qual é a idade de Alessandra?

Este problema é idêntico ao apresentado em nosso pré-teste e bastante utilizado nas aulas da professora de classe. Com ele objetivávamos estudar se o aluno havia compreendido e saberia aplicar a conversão de registros (DUVAL, 2003) e o processo de resolução de equações.

| |
|---|
| b) Joel, seu pai e seu avô colecionam miniaturas de carros. Juntos eles possuem 161 carrinhos. Seu avô possui o triplo de carrinhos em relação ao seu pai. Joel possui 14 carrinhos a menos que seu pai. Quantos carrinhos possui cada um? |

Este problema também é semelhante ao que apresentamos no pré-teste. Seu objetivo era estudar se o aluno havia compreendido e saberia aplicar a conversão de registros (conforme autor) e o processo de resolução de equações. Porém este problema apresenta um nível de dificuldade maior que o anterior, pois apresenta relações entre dois referentes – avô e Joel – e um referido (MAGINA, 2001), o pai.

Encontro 4: Discussão Geral

Este encontro foi dedicado à correção de algumas atividades e discussão sobre as principais dúvidas que surgiram na realização das fichas dos três encontros anteriores.

### *3.4.5.2 Grupo de Controle*

No tempo que se passou entre a primeira e segunda fase de nossa intervenção, a professora seguiu com seu conteúdo e avançou bastante no estudo das equações e problemas que as utilizam para serem solucionados.

Como nós não interferimos em sua seqüência programada, apresentaremos a seguir o que estava acontecendo no GC no momento da segunda fase da intervenção de ensino.

<u>Encontro 1</u>

Neste encontro os alunos estavam exercitando resolução de problemas.

Exemplos de problemas propostos:

1- *O triplo de um número somado a quatro unidades resulta em 25. Qual é esse número?*
2- *O dobro do número de meninas da 6ª A menos 12 é igual ao número de meninas da 6ª C. Sabendo que na 6ª C há 15 meninas descubra quantas há na 6ª A?*
3- *A quarta parte de um número somado a 17 é igual a 27. Que número é este?*
4- *Joana tem 14 figurinhas a mais que Andréia. As duas juntas tem 60 figurinhas. Quantas figurinhas têm cada uma das meninas?*
5- *Seu Joaquim quer dividir sua coleção de 45 carrinhos entre seus três filhos da seguinte maneira: o filho do meio receberá o dobro do caçula e o filho mais velho receberá o triplo do caçula mais três. Quantos carrinhos receberá cada filho?*

Encontro 2

Neste encontro, a professora continuou a resolução dos problemas dos tipos acima destacados.

Encontros 3 e 4

Nestes dois encontros foi feita uma revisão para a prova que a professora havia marcado para dali a quatro dias.

Além dos problemas destacados acima, foram revisadas equações. Alguns dos tipos de equações já haviam aparecido na primeira fase, outras haviam aparecido agora, as quais exemplificaremos a seguir.

1) $2(x - 9) + 4x = 3(8 - 2x) + 32$

2) $\frac{2x + 5}{2} - \frac{4x - 9}{6} = \frac{3 - 4x}{3}$

A professora nos colocou que, após a aplicação da prova, encerraria o trabalho com as equações e problemas e iniciaria o trabalho com inequações do 1º grau com uma variável e, em seguida, sistemas de equações do 1º grau com duas variáveis.

### 3.4.6 ETAPA 6 – PÓS-TESTE

O pós-teste objetivava estudar como ou o quanto nossa pesquisa havia contribuído efetivamente para o desenvolvimento da linguagem algébrica nos alunos do GE. Esse teste era semelhante aos anteriores em relação às questões.

Eram dez, sendo cinco equações e cinco problemas. Além disso, apresentamos mais cinco questões para reflexão sobre a linguagem algébrica.

Diferente dos anteriores, as aplicações foram feitas por etapas, utilizando três horas/aula para sua realização. Na primeira, aula resolveram as cinco equações, na segunda os cinco problemas e na terceira as cinco questões. Foi distribuído coletivamente e resolvido individualmente pelos alunos em ambas as turmas (GC e GE) nas três etapas, que foram simultâneas nos dois grupos.

Primeiro descreveremos as equações e problemas que são semelhantes aos testes anteriores e após, as questões.

As equações e a ordem de apresentação foram as mesmas do pré-teste, apenas alteramos a notação simbólica uma vez que agora os alunos já haviam estudado equações e não queríamos confundí-los em relação à notação. Os problemas quando não foram os mesmo foram semelhantes matematicamente.

O quadro 3.6, a seguir, apresenta as etapas do pós-teste que continham as equações e os problemas.

| | |
|---|---|
| 1) $7N + 33 = 152$ | 2) $8x + 2 = 6x + 10$ |
| 3) $12M - 41 - 3M = \frac{30}{2} - 5M$ | 4) $\frac{4P}{4} + 20 - \frac{12}{6} = \frac{50}{2} - 2P$ |
| 5) $3.(A + 13) - 2A = 5.(10 - A) + 19$ | 6) Pensei em um número. Multipliquei por 7. Subtraí 49. Deu 112. Descubra o número que pensei. |
| 7) Rafael jogou duas partidas de “RPG”. Jogou uma primeira e depois uma segunda. Na segunda ele ganhou 102 pontos. Depois dessas duas partidas, ele ganhou 295 pontos. O que aconteceu na primeira partida? Ele ganhou ou perdeu? Quanto? | 8) Renato, Cristiano e Paulo colecionaram figurinhas da última copa. Somando as figurinhas dos três têm-se um total de 143. Renato tem 15 figurinhas a mais que a metade das figurinhas de Cristiano. Paulo tem 17 figurinhas a menos que o dobro das figurinhas de Renato. Quantas figurinhas tem cada um deles? |
| 9) Andréia e Adriana são irmãs. Adriana tem 17anos a menos que o triplo da idade de Andréia. Se a soma das idades das duas é 27 anos, então qual é a idade de Andréia? | 10) Três sócios vão dividir o lucro de uma empresa, que foi de R$ 897,00, proporcionalmente a quantia que cada um investiu. Mário vai receber o triplo de Joaquim e Paulo receberá R$ 123,00 a menos que Joaquim. Quanto receberá cada sócio? |

**Quadro 3.6:** Pós-Teste – Formato apresentado apenas para uma boa visualização do leitor. Na aplicação, apresentou-se em quatro folhas.

Para as questões sobre linguagem, utilizamos uma folha extra. Visávamos fazer um breve diagnóstico a respeito da constituição da linguagem algébrica. Esta atividade foi aplicada em dia alternado com o pós-teste e apresentava as seguintes questões:

1- Considere a afirmação: $10 + x = x + 10$ Essa afirmação é:
( ) Verdadeira ( ) Falsa
Como você ensinaria para um aluno que tivesse marcado a opção ERRADA?

Com essa questão visávamos avaliar o entendimento quanto a letra como variável, representante de um número que por conseqüência mantém a propriedade da adição onde "a ordem das parcelas não altera a soma".

Acreditávamos ser uma questão de fácil entendimento e que poderia ser justificada através de uma verificação numérica, atribuindo um valor para x e verificando que a soma não se altera quando se altera a ordem das parcelas e, por isso tínhamos a expectativa de um grande percentual de acertos.

2- Sendo x e y números inteiros e positivos, em $3x = y$, podemos afirmar que:
( ) x é maior que y ( ) y é maior que x ( ) x e y são iguais
Como você explicaria sua resposta para um colega?

Aqui nosso objetivo era o de analisar o entendimento das incógnitas em uma equação.

Avaliamos a questão como difícil, pois exige o entendimento de que três vezes o valor de x é que resulta no valor de y, por isso esperávamos um percentual de acertos menor do que na questão anterior.

3- Considere a afirmação: $2x = x2$ Essa afirmação é:

( ) Verdadeira ( ) Falsa

Como você pode ter certeza que sua resposta está certa?

Questão semelhante à primeira, só difere quanto à operação apresentada, porém acreditamos que o nível de dificuldade é maior que o da questão 1 o que acarretaria um número de acertos menor que o da referida questão.

4- Em $7x + 22 = 109$ e $7y + 22 = 109$ , podemos afirmar que:

( ) $x$ é maior que $y$

( ) $y$ é maior que $x$

( ) $x$ é igual a $y$

Dê uma explicação para me convencer que você respondeu corretamente:

Nossa pretensão com esta questão era estudar se o conceito de incógnita estava claro para o aluno, isto é, o conceito de que a letra representava um número a ser encontrado. Tínhamos como objetivo analisar se os alunos perceberiam que não importava qual letra estivesse sendo utilizada, as operações necessárias e os valores encontrados seriam os mesmos nos dois casos.

Estimamos um grande número de acertos por se tratar de uma questão de fácil compreensão.

5- Em: $5x + 18 = 153$, André encontrou como solução o número 25 e Rui o número 27.

( ) André está certo

( ) Rui está certo

( ) Os dois estão certos

( ) Os dois estão errados

Esta última questão visava estudar se o aluno compreendia o que é encontrar a solução de uma equação. Para tal ele poderia resolvê-la utilizando os procedimentos de resolução de equações ou fazer a verificação dos valores sugeridos. Esperávamos um percentual alto de acertos.

# CAPÍTULO 4

## ANÁLISES

## 4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentaremos a análise dos dois momentos do estudo: o primeiro que trata dos instrumentos diagnósticos e o segundo que analisará a intervenção de ensino.

Com relação aos instrumentos diagnósticos – pré, intermediário e pós-testes – analisaremos sob dois aspectos, quantitativa e qualitativamente. No que tange à análise quantitativa, esta iniciará por uma comparação dos desempenhos gerais do GE e do GC, nos três testes.

Ainda em relação aos instrumentos diagnósticos, o segundo aspecto da análise diz respeito às categorias que elaboramos a partir das estratégias e erros apresentadas pelos alunos nos seus procedimentos de resoluções.

A análise da intervenção de ensino também será discutida em dois momentos. No primeiro levantaremos as estratégias e dificuldades que surgiram na aplicação e desenvolvimento do jogo codificação-decodificação ao longo dos oito encontros. O segundo momento será destinado à análise da fase II da intervenção, a qual constou de quatro encontros destinados ao ensino formal da Álgebra.

Para efeito da análise da intervenção de ensino, consideraremos apenas os sujeitos do GE, visto que o interesse do estudo reside na avaliação da intervenção de ensino proposta. Esperamos, desta forma, obter dados significativos que nos ajudem a explicar e compreender a mudança de desempenho deste grupo ao longo dos testes.

## 4.2 ANÁLISE QUANTITATIVA DOS INSTRUMENTOS DIAGNÓSTICOS

Como citamos na seção anterior, a primeira análise que faremos abrangerá os resultados gerais dos dois grupos, levando em consideração o pré-teste, o teste intermediário e o pós-teste. O motivo para tal é poder oferecer uma visão geral do desempenho dos dois grupos ao longo do experimento.

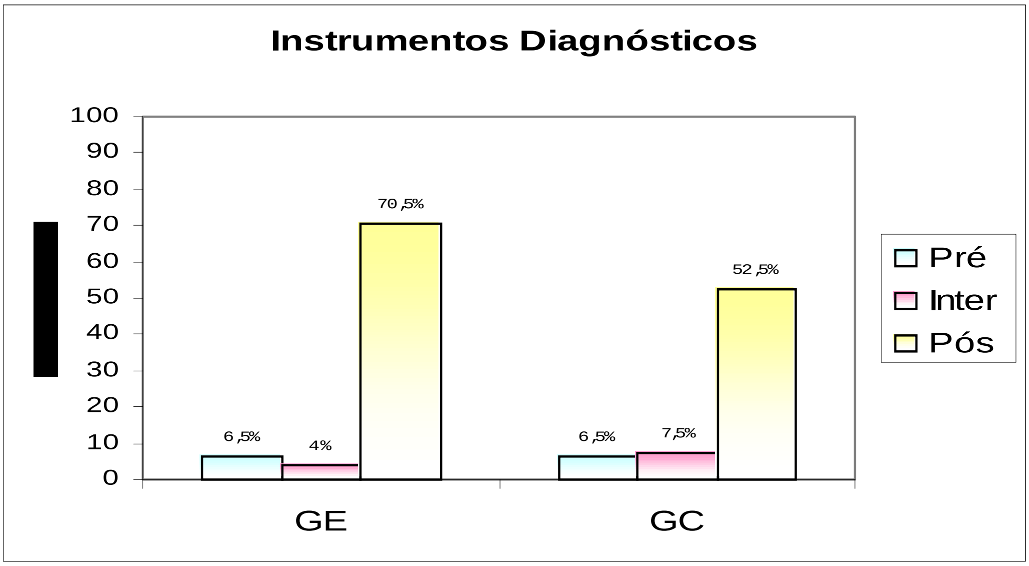


**Gráfico 4.1:** Desempenho dos grupos nos testes, em porcentagem.

Observando os resultados gerais obtidos nos instrumentos diagnósticos, podemos observar que no pré-teste, em que visávamos avaliar os conhecimentos espontâneos dos alunos em relação a álgebra, os índices de acertos são idênticos nos dois grupos. Vale salientar que o pré-teste foi aplicado, quando os alunos ainda se encontravam na 5ª série do Ensino Fundamental. O gráfico acima, portanto, mostra que os dois grupos partiram de patamares muito baixos, o que indica que os mesmos ainda não tinham, se não o conceito, pelo menos a competência em resolver problemas algébricos.

No teste intermediário, temos uma pequena queda no GE e um pequeno aumento no GC, embora esta diferença não seja significativa. Lembramos que, neste momento, os alunos do GE ainda não haviam trabalhado com a álgebra do ponto de vista formal, em sala de aula com a professora; apenas haviam participado da primeira fase de nossa intervenção de ensino, mais especificamente, dos dois momentos do jogo da codificação e decodificação. Os alunos do GC já haviam iniciado o trabalho algébrico formal, tendo recebido instruções em aula de como resolver equações e problemas simples.

Tal resultado nos permite interpretar que o trabalho apenas com o jogo não foi suficiente para oferecer aos alunos do GE estratégias para resolução de problemas algébricos. Também a introdução inicial à álgebra trabalhada com o GC não deu conta de elevar os índices de acertos deste grupo.

Os resultados do pós-teste são bastante significativos em relação aos anteriores. Tanto do ponto de vista da análise intra-grupo como da análise inter-grupos, já que os dois grupos mostraram um grande crescimento em seus desempenhos. Contudo, o gráfico nos mostra que este salto nos desempenhos é ainda mais acentuado no GE (de 4% para 70% no GE e de 7,5% para 52,5% no GC). Cabe salientar que no momento da aplicação do pós-teste os dois grupos já estavam familiarizados com a álgebra formal, resolvendo problemas e equações em sala de aula.

Os dados nos permitem interpretar que, estando os dois grupos inicialmente no mesmo patamar (pré-teste), continuando os dois grupos em patamares similares ao término da primeira parte da intervenção de ensino (teste intermediário) e apresentando diferenças tão grandes no momento do pós-teste, o que diferenciou esse salto qualitativo em favor do GE foi a intervenção de ensino.

Uma análise precipitada dos resultados poderia levar a uma interpretação de que o trabalho com o jogo codificação-decodificação pouco ou nada auxiliou o aluno na construção do pensamento algébrico. Porém, refletindo sobre os percentuais de acerto do GE nos três testes, podemos inferir que o jogo acompanhado de uma formalização parece dar um sentido muito maior para o uso da Álgebra. Isto é, parece que o jogo contribuiu para uma melhor significação dos objetos da Álgebra.

Como nossos instrumentos diagnósticos foram divididos em duas partes – equações, apresentadas em linguagem simbólica e problemas, apresentados em linguagem natural – necessário se faz proceder a uma análise separada de cada um desses grupos de questões, o que faremos na seção a seguir.

### 4.2.1 ANÁLISE DO DESEMPENHO DOS GRUPOS NOS PROBLEMAS

O gráfico 4.2 apresenta o desempenho dos grupos nas questões que continham problemas.

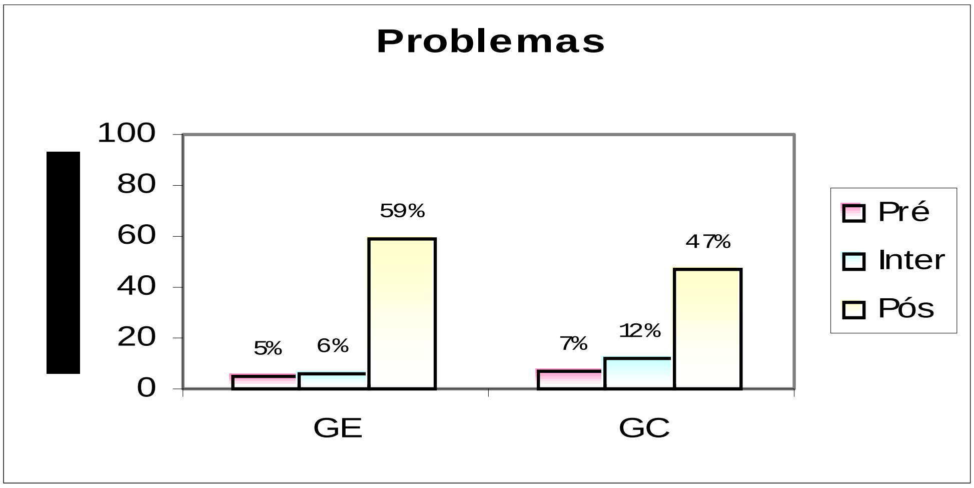


**Gráfico 4.2:** Desempenho dos grupos nos problemas, em porcentagem.

Fazendo uma análise intra-grupos, notamos uma tendência similar dentro de cada um deles, já que ambos apresentaram aumento no percentual de acertos do pré e intermediário para o pós-teste. Entre o primeiro e o segundo teste esse crescimento foi pequeno (1% no GE e 5% no GC), justificado pelas condições descritas anteriormente. Já entre o teste intermediário e o pós-teste, o crescimento é bastante acentuado, com maior ênfase para o GE (aumento de 53% no GE e 35% no GC).

Fazendo uma comparação inter-grupos (comparando GE com GC), notamos que, o GE não só apresentou um salto maior entre os dois primeiros e o último teste, bem como apresentou um resultado final de 12 pontos percentuais acima do GC. Tal resultado merece atenção, enquanto menos da metade dos problemas analisados foram resolvidos corretamente pelo GC – após o grupo ter tido muitas aulas sobre o conteúdo – temos que a maioria (quase 60%) foram corretamente resolvidos pelos alunos do GE.

### 4.2.2 ANÁLISE DO DESEMPENHO DOS GRUPOS NAS EQUAÇÕES

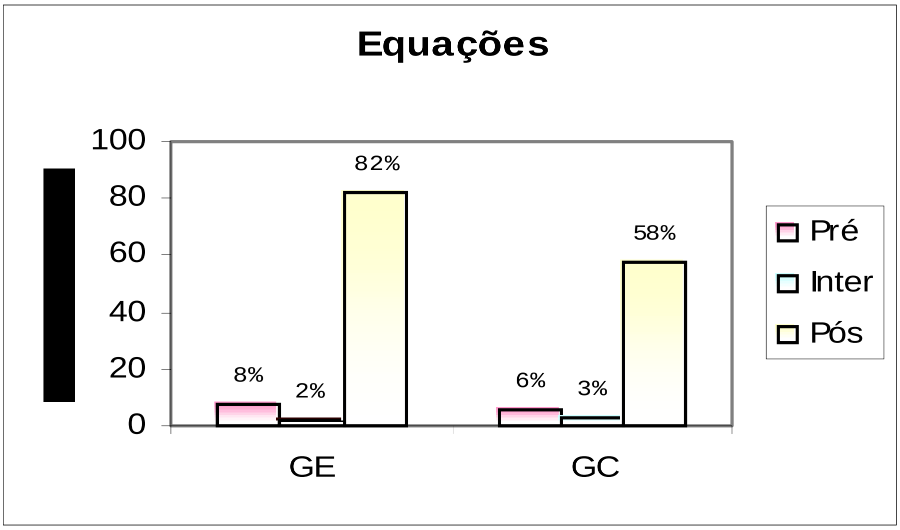


**Gráfico 4.3:** Desempenho dos grupos nas equações, em porcentagem.

Na análise intra-grupos notamos, novamente, uma tendência de desempenho similar entre GE e GC. Ambos os grupos tiveram pouca diferença entre o pré-teste e o intermediário (GE de 6% e GC de 3%), mas do intermediário para o pós-teste observamos um aumento acentuado nos dois grupos (80% no GE e 55% no GC), sendo que o GE supera em muito o desempenho do GC.

Partindo para uma análise inter-grupos, podemos observar que ambos os grupos se saíram melhor nas equações do que nos problemas, havendo uma grande diferença – no que tange a resolução das equações – em favor do GE, já que a diferença final entre os grupos foi de 24 pontos percentuais. E não só isso, mais de 80% das equações foram resolvidas corretamente pelo GE enquanto que o GC fica abaixo de 60%.

Deteremos-nos agora apenas no pós-teste, pois, além das questões referentes a problemas e equações, esse teste ainda continha uma terceira parte destinada a questões que chamamos de “linguagem”, com as quais visávamos estudar a compreensão desses alunos quanto à linguagem simbólica utilizada pela Álgebra.

### 4.2.3 ANÁLISE DO DESEMPENHO DOS GRUPOS NO PÓS-TESTE

Como não aplicamos questões de linguagem nos testes anteriores, só podemos fazer uma análise inter-grupos sobre os resultados das mesmas. O gráfico abaixo nos mostra estes resultados.

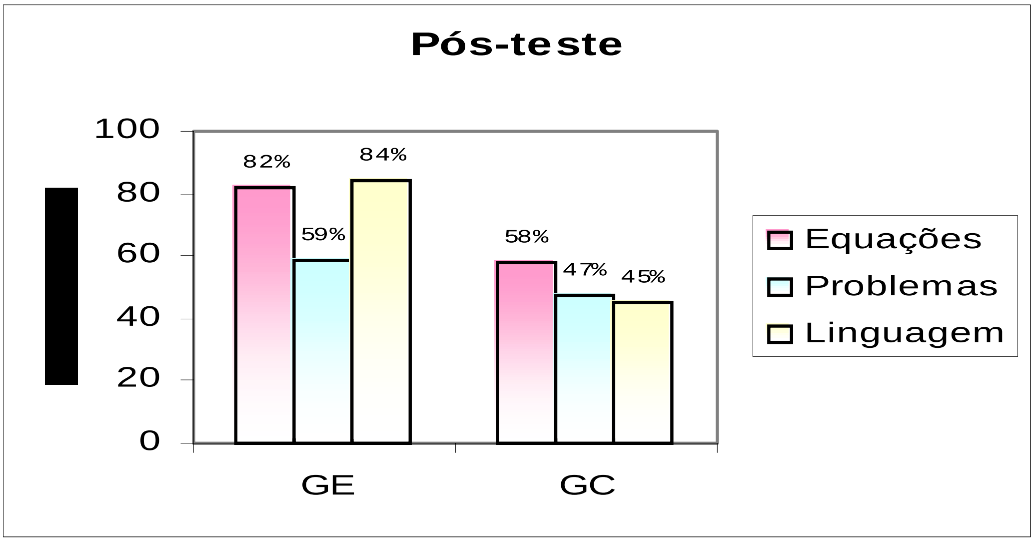


**Gráfico 4.4:** Desempenho dos grupos no pós-teste, em porcentagem.

Comparando os grupos quanto aos seus desempenhos nas três partes do teste – equações, problemas e linguagem – podemos observar que, diferentemente da tendência de melhor desempenho na primeira do que na segunda parte do teste nos dois grupos, a terceira parte – a linguagem – foi aquela em que o GE se saiu melhor enquanto que o GC apresentou seu pior desempenho. De fato, comparando o desempenho dos dois grupos no que se refere à linguagem, houve uma diferença significativa (39%) em favor do GE. Este resultado nos dá forte indicação de que o trabalho como o jogo codificação-decodificação contribuiu principalmente para instrumentalizar os alunos na leitura e entendimento dos símbolos utilizados na Álgebra.

Olhando o pós-teste sob os três aspectos – equações, problemas e linguagem – em todos eles notamos que o GE se saiu melhor, apesar de haver uma tendência de conduta, em ambos os grupos, nos dois primeiros aspectos. E mais, parece ser um efeito positivo do jogo codificação-decodificação, pois os significados (LINS, 1994-b) dos objetos da Álgebra parecem estar mais nítidos para o GE. Buscaremos subsídios para explicar essas diferenças ao longo da análise.

Apesar da análise geral nos dar uma boa visão do todo, ela ainda necessita ser mais esmiuçada para que possamos entender "onde", "como" e "por que" da diferença entre os grupos. Assim sendo, buscaremos fazer uma análise comparativa dos dois grupos olhando não mais o teste de um modo geral, mas questão por questão.

### 4.2.4 ANÁLISE DOS RESULTADOS DOS TESTES POR QUESTÃO

Faremos uma análise mais detalhada das questões que apresentaram maiores percentuais de acertos nos três testes.

Para facilitar o entendimento do leitor, apresentaremos na tabela 4.1 o resumo da equivalência entre as questões tal qual dispostas nos três testes, e avisamos que as discutiremos segundo a numeração inicial do pré-teste.

| | EQUAÇÕES | | | | | PROBLEMAS | | | | | LINGUAGEM | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Q1 | Q2 | Q3 | Q4 | Q5 | Q6 | Q7 | Q8 | Q9 | Q10 | Q11 | Q12 | Q13 | Q14 | Q15 |
| Pré | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | ------------------------ | | | | |
| Inter | 2 | 4 | 1 | 5 | 3 | 9 | 8 | 6 | 10 | 7 | ------------------------ | | | | |
| Pós | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 9 | 7 | 6 | 10 | 8 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

**Tabela 4.1:** Equivalência entre as questões dos três testes.

É possível notar que houve uma mudança na ordem das questões nos testes, mas informamos que a equivalência matemática permaneceu entre as mesmas. Assim sendo, Q6 foi a Q6 no pré-teste, a Q9 no teste intermediário e a Q9 no pós-teste. Já as questões que vão de 11 a 15 foram aplicadas, em uma folha separada das anteriores somente no pós-teste e por isso a sua numeração se repete.

Inicialmente faremos a análise dos testes pré e intermediário, pois esses se assemelham em relação ao número de questões com melhores desempenhos. Após, faremos a análise do pós-teste o qual apresentou um maior número de questões com bons desempenhos.

#### 4.2.4.1 Pré-Teste e Teste Intermediário

Pra iniciar esta análise apresentaremos a tabela 4.2 com os resultados obtidos pelos dois grupos – GE e GC – nos testes pré e intermediário.

| | | EQUAÇÕES | | | | | PROBLEMAS | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Q1 | Q2 | Q3 | Q4 | Q5 | Q6 | Q7 | Q8 | Q9 | Q10 |
| Pré (20) | GE | 7 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 0 | 0 |
| | GC | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 2 | 0 | 0 |
| Inter (20) | GE | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 4 | 0 | 0 |
| | GC | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 7 | 0 | 0 |

**Tabela 4.2:** Resumo dos resultados nos testes pré e intermediário.

A partir da tabela 4.2 podemos notar que, as questões que obtiveram algum acerto nos testes pré e intermediário, foram Q1, Q7 e Q8, sendo a primeira uma equação, e as outras duas são problemas. Inicialmente analisaremos as estratégias utilizadas na solução da Q1. Em seguida, por apresentar estratégias semelhantes, analisaremos a Q8 e, por fim, a Q7.

A Q1 foi aquela que mais apresentou acertos no pré-teste, caindo no teste intermediário. Tal dado não nos surpreende uma vez que essa questão era similar àquelas apresentadas nos livros didáticos de 6ª série. Além disso, trata-se de uma questão costumeiramente abordada em séries anteriores (no Ensino Fundamental I), quando ao invés de letras utiliza-se quadradinho (ou outra figura qualquer) para representar a incógnita.

A primeira estratégia que detectamos foi *"tentativa e refinamento"*. Foi utilizada pelos alunos nestes testes (pré e intermediário), quando ainda não haviam se familiarizado com o uso da álgebra. Consistia em partir de um valor inicial, realizar os cálculos e verificar se atingia o valor apresentado. No caso do exemplo "7 x N + 33 = 152", o aluno poderia iniciar testando o número 20 e realizar os cálculos: 7 x 20 = 140 e 140 + 33 = 173. Tal estratégia permitiria que o aluno percebesse que o número 20 era um valor alto e fizesse uma nova tentativa, agora com um valor menor. O aluno, então, repetiria a estratégia até atingir a solução esperada. Essa foi a estratégia mais utilizada nestes testes iniciais, 12 dos 17 acertos (juntando GE e GC nos testes pré e intermediário) que acertaram Q1 a utilizaram.

A figura 4.1 exemplifica a utilização desta estratégia que chamamos de "tentativa e refinamento", retirado do protocolo do aluno 13 do GC, na Q1 do pré-teste.

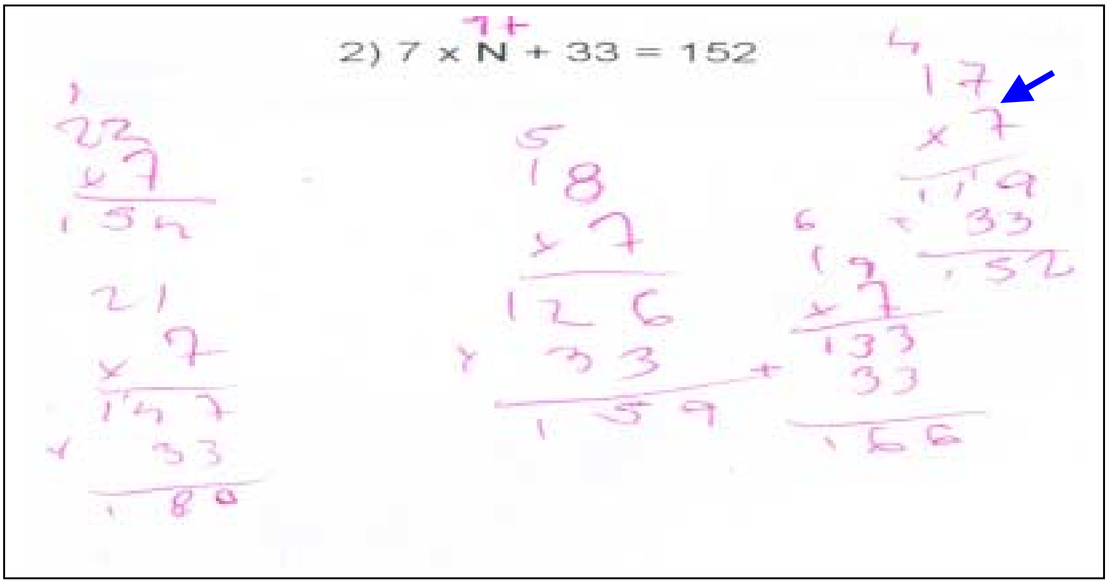


**Figura 4.1:** Exemplo da utilização da estratégia “tentativa e refinamento” em Q1, extraído do protocolo do aluno 13 do GC, no pré-teste.

Uma segunda estratégia que levantamos entre os acertos na Q1 foi a *“<u>desfazer operações</u>”*, a qual teve ocorrência em dois (dos 17) sucessos. Por exemplo, na equação “7 x N + 33 = 152”, primeiro o aluno “desfaz” a operação + 33 (mais trinta e três), fazendo – 33 (menos trinta e três) e em seguida “desfaz” 7 x (sete vezes) fazendo : 7 (divisão por sete). Essa é uma estratégia semelhante a que os alunos, geralmente, aprendem nas séries anteriores em que se trabalham com “quadradinhos”.

A figura 4.2 exemplifica a utilização da estratégia que chamamos de “desfazer operações”, retirado do protocolo do aluno 15 do GE, na Q1 do pré-teste.

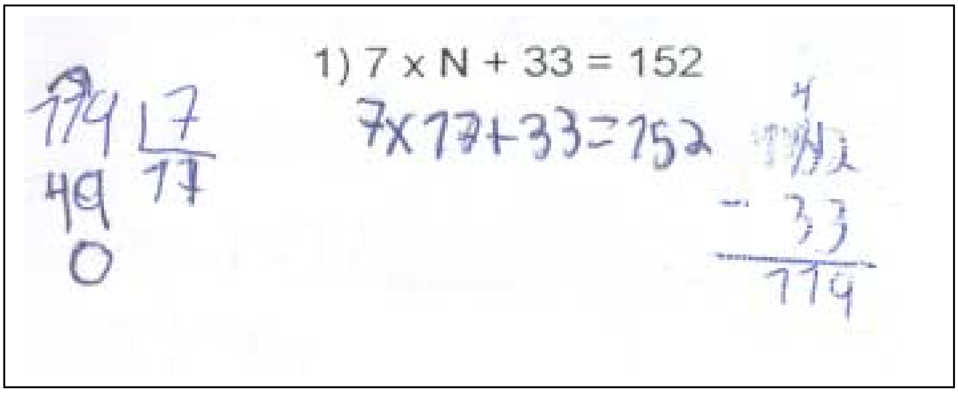


**Figura 4.2:** Exemplo de utilização da estratégia “desfazendo operações” em Q1, extraído do protocolo aluno 15 do GE, no pré-teste.

Tivemos ainda uma terceira estratégia a qual chamamos de *“mista”.* Essa ocorreu em três dos acertos e consistia em utilizar as duas outras, acima discutidas, ao mesmo tempo.

A figura 4.3, retirada do protocolo do aluno 2 do GE – na Q1 do pré-teste – tem a finalidade de ilustrar a utilização da estratégia que chamamos de “mista”.

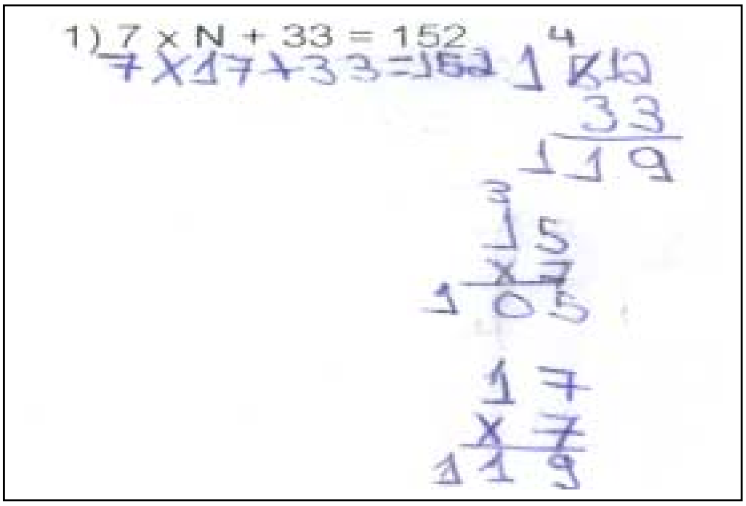


**Figura 4.3:** Exemplo da utilização da estratégia “mista” em Q1, extraído do protocolo do aluno 2 do GE, no pré-teste.

Observando a figura 4.3 podemos notar que, aparentemente, o aluno primeiro “desfez” a operação + 33 (mais trinta e três) e, em seguida, partiu para ”tentativas e refinamentos” na busca da solução. Porém não podemos ter certeza de que foi esse o caminho seguido, já que pode ser que primeiro ele tenha iniciado fazendo “tentativas e refinamentos” e após o que tenha partido para “desfazer a operação” + 33 (mais trinta e três).

A Q8 é um problema o qual pode ser convertido em uma equação semelhante a Q1 e, provavelmente por este motivo, suas estratégias de resolução se assemelharam. Por exemplo, o problema “Pensei em um número. Multipliquei por 7. Subtraí 49. Deu 112. Descubra o número que pensei”, poderia ter sido solucionado resolvendo-se a seguinte equação: $7n - 49 = 112$ (ou, utilizando a notação até então apresentada, 7 x N – 49 = 112). Tal equação poderia ser solucionada conforme as três estratégias acima citadas: “desfazendo operações”, “tentativa e refinamento” ou “mista”.

As mesmas estratégias poderiam ter sido utilizadas sem a conversão de registros (DUVAL, 2003)– linguagem natural para linguagem simbólica – convertendo o problema em equação, bastando para tanto realizar as estratégias de desfazer operações ou de tentativas seguindo o texto do problema. De fato, foi justamente essa a estratégia escolhida pelos alunos os quais obtiveram sucesso nesta questão nos testes pré e intermediário.

Na Q8, considerando GE e GC juntos, tivemos seis acertos no pré-teste e 11 no teste intermediário. Dentre estes 17 acertos, 14 foram obtidos utilizando a estratégia “tentativa e refinamento”, dois utilizando a estratégia “desfazendo operações” e um pela estratégia “mista”.

A Q7 é considerada uma composição de transformação dentro das estruturas aditivas da Teoria dos Campos Conceituais (MAGINA, 2001). Um exemplo dessa questão seria:

> “*André joga duas partidas no videogame. Joga uma primeira e depois uma segunda. Na segunda partida ele perde 126 pontos. Depois dessas duas partidas, ele verificou que havia ganhado 237 pontos no total. O que aconteceu na primeira partida? Ele ganhou ou perdeu? Quanto?”.*

Dos alunos que o solucionaram de forma correta, todos o fizeram realizando uma adição. Podemos interpretar tal solução como a utilização da estratégia “desfazendo operações”, uma vez que o problema poderia ter sido convertido para uma equação (x – 126 = 237). Diferente das duas questões anteriormente discutidas, nessa nenhum aluno utilizou a estratégia “tentativa e refinamento” ou “mista”.

Em síntese, o pré-teste e o teste-intermediário foram pouco resolvidos pelos alunos, havendo apenas três questões as quais apresentaram alguns percentuais de acerto. As estratégias utilizadas para resolução foram as previstas na metodologia – “desfazendo operações” e “tentativa e refinamento”, com destaque para a segunda que foi a mais utilizada. Além dessas duas estratégias, ainda houve uma terceira que nada mais era do que a utilização simultânea das duas anteriores. Uma possível interpretação para essa ocorrência pode ser encontrar no fato de que, tais estratégias são usualmente trabalhadas nas séries anteriores do Ensino Fundamental.

A seguir, prosseguiremos a comparação dos grupos e a análise dos resultados por questão levando apenas em consideração os resultados do pós-teste.

#### 4.2.4.2 Pós-Teste

A tabela 4.3 (abaixo) apresenta os resultados obtidos pelos dois grupos no pós-teste, os quais faremos uma análise em três grupos. O primeiro grupo será o das equações, o segundo dos problemas e, por fim, o de linguagem.

| | | EQUAÇÕES | | | | | PROBLEMAS | | | | | LINGUAGEM | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Q1 | Q2 | Q3 | Q4 | Q5 | Q6 | Q7 | Q8 | Q9 | Q 10 | Q 11 | Q 12 | Q 13 | Q 14 | Q 15 |
| Pós (20) | GE | 18 | 19 | 18 | 12 | 15 | 13 | 14 | 16 | 9 | 7 | 20 | 14 | 11 | 20 | 19 |
| | GC | 17 | 18 | 9 | 4 | 10 | 13 | 10 | 15 | 5 | 4 | 17 | 0 | 5 | 15 | 8 |

**Tabela 4.3:** Resumo dos resultados do pós-teste.

Equações

A partir dos valores apresentados na tabela 4.3 acima, notamos que as equações que apresentam um maior percentual de acertos, tanto no GE quanto no GC, foram Q1 e Q2. Existem três explicações para esse elevado índice de acertos, as quais não excludentes. A primeira é que ambas as equações são comumente apresentadas nos livros didáticos de 6ª série. Lembramos que nesse momento os alunos já estavam utilizando um livro didático em suas aulas.

Uma outra explicação, que pode decorrer da primeira, é que esses tipos de equações foram bastante exercitados nas aulas, com a professora de classe. E, ainda, uma terceira explicação pode ser proveniente do próprio tipo das equações que apresentavam apenas números inteiros, necessitando assim de um tratamento (Duval, 2003 – ver seção 2.2.3 no capítulo 2 a discussão sobre o tema) que envolvia poucos passos para serem solucionadas.

Diferente dos testes anteriores, no pós-teste a estratégia utilizada na solução de ambas as questões foi a de resolver as equações pelo método aprendido com a professora em sala de aula, qual seja, “muda de lado, muda de sinal”.

As demais equações (Q3, Q4 e Q5), se comparadas com os testes anteriores, também apresentam um alto número de acertos, porém há houve uma grande diferença no comportamento dos grupos. Enquanto o GE continuou mantendo um bom desempenho pelo menos no que tange a Q3 e Q5, e mesmo em Q4 tendo mais da metade dos alunos realizando-a com sucesso, temos que o GC apresenta uma grande queda no seu percentual de sucesso.

Uma possível explicação para essas diferenças de comportamento pode ter sua origem no fato de que essas três equações eram mais sofisticadas que as anteriores, apresentavam mais incógnitas para se operar em ambos os membros das igualdades, o que parecia ser uma tarefa mais familiar e provida de significados para o GE que participou de nossa intervenção de ensino. Parece-nos que os alunos do GE estavam operando com os objetos algébricos sem grandes dificuldades, entendendo que as incógnitas estavam representando dados numéricos aos quais eles poderiam encontrar os valores.

Em síntese, os resultados obtidos nas equações nos dão indícios de que, tendo o GE participado do jogo e da introdução formal à Álgebra, este constituiu maiores significações ao trabalho manipulativo algébrico, como nos códigos nos quais as letras representavam dados do problema, e eles mesmos justificavam isso.

Problemas

Com relação ao desempenho dos alunos na parte referente aos problemas, observamos que o melhor desempenho de ambos os grupos foi na Q8. É um problema para o qual se pode efetuar uma conversão de registros (Duval, 2003) – da linguagem natural para a linguagem simbólica – o que produzirá uma equação, do tipo Q1, para ser solucionada. Por esse motivo, o sucesso nesta questão pode ser explicado de maneira análoga ao sucesso em Q1.

Diferentemente dos testes anteriores, os alunos não utilizaram as estratégias de “desfazer operações”, “tentativa e refinamento” ou “mista”. Os acertos nesta questão foram provenientes da resolução da equação pelo método de “muda de lado, muda de sinal”.

Tivemos duas outras questões, nesta parte de problemas, que também obtiveram percentuais de acertos superiores a 50% nos dois grupos, a Q6 que é um problema de comparação e a Q7 que é considerada uma composição de transformação (classificações segundo as estruturas aditivas da Teoria dos Campos Conceituais – MAGINA, 2001). Na primeira, notamos desempenhos idênticos nos dois grupos, porém, na segunda o GE supera o GC em 20 pontos percentuais.

Nas duas outras questões – Q9 e Q10 – os desempenhos dos grupos não atinge 50%, porém, temos o GE mantendo-se superior a 35% enquanto que o máximo que o GC atinge é 25%. Estes problemas são considerados comparações de 2ª extensão, segundo as estruturas aditivas da Teoria dos Campos Conceituais (Ibid), e por este motivo são mais complexos que os anteriores. Essa é uma possível justificativa para o baixo desempenho dos grupos.

Em síntese, a partir da tabela 4.3, observamos que, apesar dos desempenhos serem menores nos problemas – tanto no GE quanto no GC – o GE apresenta maior sucesso em todos eles, com resultados equiparáveis ao GC em duas questões (Q6 e Q8), porém nas demais as distâncias nos desempenhos se acentuam, variando de 15 a 20 pontos percentuais a favor do GE.

Mais uma vez levantamos a hipótese de que, uma possível explicação para esses resultados, pode se encontrar na participação (do GE) nas atividades com o jogo codificação-decodificação, a qual contribuiu para a constituição dos objetos da álgebra e evolução e amadurecimento do pensamento algébrico.

<u>Linguagem</u>

Nas questões de linguagem, os maiores desempenhos foram encontrados em Q11 e Q14. A Q11 era acerca da veracidade ou não de uma afirmação ($10 + x = x + 10$) e a Q14 apresentava um questionamento de ordem entre duas incógnitas – x e y – em duas igualdades ($7x + 22 = 109$ e $7y + 22 = 109$). Uma possível explicação para tal acontecimento pode ser o fato de que os alunos do GE, tendo participado do jogo, desenvolveram a habilidade de justificar afirmações (LINS, 1994-b) da álgebra por eles produzidas. Sendo assim, é possível que, após todas as atividades com a professora de classe e de nossas intervenções de ensino, as habilidades de justificar as afirmações algébricas tenham realmente contribuído para uma constituição efetiva dos objetos da Álgebra, que um conhecimento tenha sido realmente construído.

Referindo-nos novamente à tabela 4.3, podemos notar que as diferenças entre os dois grupos se acentuam em relação às perguntas finais. O GE apresenta resultados superiores a 55% nas cinco questões, tendo atingido 100% em duas delas. Já o GC apresenta desempenhos inferiores a 45% em três questões, tendo zerado em uma delas. Esses resultados nos levam a conjecturar que os códigos ofereceram subsídios para o GE, no que concerne a aquisição de significados para a Álgebra objeto, como propõe DA ROCHA FALCÃO (1993). O autor ainda propõe um outro ponto de vista para a Álgebra – Álgebra ferramenta – o qual acreditamos que possa ser incrementado pela professora de classe.

### 4.2.5 SÍNTESE DA ANÁLISE QUANTITATIVA

Analisando os desempenhos dos grupos nos três testes, pudemos notar que nos dois primeiros – pré-teste e teste-intermediário – os desempenhos de ambos os grupos eram semelhantes e baixos. Já no pós-teste, observamos um real crescimento nos dois grupos, porém a superioridade no desempenho do GE é constante nos três grupos de questões (equações, problemas e linguagem).

A análise quantitativa do experimento nos revelou as diferenças e semelhanças entre os dois grupos durante todo o seu desenvolvimento. Inicialmente temos os dois grupos partindo do mesmo patamar, segundo os resultados do pré-teste. Em seguida os grupos se diferenciam – GE diminui e GC cresce – mas com uma diferença muito pequena. Uma vez que o GC já estava trabalhando com a Álgebra formal, esperávamos um desempenho mais elevado para este grupo. Também para o GE, tínhamos expectativas de desempenhos melhores no teste intermediário, contando com eventuais benefícios do jogo, o que não ocorreu. Baseadas nestes resultados interpretamos que, o jogo sozinho não auxiliou os alunos a produzirem significados para os objetos algébricos, nem para suas propriedades. Já no pós-teste, ambos os grupos elevaram seus desempenhos, mas a superioridade do GE sobre o desempenho do GC aparece destacadamente com uma diferença de quase 20%.

Nas análises seguintes, dos problemas e equações, obtivemos comportamentos semelhantes em ambos os grupos. Na parte do teste que tratava de resolução de problemas os grupos partiram do mesmo patamar, cresceram no intermediário e cresceram novamente no pós-teste, tendo o GE resultados superiores ao GC em 12 pontos percentuais, nesta última parte do teste. Na parte do teste que tratava das equações, o desempenho inicial foi semelhante, os grupos diminuíram seu percentual de acertos e, no pós-teste, ambos cresceram muito, sendo que o GE novamente se diferenciou do GC em 25% a favor.

Quando nos focamos na parte final do pós-teste, as questões de linguagem, tivemos resultados realmente superiores em favor do GE em todas as questões dessa parte. O mesmo não pode ser falado para o desempenho do GC, que teve, inclusive, nulidade em uma das questões.

Quanto as estratégias de resolução utilizadas pelos grupos, estas foram semelhantes em todos os testes. No pré-teste e no teste-intermediário, tivemos três estratégias de resolução – “desfazer operações”, “tentativa e refinamento” e “mista”. Já no pós-teste a única estratégia utilizada, por ambos os grupos, foi a aprendida com a professora de classe – transposição de termos.

Parece-nos que a superioridade constante do GE em todas as atividades tem por suporte a participação dos alunos desse grupo no jogo codificação-decodificação, a qual parece ter contribuído para uma construção efetiva de significados para os objetos da Álgebra e suas propriedades manipulativas.

Numa tentativa de responder às nossas indagações e justificar nossos resultados, iniciaremos a análise da intervenção de ensino. Esta será dividida em duas partes, na primeira analisaremos o jogo (em seus dois momentos) – fase I – e a segunda, as atividades de “formalização” dos saberes algébricos envolvidos no jogo – fase II.

## 4.3 ANÁLISE DA INTERVENÇÃO DE ENSINO

Apresentaremos nesta seção o desenvolvimento dos encontros destinados à intervenção de ensino em suas duas fases – jogo e resolução de fichas de exercícios. Em conjunto, faremos um breve resumo do desenvolvimento dos encontros destacando apenas fatos importantes para nossa análise.

### 4.3.1 INTERVENÇÃO DE ENSINO – FASE I

Esta primeira fase da intervenção de ensino foi dedicada ao trabalho com o jogo codificação-decodificação. Como descrito no capítulo metodológico, esta fase constou de oito encontros, subdivididos em dois momentos, com quatro encontros cada. O segundo momento pode ser entendido como repetição do primeiro. Os três primeiros encontros foram destinados ao desenvolvimento do jogo e o quarto para o encerramento e discussão geral acerca do que havia ocorrido ao longo do jogo.

Chamamos de ENC1, ENC2, ENC3 e ENC4, os encontros destinados ao primeiro momento do jogo. Analogamente, chamamos de ENC5, ENC6, ENC7 e ENC8, os encontros do segundo momento do jogo.

Então, essa primeira fase da intervenção de ensino teve a seguinte distribuição:

| | Momento 1 | | | Momento 2 |
|---|---|---|---|---|
| ENC1 | Codificação I | | ENC5 | Codificação II |
| ENC2 | Decodificação I | | ENC6 | Decodificação II |
| ENC3 | Recodificação I | | ENC7 | Recodificação II |
| ENC4 | Discussão Geral I | | ENC8 | Discussão Geral II |

**Quadro 4.1:** Distribuição dos encontros da intervenção de ensino no GE.

Recordamos que por falta da utilização de tecnologia a qual permitisse registros mais acurados, a análise da intervenção de ensino não será minuciosa. Faremos uma análise das estratégias gerais e mais freqüentes, registradas nas fichas de atividades e, sempre que possível, complementaremos com informações advindas de anotações fruto de nossas observações *in locu*. A seguir, iniciaremos a análise da fase I que seguirá a ordem dos encontros semelhantes (ENC1 e ENC5, após ENC2 e ENC6, e assim por diante).

#### 4.3.1.1 Codificação (ENC1 e ENC5)

O que nos chamou a atenção em ENC1 foi o envolvimento dos alunos com a atividade de codificação, traduzidos pelos vários questionamentos que todos os alunos fizeram ao iniciarem os códigos, após a resolução aritmética dos problemas. Eles questionavam, por exemplo, como iniciar, quais letras utilizar ou como seriam as instruções necessárias para que uma outra dupla compreendesse o código em ENC2.

Como já descrevemos no capítulo 3, apenas fazíamos perguntas as quais auxiliassem o desenvolvimento da atividade como *“Por que fizeram essa conta?,* *O que cada valor representa na conta?, Como representar essa conta sem usar números?”.* Essa atividade de auxiliar nos questionamentos ocorria de maneira muito rápida, pois eram 18 duplas em sala de aula, nove do grupo A e nove do grupo B. Todas as duplas queriam codificar, fazer suas perguntas e não deixar que as outras duplas vissem o que estavam fazendo. Dentro do possível, todas as duplas foram auxiliadas em seus questionamentos e quando as questões eram percebidas como comuns a várias duplas fazíamos uma pausa coletiva para esclarecimentos, como foi no caso de relembrar que não poderiam utilizar números nos códigos e que não esquecessem de elaborar uma mensagem que explicasse como utilizar o código, isto é, não esquecessem de colocar uma legenda.

Uma dificuldade comum a todas as duplas foi o fato de não poder usar números na codificação. A grande questão era *“Como fazer uma conta sem números?”*. Para essa pergunta sempre sugeríamos que eles colocassem uma letra no lugar do número e que explicassem na mensagem o que aquela letra representava. Devido a estas dificuldades e também a ansiedade dos alunos ao iniciar esta primeira fase da intervenção, esse encontro durou mais do que havíamos programado.

Ressaltamos que, para analisarmos os códigos, estudaremos seus dois componentes: algoritmo e legenda. Chamamos de algoritmo do código a parte referente aos passos necessários para se chegar à solução (como, por exemplo, 1) C x P = T). A outra parte do código – a legenda – deveria conter a descrição dos termos utilizados no algoritmo.

Entre as dez duplas analisadas, seis codificaram com sucesso[10], duas codificaram com um erro no algoritmo, uma codificou completamente errado e uma não conseguiu codificar. Quanto às legendas, entre as nove duplas que de alguma maneira codificaram, apenas uma apresentou uma legenda clara e completa, as oito restantes fizeram legendas incompletas, com erros ou excessos.

A figura 4.4 apresenta um exemplo de codificação possível para o problema P1A, extraído do protocolo da dupla 7 no encontro 1.

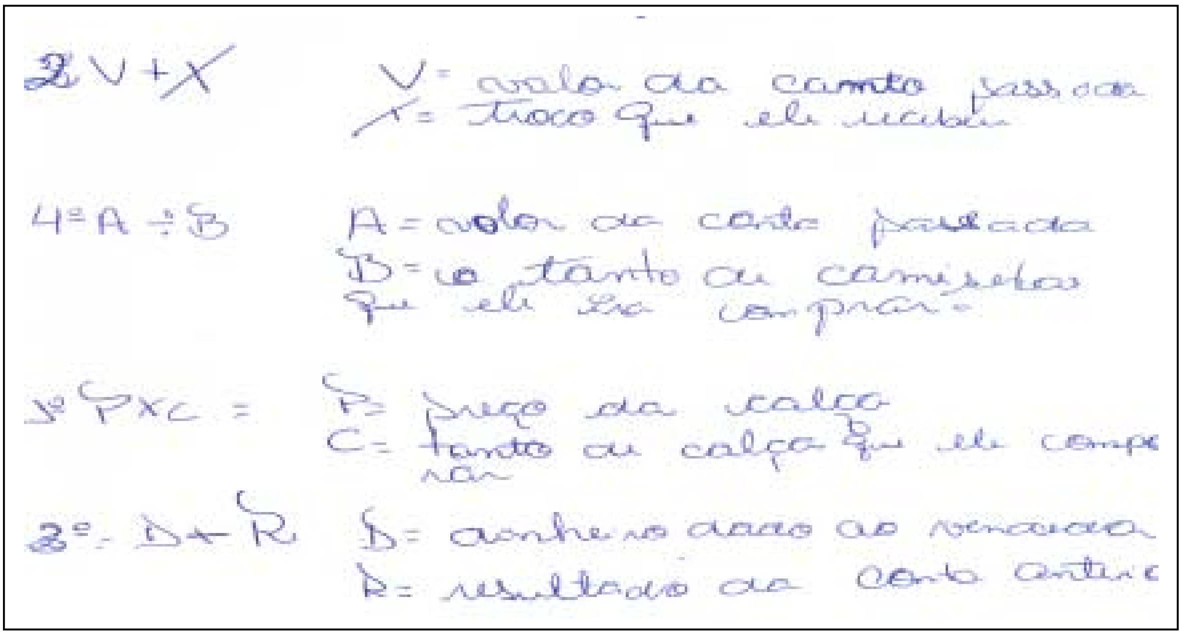

**Figura 4.4:** Exemplo de codificação e legenda para P1A, extraído do protocolo da dupla 7 em ENC1.

Observando a codificação elaborada no exemplo anterior (figura 4.4), podemos observar que a dupla faz uma clara separação entre o algoritmo e a legenda. O protocolo também nos permite interpretar que houve uma preocupação com a ordem das operações – primeira, segunda, etc. Percebemos ainda a ausência de um referente para cada operação, pois estas são apenas apresentadas (como: P x C), não havendo uma preocupação com

[10] Consideramos codificação com sucesso aquelas que apresentaram todos os passos para a solução do problema e não erraram operações. Por isso aceitamos erros na legenda, ausência do referente e/ou alguma repetição ou duplicidade de letras.

o referente (por exemplo, P x C = K). Tal fato não desvaloriza o trabalho elaborado pela dupla, apenas o destacamos porque nos testes temos problemas que envolvem comparação e para se obter sucesso neles é preciso identificar o referente da situação (MAGINA, 2001).

Por fim, podemos observar no protocolo acima que, talvez por não ter colocado um referente para cada operação, a dupla se preocupou em explicitar na legenda o que era cada termo do código (por exemplo, "*A = valor da conta anterior*").

Essa característica foi comum a todas as duplas, que se preocuparam muito em serem claras em suas legendas, ou seja, buscaram justificações para as afirmações (algoritmos) que haviam produzido na atividade.

A partir da análise das fichas deste primeiro encontro, fizemos um levantamento dos tipos de erros que surgiram na atividade de codificação. Ressaltamos que esses erros destacados não invalidam a produção das duplas, apenas enfatiza que a ausência deles tornaria os códigos mais completos.

Acreditamos ser necessário separar os erros em dois grupos – algoritmo e legenda. Os erros de algoritmo referem-se as faltas e excessos de letras, e também a problemas com os sinais operadores. Já os erros de legenda referem-se a ausências ou excesso de termos na legenda, falta de clareza quanto ao que cada termo estava representando ou utilização de números na mesma. O quadro abaixo (4.2) apresenta tal classificação.

| ERROS DE ALGORTIMO | | ERROS DE LEGENDA | |
|---|---|---|---|
| *Tipo 1* | Utilização de uma mesma letra para representar dois dados diferentes | *Tipo 5* | Utilização de números |
| *Tipo 2* | Utilização de letras diferentes para representar um mesmo dado | *Tipo 6* | Ausência de letras que apareceram no código |
| *Tipo 3* | Ausência de referente | *Tipo 7* | Letras com significados não claros |
| *Tipo 4* | Erro de sinal operador | *Tipo 8* | Letras que não foram utilizadas |

**Quadro 4.2:** Classificação dos erros apresentados nos códigos.

As figuras 4.5 e 4.6 apresentam exemplos de códigos, retirados dos protocolos de duas duplas (4 e 6), com alguns dos erros por nós levantados em ENC1.

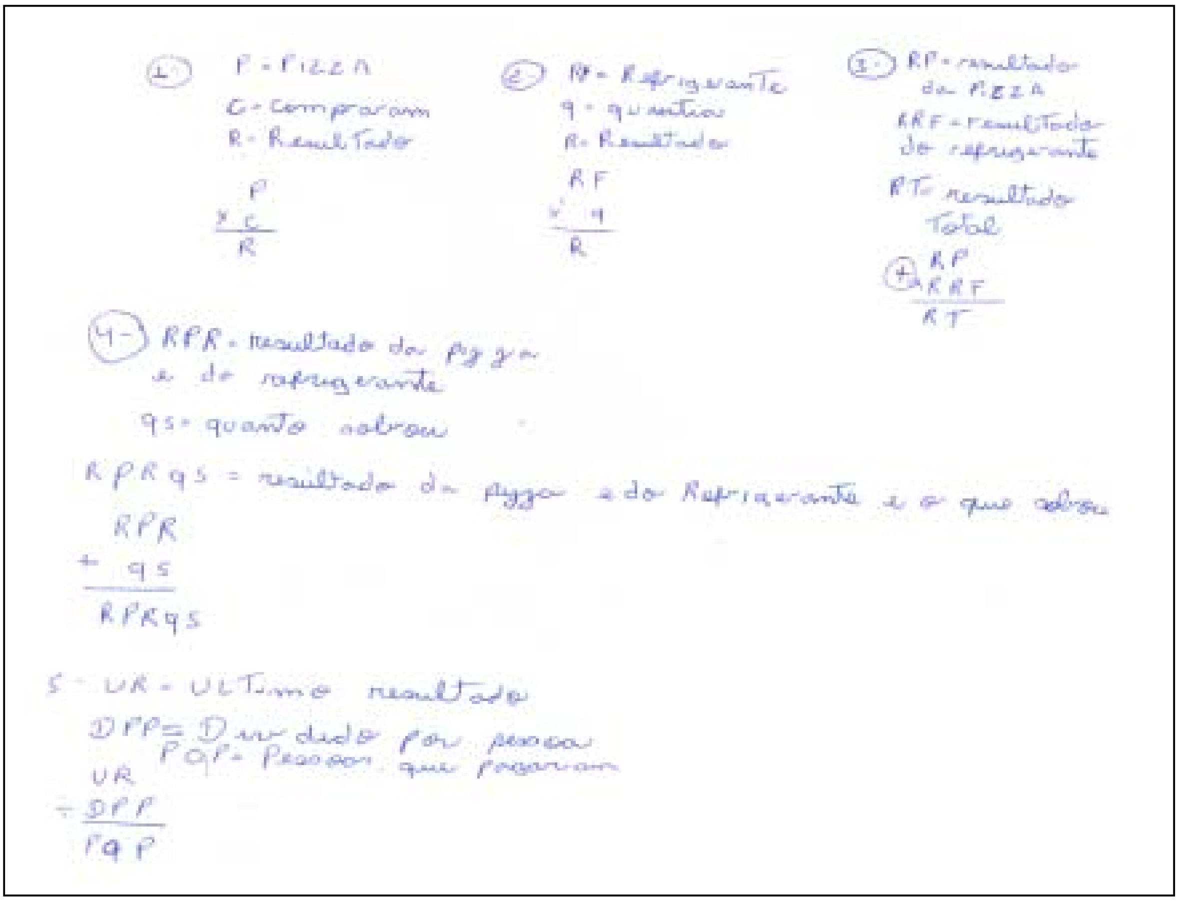


**Figura 4.5:** Exemplo de código para P1B, com os seguintes tipos de erros: 1, 2 e 7; extraído do protocolo da dupla 6 em ENC1.

O exemplo da figura 4.5 apresenta os erros do tipo 1, 2 e 7. Nos passos 1 e 2 aparece o erro tipo 1 – uma letra para representar dois dados diferentes – no qual a letra R está representando o resultado da conta 1 e da conta 2. Depois, nos passos 3, 4 e 5, observamos o erro tipo 2 – duas letras para o mesmo dado – no qual RT e RPR representam o mesmo valor, assim como RPRqs e UR. Nos passos 2, 3 e 7 observamos a presença do erro tipo 7 – letras com significados não claros – as quais necessitavam ser mais detalhadas para um entendimento mais rápido do código (de acordo com o objetivo do jogo).

Já na figura 4.6 (abaixo) é possível detectar os erros dos tipos 3, 5, 6 e 7.

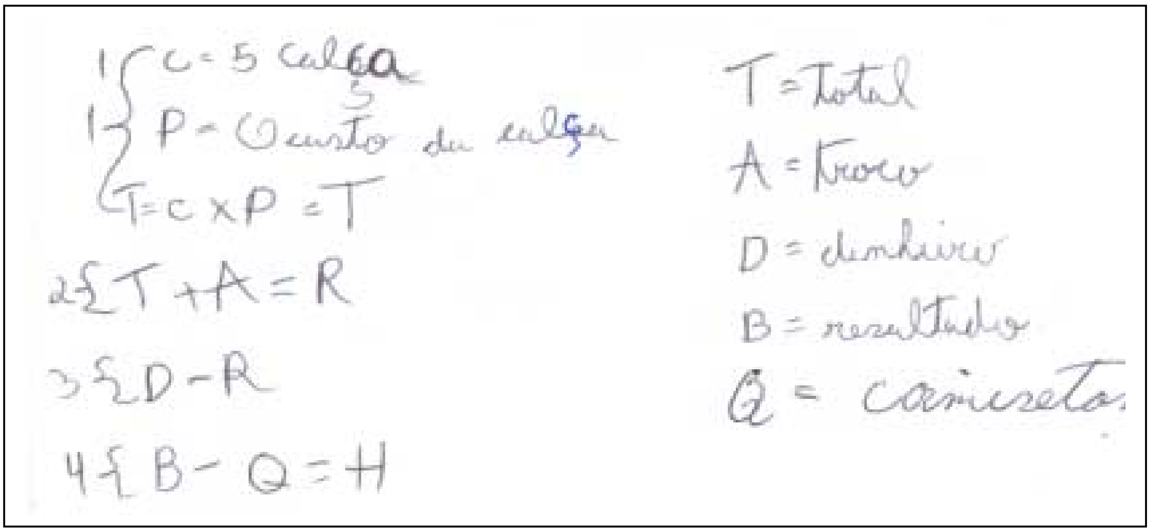


**Figura 4.6:** Exemplo de código para P1A, com os seguintes tipos de erros: 3, 5, 6 e 7; extraído do protocolo da dupla 4 em ENC1.

Observando a figura 4.6 observamos no passo 1, o erro tipo 5 – utilização de número na legenda – no qual a dupla descreve C como sendo cinco calças. No passo 3 observamos a presença do erro tipo 3 – ausência de referente – já que a operação está apenas indicada (D – R), sem qualquer menção ao referente da mesma. Na legenda podemos notar dois tipos de erros, o tipo 6 – ausência de letra na legenda – por exemplo, a letra R aparece no algoritmo e não aparece na legenda. O outro erro encontrado foi o do tipo 7 – letras com significados não claros – neste caso, parece-nos que todas as letras da legenda não apresentam significados suficientemente claros.

A tabela 4.4 apresenta o levantamento dos erros mais freqüentes em ENC1.

| ERROS | ALGORITMO | | | | LEGENDA | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| TIPOS | Tipo 1 | Tipo 2 | Tipo 3 | Tipo 4 | Tipo 5 | Tipo 6 | Tipo 7 | Tipo 8 |
| Nº de duplas | 1 | 4 | 3 | 0 | 2 | 5 | 8 | 2 |

**Tabela 4.4:** Freqüência dos erros na codificação em ENC1.

Observando a tabela acima (4.4), verificamos que houve maior número de erros na legenda (foram 17 na legenda contra 8 erros no algoritmo). A legenda consistia em explicar o código elaborado, isto é, dar significado aos algoritmos que haviam sido construídos pelas duplas na atividade, descrevendo o que cada letra representava. Tivemos nesse primeiro encontro a seguinte situação, as afirmações estavam sendo elaboradas – algoritmos – porém as justificações – legendas – parecem ter sido difíceis (LINS, 1994-b). Era esperado tal fato, uma vez que, este era o primeiro contato dos alunos do GE com as “coisas” da Álgebra.

Em ENC5 – codificação II – as duplas já trabalharam de maneira mais independente e o número de perguntas feitas foi muito inferior as de ENC1. Os alunos pareciam já não apresentar mais dificuldades para iniciar ou escolher qual letra utilizar. Também demonstraram mais independência para fazer suas legendas, as quais se tornaram mais completas e com menor número de erros do que em ENC1. Além disso, o tempo previsto para o encontro, diferentemente do que ocorreu em ENC1, foi suficiente.

Das dez duplas analisadas apenas uma codificou com erro de algoritmo. Este erro consistiu em uma troca de sinal operador, ao invés de adição a dupla utilizou uma multiplicação.

Constatamos uma melhoria das duplas no que se refere às codificações. De ENC1 para ENC5 tivemos um crescimento do número de duplas as quais codificaram corretamente. Aliás, tivemos a ausência de códigos errados ou não construídos em ENC5.

A tabela 4.5 apresenta uma comparação entre os tipos de erros apresentados em ENC1 e ENC5.

| ERROS | ALGORITMO | | | | LEGENDA | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Tipo 1 | Tipo 2 | Tipo 3 | Tipo 4 | Tipo 5 | Tipo 6 | Tipo 7 | Tipo 8 |
| ENC1 | 1 | 4 | 3 | 0 | 2 | 5 | 8 | 2 |
| ENC5 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 5 | 0 |

**Tabela 4.5:** Comparação entre as freqüências dos erros em ENC1 e ENC5.

Observando a tabela 4.5 notamos que, de um modo global, o número de erros reduziu em 44% de ENC1 para ENC5 (passou de 25 para 14). E mais, a tabela nos mostra que a maior redução no erro ocorreu na elaboração da legenda, que caiu de 17 para 8 (mais da metade).

Apesar dos erros nas legendas ainda terem sido em número superior aos dos algoritmos, percebemos um grande avanço no que diz respeito aos significados criados para os algoritmos dos códigos. Pudemos notar que as justificações para as afirmações produzidas, estavam sendo melhor elaboradas pelas duplas. Talvez alguns objetos da álgebra (como, por exemplo, o uso de letras para representar dados) já estivessem se constituindo neste momento.

A tabela 4.6 apresenta um resumo dos resultados obtidos pelas duplas de alunos ao final dos dois encontros de codificação.

| | ENC1 | ENC5 |
|---|---|---|
| Codificou | 6 | 9 |
| Codificou com 1 erro de algoritmo | 2 | 1 |
| Codificou errado | 1 | 0 |
| Não codificou | 1 | 0 |

**Tabela 4.6:** Resultados das dez duplas na codificação.

Notamos, na tabela 4.6, a melhoria nos desempenhos das duplas. Em ENC5 já não havia mais duplas que codificaram errado ou deixaram de codificar, temos nove códigos corretos e apenas um código com erro de algoritmo.

Tais resultados nos levam a interpretar que, aparentemente, a atividade de codificação foi parcialmente compreendida pelos alunos, pois de um modo geral todas as duplas construíram seus códigos. Parece-nos que estava faltando apenas melhorar a compreensão dos significados dos algoritmos e dos dados dos problemas, ou seja, a legenda ainda precisaria ser melhor discutida. Talvez a atividade da Álgebra formal, com a professora de classe, auxiliasse nesta construção de significados (LINS, 1994-b) para os objetos algébricos.

Para aprofundar nossa análise referente a essa possível interpretação acima discutida, vamos analisar os desempenhos das duplas nos encontros de decodificação.

#### 4.3.1.2 Decodificação (ENC2 e ENC6)

Nos encontros ENC2 e ENC6, as duplas tinham por tarefa decodificar as mensagens feitas em ENC1 e ENC5, respectivamente, aplicando na resolução de um novo problema, semelhante aos anteriores, porém com valores diferentes.

Em ENC2, as duplas apresentaram resistência nesta tarefa, seus primeiros impulsos foram de refletir sobre as idéias as quais os problemas traziam e buscar uma estratégia de resolução. Após muita insistência de nossa parte, as duplas abandonaram esta prática e buscaram compreender os códigos recebidos.

Cinco duplas realizaram a decodificação resolvendo o problema com sucesso. As cinco restantes não efetuaram a decodificação por diferentes motivos. Três delas receberam códigos com erros (lembramos que em ENC1 tivemos 25 erros na codificação), o que dificultou a decodificação. As duas outras duplas realmente não compreenderam como realizar a tarefa, não conseguiram estabelecer relação entre os dados do problema e o código apresentado.

Uma possível interpretação para tal ocorrência, além das destacadas acima, pode ser o fato de que a significação das afirmações (LINS, 1994-b) construídas na codificação ainda não estavam claras, ainda havia lacunas as quais poderiam ser sanadas no decorrer das atividades, enquanto as duplas discutiam suas produções ou nos momentos de discussões gerais. Mais adiante tentaremos buscar respostas a estas indagações.

Em ENC6 as duplas apresentaram um número maior de sucessos nas decodificações, mas ainda havia dificuldades para realizá-las. Neste encontro tivemos sete duplas decodificando com sucesso. Todas as três duplas que não realizaram a tarefa, não o fizeram por problemas de entendimento dos códigos recebidos, que continham algum tipo de erro.

O resumo destes encontros encontra-se na tabela 4.7.

| | ENC2 | ENC6 |
|---|---|---|
| Decodificou | 5 | 7 |
| Não decodificou | 5 | 3 |

**Tabela 4.7:** Resultados das dez duplas na decodificação.

Observando a tabela 4.7, percebemos que, mesmo havendo um crescimento real na codificação – que passou de seis para nove – as duplas ainda encontraram dificuldades no momento de decodificação. Isto nos mostra que as duplas estavam criando códigos, porém não estavam sabendo utilizar os mesmos por conterem alguns erros. Essa reincidência de não decodificações pode ter ocorrido pelo fato de que, as justificações ainda não estavam sendo suficientemente claras para produzir significados aos algoritmos. Talvez estivesse faltando mais discussões no espaço comunicativo (conforme LINS, 1999) da atividade.

Ao final destes encontros, as duplas deveriam escrever um bilhete para os autores dos códigos, sugerindo modificações ou expondo o que não entenderam, a fim de que estes códigos fossem melhorados em ENC3 e ENC7.

Os bilhetes encaminhados às duplas autoras dos códigos continham informações como *“Não entendi a primeira conta”, “Não entendi o que é N?”, “Está tudo misturado”, “O código não está bom, tem coisa repetida”, “Está faltando letra”,* além de outras menos pertinentes para nossa análise como *“A letra está horrível”*.

Objetivando buscar maiores subsídios para nossa análise, vamos analisar como se saíram os alunos nos encontros destinados a recodificação.

### 4.3.1.3 Recodificação (ENC3 e ENC7)

Os encontros ENC3 e ENC7 foram destinados a recodificação. As duplas receberam seus códigos e os bilhetes com críticas e sugestões encaminhados pelas duplas que os utilizaram em ENC2 e ENC6.

Em ambos os encontros as duplas se dedicaram a refazer seus códigos, corrigindo erros ou melhorando o que já haviam feito. Os códigos resultantes destes encontros eram, em sua maioria, melhores que os primeiros. Tal fato pode ser explicado uma vez que eles receberam sugestões e utilizaram outros códigos, percebendo as dificuldades e necessidades de aperfeiçoamento dos mesmos. Em outras palavras, podemos interpretar que os interlocutores estavam compartilhando um espaço comunicativo e criando crenças-afirmações (LINS, 1999). Para estas crenças-afirmações, estavam produzindo significados que, de acordo com o desenvolvimento da atividade, estavam constituindo os objetos da Álgebra que se encontravam no interior do jogo.

Apresentamos na tabela 4.8 um resumo destes dois encontros:

| | ENC3 | | | ENC7 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Código | Legenda | Código e Legenda | Código | Legenda | Código e Legenda |
| Não recodificou apesar de ter erro | --- | 2 | --- | --- | --- | --- |
| Recodificou e continuou com erro | 1 | 2 | --- | --- | --- | --- |
| Recodificou e consertou erros | --- | --- | 3 | --- | 2 | 1 |
| Recodificou para melhorar | --- | 1 | 1 | --- | --- | 1 |
| Não recodificou porque estava certo | --- | --- | --- | --- | --- | 6 |

**Tabela 4.8:** Resultados das dez duplas na recodificação.

Podemos notar um avanço das duplas de ENC3 para ENC7, pois em ENC7 dos quatro códigos que foram refeitos um foi somente para melhorá-lo e os demais ficaram corretos. Já em ENC3, dos oito que foram recodificados, três continuaram com erros.

A tabela 4.9 apresenta uma comparação entre as duplas no que concerne ao número de erros nos encontros de codificação e recodificação (encontros 1, 3, 5 e 7). Os encontros 2 e 6 não foram citados nesta tabela, pois não tratavam de codificações e erros, e sim de reconhecimento dos códigos elaborados.

| | | ALGORITMO | | | | LEGENDA | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Tipo1 | Tipo2 | Tipo3 | Tipo4 | Tipo5 | Tipo6 | Tipo7 | Tipo8 | *TOTAL* |
| MOMENTO 1 | ENC1 | 1 | 4 | 3 | 0 | 2 | 5 | 8 | 2 | *25* |
| | ENC3 | 1 | 4 | 3 | 0 | 0 | 3 | 7 | 1 | *19* |
| MOMENTO 2 | ENC5 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 5 | 0 | *14* |
| | ENC7 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | *4* |

**Tabela 4.9:** Comparação entre as freqüentes dos erros em ENC1, ENC3, ENC5 e ENC7.

A tabela 4.9 mostra uma grande redução no número de erros cometidos pelas duplas de um momento para o outro nas codificações. No geral, os erros passaram de 25 em ENC1 – momento inicial do jogo – para 4 em ENC7 – último encontro do segundo momento do jogo.

Observamos que, o ponto forte da atividade de codificação, foi a construção da legenda. Inicialmente esta apresenta 17 erros (contra oito de algoritmo), porém ao final dos encontros temos apenas um erro na mesma (contra três de algoritmo). Novamente aqui, podemos interpretar os efeitos dos interlocutores (LINS, 1994-b) da atividade – colegas de classe, as pesquisadoras e o próprio código elaborado. Estes estavam proporcionando às duplas um crescimento real na produção da legitimidade dos significados para os objetos do jogo.

Lembramos que esta evolução na legenda era nosso principal objetivo, uma vez que justamente nesta parte do código se revelaria para nós a construção e evolução dos significados atribuídos aos objetos algébricos, que as duplas estavam elaborando. Quanto aos erros de algoritmo estes ainda poderiam ocorrer, pois a formalização da Álgebra ainda estaria por ser trabalhada pela professora da classe.

Na comparação entre os tipos de erros mais freqüentes, apresentada na tabela acima (4.9), temos que, quatro dos oito tipos de erros, sumiram. Dos quatro que ainda ocorreram três eram de algoritmo e um de legenda, condizendo com nossos objetivos e expectativas. Estes erros tiveram apenas uma incidência cada, sendo que estas foram cometidas por duas das dez duplas do estudo (D3 com três erros – tipos 1, 3 e 7 – e D8 com um erro – tipo 2).

Em ENC1 tivemos todas as dez duplas cometendo algum dois oito tipos de erros, totalizando 25 ocorrências, das quais 17 eram de legenda e 8 de algoritmo. Ao final de ENC7 tivemos apenas duas duplas cometendo quatro dos oito tipos de erros iniciais, sendo três de algoritmo e apenas um de legenda.

Para finalizar a análise da primeira fase da intervenção de ensino, nos deteremos agora nas discussões que encerraram os dois momentos do jogo.

#### 4.3.1.4 Discussão Geral (ENC4 e ENC8)

Cada momento do jogo foi encerrado com uma discussão geral, que ocorreram nos encontros 4 e 8. Na primeira discussão os alunos demonstraram-se tímidos para participar da atividade, então iniciamos colocando algumas das questões as quais eles mesmos haviam sugerido uns aos outros (conforme citado na análise de ENC2). As questões giraram em torno dos tipos de erros e dificuldades encontradas ao utilizar os códigos. Algumas eram seguidas de exemplos na lousa, estando certo ou não, para que se discutisse acerca das possibilidades. Aos poucos, eles começaram a participar e também citavam exemplos e resolviam na lousa.

No encontro 8, a discussão foi melhor encaminhada pelos próprios alunos, os quais já estavam se sentindo mais confiantes e a nossa presença já não os inibiam. Neste encontro, as dificuldades e erros que eram apresentados foram em menor quantidade, uma vez que eles apresentaram um maior sucesso nas codificações. Por isso, nesse encontro pudemos conversar um pouco sobre a utilidade dos códigos como uma maneira mais rápida de resolver problemas.

Apresentaremos agora um breve resumo do que foi a primeira fase da intervenção de ensino.

#### 4.3.1.5 Síntese da Fase I da Intervenção de Ensino

A análise da primeira fase da intervenção de ensino nos trouxe alguns dados relevantes no que concerne a legitimidade atribuída aos objetos algébricos. No geral, pudemos observar em todos os encontros do segundo momento do jogo, avanços significativos no desenvolvimento das atividades e uma grande redução do número de erros cometidos (de 25 para 4) bem como de duplas que os cometiam (de 10 para 2).

Nos encontros de codificação, as principais dificuldades encontradas foram as justificações para os algoritmos criados. Tal dificuldade pode estar relacionada ao fato de os alunos não conhecerem os objetos da Álgebra, até então desprovida de significados para eles.

No decorrer dos encontros do jogo, os alunos tiveram oportunidade de participar de um espaço comunicativo – compartilhando interlocutores – no qual foram produzidas crenças-afirmações e suas respectivas justificações. Tais justificações tinham por objetivo tornarem legítimos os objetos algébricos que surgiam nas afirmações (LINS, 1994-b).

A seqüência da atividade – inicialmente em duplas produzindo seus códigos, troca de códigos entre as duplas, momento de refazer suas produções e, finalmente, as discussões gerais – pode ter contribuído para uma construção efetiva de significados para os objetos da Álgebra, conforme nos denunciam os resultados finais que comparam os erros ocorridos na atividade, bem como os desempenhos obtidos no pós-teste. Estes últimos já foram discutidos no item destinado a análise dos testes.

Na análise dos erros da atividade de codificação, discutidos na seção anterior, o que nos chamou a atenção foi a evolução das duplas no que se refere a produção de justificativas para seus algoritmos, qual seja, melhoraram significativamente as legendas de seus códigos. Tal fato nos permite interpretar que a atividade com o jogo codificação-decodificação contribuiu para a constituição dos objetos da Álgebra como legítimos e compostos de propriedades específicas.

Buscando concluir nossas análises, estudaremos a seguir os resultados obtidos na segunda fase da intervenção de ensino.

### 4.3.2 INTERVENÇÃO DE ENSINO – FASE II

A segunda fase da intervenção de ensino constou de quatro encontros, os quais foram utilizados para desenvolver um trabalho que relacionasse o jogo com as atividades algébricas aprendidas com a professora de classe. Neste trabalho foram utilizadas fichas com exercícios, os quais envolviam os códigos aprendidos e outras atividades já descritas em nosso capítulo metodológico e que se encontram na integra nos anexos V, VI e VII.

Os encontros seguiram a seguinte seqüência:

- ENC9: Trabalhando com Códigos
- ENC10: Códigos e Equações
- ENC11: Codificando e Equacionando Problemas
- ENC12: Discussão Geral

Em ENC9 – Trabalhando com Códigos – entregamos a ficha 1 para ser resolvida em duplas. Tal ficha continha quatro questões. A primeira questão apresentava um problema e seu respectivo código e solicitava que se resolvesse o problema utilizando o código, em outras palavras, solicitava que a decodificação do mesmo.

Os alunos não apresentaram dificuldades em solucionar essa questão. Todas as duplas a resolveram corretamente sem muito auxílio, apenas em alguns cálculos. Uma possível interpretação para este sucesso, pode provir da experiência com o jogo e com a formalização algébrica oferecida pela professora de classe. O que estava sendo oferecido na questão não eram mais “coisas” sem significado, e sim objetos constituídos dentro do conhecimento algébrico.

A questão 2 era composta de três perguntas sobre a utilização dos códigos; o que a letra representava, se poderia ser outra letra e se a letra poderia ter outros valores. Novamente não tivemos respostas erradas, as duplas apresentaram respostas dizendo que *“A letra C representa um número que eu vou descobrir quando resolver o problema”* ou simplesmente *“A letra representa um número”*. Quanto a segunda pergunta as repostas variaram em torno de *“Posso usar a letra que eu quiser”*, e à terceira pergunta: *“Para cada problema eu poderia achar um valor diferente para a letra”.* Tais resultados, obtidos nesta questão, podem servir para reafirmar as interpretações acima discutidas – os objetos do jogo foram constituídos como objetos do conhecimento algébrico – ou seja, passaram a ter significado para os alunos.

A terceira questão apresentava o código do problema 1 reescrito em unidade, e solicitava que fosse utilizado para resolvê-lo novamente. Nesta atividade os alunos tiveram muita dificuldade em utilizar o código e muitos acabaram resolvendo novamente como na questão 1, em vários passos. Quando questionados sobre qual era mais fácil, se em vários passos ou reescrito em unidade, os alunos foram unânimes em afirmar que em vários passos era muito melhor: *“É mais fácil resolver o problema como fiz no exercício 1, uma conta de cada vez. Assim tudo junto é mais complicado”* (SIC D7).

Por conseqüência, a questão 4 também não foi simples para os alunos. Eles tiveram muitas dificuldades em reescrever o código em unidade e muitos não conseguiram. Das dez duplas investigadas apenas duas fizeram a atividade com sucesso.

Uma possível justificativa para o desempenho nestas duas questões, pode ser encontrada no fato de que o núcleo de atividades – no qual os códigos foram produzidos – não ofereceu subsídios para que as simplificações dos mesmos fossem tornadas legítimas. A atividade de codificação não trabalhou com estipulações globais, as quais poderiam vir a constituir a simplificação como transformação possível de se realizar (sem requerer para a mesma, justificações dentro do campo semântico do jogo da codificação e decodificação).

No encontro seguinte, ENC10 – Códigos e Equações – entregamos a ficha 2 para também ser resolvida em duplas. Tal ficha continha também quatro questões, as quais continuamos a seqüência de numeração da ficha anterior. As questões 5 e 6 apresentavam problemas codificados com um erro em cada. Na questão 5 o erro era o uso de uma mesma letra para representar dados diferentes do problema e na 6, o erro era utilizar duas letras diferentes para representar o mesmo dado. Salientamos que tais erros obtiveram freqüência em todas as atividades do jogo.

Os alunos resolveram as duas questões sem nenhuma dificuldade. Tal fato pode ser interpretado como um resultado positivo da fase I da intervenção de ensino, a qual buscou discutir os erros e dificuldades ao final de cada momento do jogo. Neste caso, levantamos a hipótese de que as justificações tornaram-se legítimas no núcleo da atividade.

A questão 7 apresentava um código reescrito em unidade, do qual se conheciam os valores da resposta e de todos os outros dados com exceção de um. O nosso objetivo era que os alunos substituíssem os valores e resolvessem a equação que surgiria.

Das dez duplas apenas três não realizaram a atividade desta maneira e sim utilizando a estratégia de “desfazer as operações”, citada na análise dos testes. As outras sete duplas substituíram os valores e resolveram a equação proveniente desta substituição. Parece-nos que os objetos código e equação foram percebidos como constitutivos do conhecimento algébrico, tendo assim, propriedades semelhantes.

A última questão desta ficha consistia em codificar a afirmação *“Havia n lápis vermelhos e b lápis azuis em uma caixa, totalizando z lápis”*. Tal afirmação não apresenta números e, quando codificada, gera uma sentença matemática, na qual *n, b* e *z* podem assumir quaisquer valores que tornem a sentença (n + b = z) verdadeira.

A atividade foi realizada corretamente por todas as duplas. Parece-nos que os alunos já estavam pensando algebricamente neste momento, e arriscamos-nos a levantar o uso da característica analítica do pensamento algébrico, na qual as incógnitas são tratadas como dados (LINS, 1994 e LINS & GIMENEZ, 1997).

Na terceira ficha, entregue em ENC11 – Codificando e Equacionando Problemas – havia três problemas seguindo o nível de dificuldades fácil, médio e difícil conforme descrito no capitulo metodológico. Estes deveriam ser codificados (equacionados) e resolvidos. Tal tarefa foi realizada satisfatoriamente pelas duplas, com acertos de 100%, 90% e 50% respectivamente. Novamente nos parece reafirmar o uso das três características do pensamento algébrico, conforme os autores acima citados. Tal desempenho pode ser interpretado como uma constituição efetiva dos objetos da Álgebra, que possuem propriedades sustentadas pela própria Álgebra. Talvez um sucesso maior não tenha ocorrido devido a complexidade da conversão de registros (DUVAL, 2003) do terceiro problema.

Além destes problemas, a ficha trazia mais três questões, duas delas envolviam a resolução de equações, as quais os alunos não apresentaram dificuldades para realizar. A outra questão solicitava que eles criassem um texto para uma dada equação. Sete das duplas optaram por seguir o “modelo” de um dos problemas anteriores e apresentou como resposta *“Um número multiplicado por dois e depois somado a 13 resulta em 72”.* As três duplas restantes apresentaram respostas seguindo a equação tal qual era fornecida: *“Duas vezes um número mais treze é igual a setenta e dois*” (SIC D3).

Ambas as respostas acima estão corretas. Na primeira, o fato das duplas terem seguido um “modelo” pode significar que compararam o mesmo com a equação e encontraram semelhanças entre eles. Tal ocorrência pode estar indicando uma significação efetiva ao pensamento algébrico. Na segunda resposta, o fato de terem escrito tal qual a ordem da equação pode estar nos mostrando que a “leitura” da mesma foi compreendida, adquiriu um significado.

O encontro 12 foi dedicado a realização – na lousa – das atividades das fichas que obtiveram maior índice de erros. Essas questões – 3 e 4 da ficha 1 e 13-b da ficha 3 – já foram discutidas no decorrer da análise acima. Além disso, levantamos discussões sobre outras dúvidas que surgiram na realização das fichas dos últimos três encontros.

#### 4.3.2.1 Síntese da Fase II da Intervenção de Ensino

A segunda fase de nossa intervenção de ensino transcorreu sem surpresas ou problemas. Com exceção de três questões (3 e 4 da ficha 1 e a 13-b da ficha 3), as demais obtiveram ótimos resultados e foram resolvidas sem dificuldades.

As atividades dessa fase ofereciam oportunidades para que as duplas colocassem em trabalho a aprendizagem desenvolvida durante o jogo e/ou durante as aulas de Álgebra com a professora de classe. Tivemos um retorno global positivo, no que se refere aos desempenhos nas atividades. Acreditamos que tais desempenhos se devam ao fato de terem sido trabalhadas ambas as atividades no GE – o jogo e a formalização com a professora.

Quanto às duas questões que obtiveram um desempenho baixo, estas eram questões que extrapolavam os conhecimentos algébricos desenvolvidos até então. Segundo os resultados obtidos, provavelmente seria necessário desenvolver mais atividades nesse sentido, que levassem os alunos a constituírem o objeto "reescrever o código em unidade" como uma legítima atividade algébrica.

A seguir, baseadas nas análises desenvolvidas no presente capítulo, procuraremos fundamentar nossas conclusões.

# CAPÍTULO 5

# CONCLUSÃO

## 5.1 INTRODUÇÃO

Nossa pesquisa teve por objetivo investigar a construção de significados para a linguagem algébrica com o auxílio do jogo codificação-decodificação. Para tal, iniciamos esta dissertação apresentando uma exposição dos motivos que nos levaram a elaborá-la, nossa problemática e objetivos, bem como de sua relevância para o meio acadêmico e científico (capítulo 1). Na seqüência, buscamos subsídios teóricos que pudessem nos auxiliar, tanto na construção do experimento quanto na sua análise. Partimos de NOBRE (1996), que realizou um estudo de caso – com duas duplas – utilizando o jogo codificação-decodificação. Retiramos daí a idéia inicial do jogo e elaboramos nossa estratégia de ação que foi composta de instrumentos diagnósticos e intervenção de ensino, cuja primeira fase era composta pelo jogo.

Aproveitamos de sobremaneira as idéias teóricas de VERGNAUD sobre os Campos Conceituais, cuja premissa é que o conhecimento emerge da resolução de problemas, o que nos auxiliou quanto ao tipo de questão que utilizaríamos em nossos instrumentos diagnósticos e na intervenção de ensino. O Modelo dos Campos Semânticos, de LINS (1994-b), nos forneceu subsídios para a análise dos dados e das produções que estavam sendo elaboradas pelos alunos. LINS & GIMENEZ (1997) nos apresentam argumentos que reforçaram a metodologia de aplicar todas as tarefas da intervenção de ensino em duplas. Duval (2003) e os Registros de Representação Semiótica auxiliaram-nos na elaboração e análise das dificuldades das questões, buscando prever em qual ponto da tarefa estariam as dúvidas ou o porquê de uma questão ter maior número de sucessos que outras.

Além de NOBRE (1996), outros trabalhos na área de ensino de Álgebra, nos auxiliaram enquanto fontes de pesquisa com resultados já comprovados. Por exemplo, DA ROCHA FALCÂO (1993, 1994 e 1997) que discute a Álgebra sob dois pontos de vista, como objeto matemático e como ferramenta matemática. Também destaca como principal função da Álgebra a grande serventia na reescrita de um problema apresentado em linguagem natural, para a linguagem algébrica. Já as pesquisas de KIERAN (1992, 1994 e 1997) estão sempre relacionadas ao ensino e aprendizagem de Álgebra. Estuda as dificuldades que os alunos apresentam em resoluções de equações e as classifica. Também propõe o uso de computadores em sala de aula e que o início do estudo algébrico deva começar nas primeiras séries do Ensino Fundamental. FILLOY & ROJANO (1989), GALLARDO & ROJANO (1998), apresentam os dados de suas pesquisas cujo foco principal é a aquisição da linguagem algébrica, mais precisamente estudam a transição do pensamento aritmético para o algébrico e suas dificuldades.

De posse de nosso quadro teórico definido, bem como das leituras das pesquisas inspiradoras e relacionadas ao nosso estudo, construímos a metodologia de trabalho, a qual foi composta de três instrumentos diagnósticos e uma intervenção de ensino dividida em duas fases – a primeira constituída pelo jogo codificação-decodificação e a segunda por atividades que relacionavam o jogo com a Álgebra formal. Tivemos por público alvo duas 6ªs séries do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública municipal de São Paulo, compostas por 35 alunos em média. Destas, uma foi o grupo experimental, que participou dos testes e da nossa intervenção de ensino. A outra foi o grupo de controle, que também participou dos testes e teve intervenção com a professora de classe, seguindo o cronograma normal da série.

O passo seguinte à realização do estudo foi a análise dos dados dele obtidos. Esta análise nos forneceu subsídios suficientes para chegarmos no presente capitulo, no qual apresentaremos as conclusões retiradas dela. Visando melhor organização do capítulo, dividimo-lo em quatro seções. A primeira que se refere a esta introdução. A segunda que apresentará uma síntese dos principais resultados, os quais encontram-se detalhados no capítulo anterior. A terceira seção retomará a nossa questão de pesquisa com o intuito de respondê-la. E, por fim, na quarta seção, apresentaremos algumas sugestões para futuros trabalhos, os quais vieram a mente após reflexão sobre o estudo que realizamos.

## 5.2 SÍNTESE DOS RESULTADOS

Para destacar os principais resultados de nossa análise dividimos esta seção em duas partes. A primeira descreverá os resultados dos testes e, a segunda, os resultados da intervenção de ensino.

<u>TESTES</u>

A análise dos desempenhos dos grupos nos três instrumentos diagnósticos mostrou que nos dois primeiros – pré-teste e teste-intermediário – os desempenhos de ambos os grupos foram semelhantes e baixos. Porém, no pós-teste observamos um real crescimento nos dois grupos, sendo que o GE apresentou desempenho superior nos três tipos de questões – equações, problemas e linguagem – com maior destaque para este último tipo, no qual superou o GC em 39%.

A evolução nos desempenhos dos grupos também pôde ser notada nas estratégias utilizadas para resolver as questões dos testes. Nos dois primeiros testes os alunos utilizaram estratégias espontâneas, de acordo com os conhecimentos que haviam acumulado até então – “desfazendo operações”, “tentativa e refinamento” e “mista”. Já no pós-teste a estratégia utilizada foi o método de resolução de equações aprendida com a professora de classe. Não houve, neste último teste, a utilização de nenhuma das três estratégias anteriormente citadas.

Analisando os resultados do pós-teste com mais minúcia, notamos que o percentual mínimo de acertos do GE foi 59%. Este valor é mais do que o percentual máximo de acertos do GC, que foi de 58%. Separando as questões por grupo tivemos: nas equações 82% do GE contra 58% do GC, nos problemas 59% do GE contra 47% do GC e nas questões de linguagem 84% do GE contra 45% do GC.

Com esses resultados acima, pudemos perceber que o melhor desempenho do GC foi na resolução de equações e o pior foi na compreensão da linguagem algébrica. Já o GE obteve seu melhor desempenho nas questões de linguagem o que demonstra que estes alunos estavam produzindo significados para os objetos algébricos enquanto que no outro grupo – o GC – os alunos estavam obtendo seus melhores desempenhos na parte processual de busca da solução. Os alunos do GC estavam trabalhando com objetos para os quais não haviam produzido justificações (LINS, 1994-b), estavam operando com "coisas" que não sabiam o que eram, apenas calculavam o valor do X.

Quanto ao menor desempenho apresentado pelo GE – resolução de problemas – assim como DUVAL (2003) coloca, há poucos trabalhos em sala de aula que privilegiem a conversão de registros. O que há, na maioria das escolas, é uma ênfase ao trabalho com tratamentos (conforme descrito no capítulo 2). Tal atitude, por parte dos professores, poderia explicar o sucesso na resolução de equações, qual seja, utilização de vários tratamentos dentro do registro algébrico. Essa mesma atitude poderia explicar o fracasso dos alunos na resolução de problemas por meio de equações, cuja tarefa requer, antes que se efetuem vários tratamentos, que se escreva uma equação realizando uma conversão entre o registro da linguagem natural e o registro algébrico.

Os alunos do GE, ao obterem um elevado percentual de acertos nas questões de linguagem, demonstraram estar operando com objetos que possuíam legitimidade dentro da formalidade da Álgebra. E ainda mais, que estavam entendendo qual era o *X da questão*.

INTERVENÇÃO DE ENSINO

Nesta parte estaremos nos referindo apenas ao trabalho do GE. Este, após o término da primeira fase da intervenção de ensino apresentou resultados positivos, como a diminuição significativa do número de erros cometidos na codificação, principalmente os que se referiam à legenda. Isto nos levou a interpretar que a constituição de significados para os objetos algébricos foi melhorada no decorrer da atividade. As justificações para as crenças-afirmações (LINS, 1994-b) tornaram-se coletivas no espaço comunicativo (LINS, 1999) da atividade.

O principal resultado desta fase da intervenção foi que, além dos erros de codificação diminuírem passando de 25 para 4, a incidência de duplas que cometiam esses erros caiu de 10 para 2. Dos tipos de erros que persistiram, apenas um era referente a legenda, os outros eram referentes a representação. Assim, podemos interpretar que as justificações (LINS, 1994-b) – legendas – elaboradas pelos alunos para seus códigos se aperfeiçoaram ao longo do experimento, conforme nosso objetivo.

A segunda fase da intervenção de ensino, a qual foi constituída de atividades que ofereciam oportunidades para as duplas utilizarem os conhecimentos adquiridos no jogo e na formalização da Álgebra, desenrolou-se sem problemas e dentro das previsões feitas no capítulo metodológico. As duplas realizaram as atividades com sucesso, o que só não ocorreu em questões que exigiam além do que havia sido trabalhado (como as 3 e 4 da ficha 1), mas isto também havia sido previsto por nós. Como citamos anteriormente, o trabalho efetivo com registros de representação poderia sanar tais dificuldades que, no caso das questões aqui citadas, poderiam ser resolvidas utilizando-se tratamentos

(DUVAL, 2003). Porém tais tratamentos não são comumente trabalhados em sala de aula como o são os de resolução de equações.

## 5.3 RESPONDENDO NOSSA QUESTÃO DE PESQUISA

A partir da análise dos resultados, apresentada no capítulo 4, cujos principais achados estão sintetizados na seção anterior, responderemos nossa questão de pesquisa, a qual retomamos:

> **Quais as contribuições que o jogo codificação-decodificação traz para a construção de significados da linguagem algébrica?**

Como já dissemos anteriormente, responderemos nossa questão de pesquisa baseadas na análise obtida ao longo de todo o experimento, desde a fase inicial – pré-teste – até a fase final – pós-teste.

Lembramos inicialmente que medimos as contribuições do jogo por dois termômetros – de onde o GE saiu para onde ele chegou (intra-grupo) e sua comparação com o GC que não participou do jogo (inter-grupo).

A análise do resultado do teste intermediário mostrou que o GE nada evoluiu em relação ao pré-teste. Recordamos que os resultados do pré-teste foram baixos nos dois grupos. Com isto, podemos concluir que o jogo por si só não produziu resultados significativos quanto a resolução de equações e problemas, isto é, o jogo desacompanhado de uma formalização algébrica, não gerou evolução nos desempenhos do GE no teste-intermediário.

O GC, que havia iniciado o trabalho de resolução de equações com a professora de classe, não obteve uma evolução superior a um ponto percentual entre o pré-teste e o teste intermediário. Após suas aulas inicias de resolução de equações, o GC também não evoluiu seu desempenho neste segundo teste.

Houve então, continuidade nas intervenções de ensino (tanto GE quanto GC). Ambos os grupos tiveram aulas sobre resolução de equações e problemas com a professora de classe. Enquanto o GC continuou com essas aulas, o GE voltou a trabalhar com nossa intervenção de ensino – fase II. Após estas aulas, os resultados do pós-teste mostraram a grande evolução de desempenhos, intra e inter-grupos, do GE. O GC também apresentou uma evolução intra-grupo, porém tal evolução teve por desempenho máximo o respectivo mínimo do GE.

Olhando os resultados do pós-teste e a análise qualitativa do desempenho dos alunos no experimento, é possível concluir que, se por um lado o jogo por si só não dá conta da construção de significados para a linguagem algébrica, por outro lado o ensino formal, tal qual é apresentado na maioria das escolas, está muito mais longe de dar conta.

Uma segunda conclusão sobre a atividade é que, se o jogo codificação-decodificação sozinho não dá conta da constituição de significados para a linguagem algébrica, combinado com a formalização escolar, temos fortes indícios para defender a idéia de que este jogo produz significativos avanços para a introdução algébrica, contribuindo principalmente para:

1. Bom desempenho na resolução de problemas, já que 60% dos alunos de nossa amostra experimental passou a ter sucesso nessas atividades;
2. Desempenho ainda melhor na resolução de equações, já que 82% tiveram sucesso nessas atividades (nesse caso entendemos que o fato de manipular letras na criação de códigos tornou o trabalho manipulativo com as equações mais familiar);
3. E, de sobremaneira, apropriação da linguagem algébrica, esta teve um sucesso de 84%.

Associando o grande resultado na linguagem com a resolução de equações, nos sentimos confortáveis para concluir que o trabalho no qual o aluno tinha de codificar objetos com letras fez com que essa letra passasse a ter significado como incógnita para uma determinada situação, entendendo a Álgebra como uma ferramenta para modelagem e resolução de problemas – segundo um dos pontos de vista apresentados por DA ROCHA FALCÃO (1993, 1994, 1997) em suas pesquisas. Observando a Álgebra sob esse ponto de vista, de que é uma ferramenta para resolver situações problemas e modelar situações, os alunos do GE trabalharam com isso efetivamente ao criarem seus próprios códigos, então os *x's* e *y's* ganharam significados.

Levantamos duas hipóteses conclusivas e não excludentes sobre o desempenho na resolução de problemas não ter obtido um sucesso maior. A primeira das dificuldades poderia ter sua origem nas deficiências de leitura e interpretação dos problemas (o que é uma questão que vai além dos domínios da Matemática). A segunda das dificuldades, seria proveniente da incapacidade de efetuar a conversão de registros (DUVAL, 2003) entre linguagem natural e linguagem simbólica, compreendendo a conservação das mesmas características (ou as principais) dos objetos em questão. Superadas essas dificuldades, o trabalho de manipulação algébrica propriamente dita transcorria sem maiores dificuldades.

## 5.4 SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS

No decorrer da análise algumas questões visitaram nosso pensamento sobre possíveis trabalhos ligados ao nosso tema ou que dessem continuidade a ele.

Um primeiro questionamento que nos ocorreu foi o seguinte: S*eria possível desenvolver tal estudo com as séries iniciais do Ensino Fundamental?* Para responder a esta questão, o estudo poderia ser iniciado com alunos da 4ª série (por exemplo), os quais seriam submetidos a testes que visassem fazer diagnósticos referentes a questões de linguagem, sem se deter muito com a resolução de equações e problemas. Estes últimos até poderiam constar nos testes, porém em menor número, apenas para um estudo de segunda importância (neste caso). A primeira fase da intervenção de ensino poderia ser análoga, já a segunda com reflexões e explorações baseadas nos próprios códigos elaborados, sem que fosse necessário estudar a Álgebra formal, apenas as questões relacionadas à linguagem algébrica. Se o interesse fosse estudar o desempenho do grupo na 4ª série um mestrado seria o suficiente. Mas se o interesse fosse além de estudar o grupo, acompanhá-lo nas séries seguintes do Ensino

Fundamental (5ª ou 6ª séries) um doutoramento seria o mais indicado por questões de tempo para trabalho e reflexão.

Uma segunda reflexão que nos ocorreu foi a questão: *Como evoluiria o GE, na 7ª série, na qual o trabalho com a Álgebra se intensifica? Também teria desempenhos tão superiores quando comparados com o GC?* Para responder tal questão seria necessário um tempo maior do que o desprendido por nós nesta pesquisa, por isso um trabalho de doutoramento que acompanhasse o GE na 7ª série seria o ideal para realizá-lo. Esse estudo poderia ser iniciado de maneira análoga ao nosso, com três instrumentos diagnósticos – pré, intermediário e pós-teste – aplicados no início do estudo, para um diagnóstico no começo da 6ª série; no meio, após as intervenções com o jogo e a formalização algébrica; e ao final, no decorrer ou no término da 7ª série. Poderia ser igualmente feito um trabalho comparativo intra e inter-grupos, tendo, portanto, um grupo experimental e um de controle. Ao final do estudo, a questão que poderia ser respondida seria se o jogo codificação-decodificação, além de contribuir para a constituição de significados iniciais para a linguagem algébrica, contribuiria para o trabalho formal da Álgebra desenvolvido (geralmente) na 7ª série.

Por fim, pensamos que o presente estudo pudesse ser aplicado – na mesma série e com apenas um grupo – pela professora de classe, que teria o auxílio necessário para iniciar o trabalho algébrico com o jogo. O pesquisador (mestrando, por exemplo) estaria formando a professora e aplicando dois testes – pré e pós – em seus alunos, para diagnosticar seus desempenhos e a aplicabilidade e sucesso do jogo codificação-decodificação em salas de aula comuns.

# CAPÍTULO 6

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOOTH, W.C. et al. *A arte da pesquisa.* São Paulo: Martins Fontes, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática. Brasília: SEF, 1997.

DA ROCHA FALCÃO, J.T. Representação do problema, escrita de fórmulas e tutoria na passagem da Aritmética à Álgebra. In: *CEMA*. v. 2. São Paulo: PUC/SP, 1994. p.19 - 55.

_____ Lenguaje algebraico. Un enfoque psicológico. *Uno Revista de Didáctica de lãs matemáticas*. N.14. p.25-38. octubre 1997.

_____ A Álgebra como ferramenta de representação e resolução de problemas. In: *Estudos em psicologia da Educação Matemática*. SCHLIEMNN, A.D. et al. Recife: Ed. Universitária da UFPE, 1993.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S.D.A. (org). *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica*. São Paulo: Papirus, 2003.

FILLOY, E.; ROJANO, T. Solving equations: the transition from Arithmetic to Algebra. In: *For the Learning of Mathematics*. v. 9. n.º 2. FLM Publishing Association, Montreal, Quebec, Canada., June 1989. p. 19 - 25.

GALLARDO, A.; ROJANO, T. Areas de dificuldades em la adquisicion Del lenguaje aritmetico-algebraico. In: *Recherches en Didactique des Mathématiques*. v. 9, n.º 2, p. 155 – 188, 1988.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS. *Saeb 2001:* Relatório Matemática. Brasília, 2002.

KIERAN, C. The learning and teaching of School Algebra. In: *De Handbook of research on Mathematics, Teaching and Learning.* NY:USA, MacMillan Publishing Co., 1992. cap. 17.

_____ Duas abordagens diferentes entre os principiantes em Álgebra. In: COXFORD, A.F.; SHULTE, A.P. (org.). *As idéias da Álgebra.* Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994. p. 104 - 110.

_____ Mathematical concepts at the secondary school level: the learning of Algebra and functions. In: NUNES, T.; BRYANT, P. (edited). *Learning and teaching mathematics – an international perspective*. Psychology Press Ltd., 1997. p. 133 - 158.

LINS, R.C. Epistemologia, história e educação matemática: Tornando mais sólidas as bases da pesquisa. *Revista de Educação Matemática da SBEM-SP*. N.1. Setembro 1993. p. 75-91.

_____ Álgebra e pensamento algébrico na sala de aula. *A Educação Matemática em Revista-SBEM*. N. 2. p. 26 - 31. 1º Sem.1994-a.

_____ O Modelo Teórico dos Campos Semânticos: Uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico. *Revista Dynamis*, Blumenau. V.1 n.7. p.29-39. abr/jun 1994-b.

_____ Discos, fitas e hotéis: Produzindo significado para a Álgebra. *Revista de Educação Matemática SBEM-SP*. N. 2. Março, 1995. p.18 - 24.

_____ Por Que Discutir Teoria do Conhecimento é Relevante para a Educação Matemática. In: BICUDO, M.A.V. (org.). *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas*. São Paulo: Editora UNESp, 1999.

_____ Matemática, Monstros, Significados e Educação Matemática. In: BICUDO, M.A.V.; BORBA, M.de C. (orgs.). *Educação Matemática: Pesquisa em Movimento*. São Paulo: Cortez Editora, 2004.

LINS, R.C.; GIMENEZ, J. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. Campinas: Papirus, 1997.

MACHADO, S.D.de A. (org.) *Educação Matemática*: *uma introdução*. São Paulo: EDUC, 1999.

MAGINA, S. et al. *Repensando adição e subtração: contribuições da teoria dos campos conceituais*. São Paulo: PROEM, 2001.

NOBRE, A.M.V. *Elaboração/leitura de códigos para entender o "x da questão".* São Paulo,1996. 241f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

RUDIO, F.V. *Introdução ao projeto de pesquisa científica.* Petrópolis: Vozes, 1979.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ. Setor de Bibliotecas. *Normas para Apresentação de Documentos Científicos*. Curitiba: Ed. da UFPR, 2001. 10 v.

VERGNAUD, G. A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education. In: *JMB Journal of Mathematical Behavior.* Ablex Publishing Corp, 1998. 17 (2). p. 167-181.

_____ The nature of mathematical concepts. In: NUNES, T.; BRYANT, P. (edited). *Learning and teaching mathematics – an international perspective*. Psychology Press Ltd., 1997. p. 5 - 28.

_____ *L'obstacle des nombres négatifs et l'introduction à l'Algèbre*. Paris, CIRADE – p.76-83

_____ *Algebra, additive and multiplicatives structures. Is there any coherence at the early secondary level?* Cognition et Activités Finalisées. CNRS. France, Université Paris 8.

VERGNAUD, G.; CORTES, A.; FAVRE-ARTIGUE,P. Introduction de l'Algèbre auprès de débutants faibles: problèmes épistémologiques et didactiques. IN: VERGNAUD, G.; BROUSSEAU, G.; HULIN, M. (org.). *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques: Actes du Colloque de Sèvres. Sèvres*, La Pensée Sauvage,1987. p.259 - 280.

http://www.inep.gov.br/basica/censo/default.asp. Consultado em 17/11/03.

# ANEXOS

# ANEXO I

## Pré-Teste

Nome: ______________________________ Série: __________ Idade: _________

**Descubra o valor de cada letra (Faça <u>TODAS</u> as contas no papel):**

1) $7 \times N + 33 = 152$

2) $8 \times M + 2 = 6 \times M + 10$

3) $12 \times M - 41 - 3 \times M = \frac{30}{2} - 5 \times M$

4) $\frac{4 \times P}{4} + 20 - \frac{12}{6} = 50 - \frac{2 \times P}{2}$

5) $3 \times (A + 13) - 2 \times A = 5 \times (10 - A) + 19$

**Agora resolva estes problemas (Não esqueça de fazer todas as contas no papel):**

1) Tia Marina é a madrinha de batismo de Alessandra, uma garota muito simpática. Tia Marina tem 7 anos menos que o triplo da idade de Alessandra. Se a soma das idades das duas é 37, então qual é a idade de Alessandra?

2) André joga duas partidas no video-game. Joga uma primeira e depois uma segunda. Na segunda partida ele perde 126 pontos. Depois dessas duas partidas, ele verificou que havia ganhado 237 pontos no total. O que aconteceu na primeira partida? Ele ganhou ou perdeu? Quanto?

3) Pensei em um número. Multipliquei por 7. Subtraí 49. Deu 112. Descubra o número que pensei.

4) Três sócios vão dividir o lucro de uma empresa, que foi de R$ 897,00, proporcionalmente a quantia que cada um investiu. Mário vai receber o triplo de Joaquim e Paulo receberá R$ 123,00 a menos que Joaquim. Quanto receberá cada sócio?

5) A “JJR” é uma banda formada pelos irmãos João, Júlia e Renato, cujas idades somam 87 anos. Júlia tem 7 anos a mais que a metade da idade de Renato e João, 9 anos a menos que o dobro da idade de Júlia. Quantos anos tem cada um deles?

# ANEXO II

## Teste Intermediário

Nome: ____________________________________ Série: _________ Idade: _________

**Descubra o valor de cada letra (Faça <u>TODAS</u> as contas no papel):**

1) $7 \times A + 34 = 5 \times A + 46$

2) $\frac{5 \times N}{5} + \frac{86}{2} - 10 = 60 - \frac{2 \times N}{2}$

3) $13 \times P + 87 = 438$

4) $5 \times (W + 12) - 2 \times W = 3 \times (8 - w) + 12$

5) $8 \times D - 34 - 3 \times D = \frac{40}{2} - 4 \times D$

**Agora resolva estes problemas (Não esqueça de fazer todas as contas no papel):**

1) Pensei em um número. Multipliquei por 7 e subtraí 59. Obtive 186. Descubra o número que pensei.

2) Rosa, Maria e Leila fazem salgados para festas. Esta semana elas lucraram R$ 870,00 e vão dividir de acordo com o tempo que cada uma trabalhou e a quantidade de ingredientes que gastou. Maria vai receber R$ 70,00 a mais que a metade de Rosa. Leila vai receber R$ 90,00 a menos que o dobro de Maria. Quanto receberá cada uma?

3) André joga duas partidas de bate-figurinha. Joga uma primeira e depois uma segunda. Na segunda partida ele perde 102 figurinhas. Depois dessas duas partidas, ele ganhou 237 figurinhas. O que aconteceu na primeira partida? Ele ganhou ou perdeu? Quanto?

4) Sr. Paulo possui dois carros velhos, um verde e um azul. O carro verde tem 17 anos a menos que o dobro da idade do carro azul. Se a soma das idades dos dois carros é 46 anos, então qual é a idade de cada carro?

5) Joel, seu pai e seu avô colecionam miniaturas de carros. Juntos eles possuem 161 carrinhos. Seu avô possui o triplo de carrinhos em relação ao seu pai. Joel possui 14 carrinhos a menos que seu pai. Quantos carrinhos possui cada um?

# ANEXO III
## Pós-Teste

Nome: ______________________________ Data: __________ Série: ______

**Resolva as seguintes equações**

| | |
|---|---|
| 1) $7N + 33 = 152$ | 2) $8x + 2 = 6x + 10$ |
| 3) $12M - 41 - 3M = \frac{30}{2} - 5M$ | 4) $\frac{4P}{4} + 20 - \frac{12}{6} = \frac{50}{2} - 2P$ |

| |
|---|
| 5) $3.(A + 13) - 2A = 5.(10 - A) + 19$ |

Nome: ________________________________________ Data: ____________ 6ª _______

**RESOLVA OS PROBLEMAS ABAIXO UTILIZANDO EQUAÇÕES**

1- Pensei em um número. Multipliquei por 7. Subtraí 49. Deu 112. Descubra o número que pensei.

**Local para fazer as contas:**

2- Rafael jogou duas partidas de “RPG”. Jogou uma primeira e depois uma segunda. Na segunda ele ganhou 102 pontos. Depois dessas duas partidas, ele ganhou 295 pontos. O que aconteceu na primeira partida? Ele ganhou ou perdeu? Quanto?

**Local para fazer as contas:**

3) Renato, Cristiano e Paulo colecionaram figurinhas da última copa. Somando as figurinhas dos três têm-se um total de 143. Renato tem 15 figurinhas a mais que a metade das figurinhas de Cristiano. Paulo tem 17 figurinhas a menos que o dobro das figurinhas de Renato. Quantas figurinhas tem cada um deles?

**Local para fazer as contas:**

4) Andréia e Adriana são irmãs. Adriana tem 17 anos a menos que o triplo da idade de Andréia. Se a soma das idades das duas é 27 anos, então qual é a idade de Andréia?

**Local para fazer as contas:**

5- Três sócios vão dividir o lucro de uma empresa, que foi de R$ 897,00, proporcionalmente a quantia que cada um investiu. Mário vai receber o triplo de Joaquim e Paulo receberá R$ 123,00 a menos que Joaquim. Quanto receberá cada sócio?

**Local para fazer as contas:**

Nome: _____________________________________________ Data: ____________ 6ª _______

**RESPONDA AS QUESTÕES ABAIXO**

1- Considere a afirmação: $10 + x = x + 10$ Essa afirmação é:
( ) Verdadeira ( ) Falsa

Como você ensinaria para um aluno que tivesse marcado a opção ERRADA?

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

2- Sendo x e y números inteiros e positivos, em: $3x = y$ , podemos afirmar que:
( ) x é maior que y ( ) y é maior que x ( ) x e y são iguais

Como você explicaria sua resposta para um colega?

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

3- Considere a afirmação: $2x = x2$ Essa afirmação é: ( ) Verdadeira ( ) Falsa

Como você pode ter certeza que sua resposta está certa?

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

4- Em $7x + 22 = 109$ e $7y + 22 = 109$ , podemos afirmar que:

( ) x é maior que y
( ) y é maior que x
( ) x é igual a y

**Local para fazer contas**

Dê uma explicação para me convencer que você respondeu corretamente:

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

5- Em: $5x + 18 = 153$, André encontrou como solução o número 25 e Rui o número 27.

( ) André está certo
( ) Rui está certo
( ) Os dois estão certos
( ) Os dois estão errados

**Local para fazer contas:**

# ANEXO IV

## PROBLEMAS DA FASE I

PROBLEMA 1A

Seu Pedro comprou 8 camisetas e 5 calças. Pagou, em dinheiro, R$ 150,00. Cada calça custou R$ 13,00 e ele recebeu de troco R$ 37,00. Quanto custou cada camiseta?

PROBLEMA 2B

Dona Roberta comprou 8 camisetas e 7 calças. Pagou, em dinheiro, R$ 170,00. Cada calça custou R$ 9,00 e ela recebeu de troco R$ 11,00. Quanto custou cada camiseta?

PROBLEMA 1 B

Cinco pessoas fizeram uma “vaquinha” para jantar. Todos deram a mesma quantia. Com o dinheiro da “vaquinha” compraram 2 pizzas e 10 refrigerantes. Cada pizza custou R$ 7,50 e cada refrigerante R$ 0,50. Sobraram R$ 2,50. Com quantos reais cada pessoa entrou na “vaquinha”?

PROBLEMA 2 A

Sete pessoas fizeram uma “vaquinha” para jantar. Todos deram a mesma quantia. Com o dinheiro da “vaquinha” compraram 3 pizzas e 15 refrigerantes. Cada pizza custou R$ 8,40 e cada refrigerante R$ 0,60. Sobraram R$ 2,20. Com quantos reais cada pessoa entrou na “vaquinha”?

PROBLEMA 3 A

Dona Vera comprou refrigerantes para a festa de quinze anos de sua filha, a Clara. Comprou 16 embalagens de 2,5 litros de coca-cola e embalagens de 1,5 litros de guaraná, mas não se lembra quantas. No total, entre coca-cola e guaraná, ela comprou 70 litros de refrigerante. Quantas embalagens de guaraná ela comprou?

PROBLEMA 4B

Seu Ari comprou refrigerantes para a festa de final de ano da empresa onde trabalha. Comprou 12 embalagens de 2,5 litros de coca-cola e embalagens de 1,5 litros de guaraná, mas não se lembra quantas. No total, entre coca-cola e guaraná, ele comprou 57 litros de refrigerante. Quantas embalagens de guaraná ele comprou?

PROBLEMA 3B

O professor de Educação Física comprou 5 bolas de vôlei e 3 de futebol, mas não se lembra do preço da bola de vôlei. Cada bola de futebol custou R$ 25,00 e, no total, ele gastou R$ 188,50. Quanto custou cada bola de vôlei?

PROBLEMA 4 A

O professor de Educação Física comprou 8 bolas de vôlei e 6 de futebol, mas não se lembra do preço da bola de vôlei. Cada bola de futebol custou R$ 28,00 e, no total, ele gastou R$ 380,00. Quanto custou cada bola de vôlei?

# ANEXO V

## Ficha 1 – Fase II

**1-** Resolva o problema utilizando o código abaixo:

Seu Pedro comprou 8 camisetas e 5 calças. Pagou, em dinheiro, R$ 150,00. Cada calça custou R$ 13,00 e ele recebeu de troco R$ 37,00. Quanto custou cada camiseta?

Legenda:
S = número de camisetas
C = número de calças
R = preço de uma calça
E = preço de uma camiseta
P = dinheiro pago
T = troco

Código:

Passo 1) C x R = A
Passo 2) A + T = B
Passo 3) P – B = D

Local para fazer as contas

R: Cada camiseta custou R$ ___________.

**2-** Responda as questões abaixo baseadas no problema acima:

d) Como você explicaria a um colega que não tem nem o problema nem a legenda, o que a letra C representa?

_______________________________________________________________

e) No código, poderia ter usado outra letra que não fosse C? Qual? Como você explicaria este fato a um colega?

_______________________________________________________________

f) Para problemas diferentes, C poderia ter valores diferentes? Como você explicaria este fato a um colega?

_______________________________________________________________

**3-** O código do primeiro problema foi reescrito em unidade: **{ P – [ ( C x R ) + T ] } ÷ S = E**

c) Resolva-o com os dados numéricos do problema 1 e verifique se o resultado será o mesmo?

Local para fazer as contas

d) O que você achou mais fácil: ( ) resolver utilizando os 4 passos (como no problema 1)
( ) resolver de uma vez só (como no item a))

Como você explicaria sua opinião a um colega que não aprendeu código ainda?

_______________________________________________________________

**4-** Tente você, simplificar o código:

Cinco pessoas fizeram uma "vaquinha" para jantar. Todos deram a mesma quantia. Com o dinheiro da "vaquinha" compraram 2 pizzas e 10 refrigerantes. Cada pizza custou R$ 7,50 e cada refrigerante R$ 0,50. Sobraram R$ 2,50. Com quantos reais cada pessoa entrou na "vaquinha"?

Legenda:
N = número de pessoas
Z = número de pizzas
R = número de refrigerantes
W = preço de uma pizza
Y = preço de um refrigerante
S = dinheiro que sobrou
V = dinheiro que cada um entrou na "vaquinha"

Código:
1) Z x W = A
2) R x Y = B
3) A + B + S = C
4) C ÷ N = V

Local para fazer a simplificação

# ANEXO VI

## Ficha 2 – Fase II

**5-** A dupla formada por Zezinho e Joãozinho fez a seguinte codificação para o problema: "O professor de Educação Física comprou 8 bolas de vôlei e 6 de futebol, mas não se lembra do preço da bola de vôlei. Cada bola de futebol custou R$ 28,00 e, no total, ele gastou R$ 380,00. Quanto custou cada bola de vôlei?"

Legenda:

A = número de bolas de vôlei
B = número de bolas de futebol
C = preço de uma bola de futebol
E = preço de uma bola de vôlei
F = total da conta 1
G = total da conta 2
D = total gasto

Código:

Passo 1) B x C = H
Passo 2) D – F = J
Passo 3) G ÷ A = K

A dupla formada por Mariazinha e Ritinha encontrou dificuldades no momento de resolver um novo problema com este código. Você, que entende tudo de códigos, recebe agora a tarefa de ajudar as meninas a resolver o problema. Para isto você deve indicar as dificuldades que o código apresenta e corrigí-las para que elas possam usá-lo.

Local para fazer as contas

**6-** Esse é o código feito por Mariazinha e Ritinha e que Joãozinho e Zezinho vão utilizar: "Dona Roberta comprou 8 regatas e 7 shorts. Pagou, em dinheiro, R$ 170,00. Cada short custou R$ 9,00 e ela recebeu de troco R$ 11,00. Quanto custou cada regata?"

Legenda:

A = número de regatas
B = número de shorts
C = preço de um short
D = troco
E = dinheiro pago
F = preço de uma regata
G = total da conta 1
H = total da conta 2
J = total da conta 3

Código:

Passo 1) B x C = T
Passo 2) D + G = T
Passo 3) E – H = T
Passo 4) J ÷ A = F

Joãozinho e Zezinho também não estão conseguindo utilizar o código das meninas. Ajude-os do mesmo modo que você ajudou as meninas.

Local para fazer as contas

**7-** Num problema de codificação recebi o código simplificado e o valor correspondente a cada letra, mas uma saiu apagada. Porém consegui copiar do colega ao lado a resposta C = 20. Será que agora consigo encontrar o valor da letra que está faltando?

[ (A x B) – F] + D = C
A = 4 B = 9
F = 24 D = ##

Local para fazer as contas

**8-** Codifique a afirmação: "Havia n lápis vermelhos e b lápis azuis em uma caixa, totalizando z lápis".

Local para a codificação

# ANEXO VII

## Ficha 3 – Fase II

**9-** Codifique e resolva o problema: "Um número multiplicado por 5 e depois somado a 17 resulta em 72".

Local para fazer a codificação e as contas

**10-** Crie um texto para o código: $2 \times B + 13 = 55$ (lembre-se $2 \times B = 2.B = 2B$).

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

**11-** Em: $3T + 5 = 38$, André encontrou como solução o número 12 e Rui o número 11.

( ) André está certo
( ) Rui está certo
( ) Os dois estão certos
( ) Os dois estão errados

Local para fazer contas:

**12-** Em $5B – 1 = 4B + 6$ , o valor de B é: ( ) 7 ( ) 8

Local para fazer contas

**13-** Codifique e resolva os problemas:

a) Tia Marina é a madrinha de batismo de Alessandra, uma garota muito simpática. Tia Marina tem 7 anos menos que o triplo da idade de Alessandra. Se a soma das idades das duas é 37, então qual é a idade de Alessandra?

Local para fazer contas

b) Joel, seu pai e seu avô colecionam miniaturas de carros. Juntos eles possuem 161 carrinhos. Seu avô possui o triplo de carrinhos em relação ao seu pai. Joel possui 14 carrinhos a menos que seu pai. Quantos carrinhos possui cada um?

Local para fazer contas