

A invenção matemática¹

Henri Poincaré, *Universidade de Caen, França*

A génese da criação Matemática é um problema que deve inspirar o mais vivo interesse ao psicólogo. Trata-se do acto no qual a mente humana parece basear-se menos no mundo exterior; é o acto em que esta não actua, ou não parece actuar, senão por si mesma ou em si mesma, de modo que, ao estudar o processo do pensamento geométrico podemos esperar alcançar o que há de mais essencial na mente humana...

Um primeiro facto que nos deve surpreender, ou melhor que nos deveria surpreender se não estivéssemos tão acostumados a ele: Como é que há pessoas que não entendem a Matemática? Se ela se fundamenta apenas nas regras lógicas que toda a mente clara aceita, se a sua evidência se baseia em princípios comuns a todos os homens e que ninguém, a não ser um louco ousaria negar, como é que há pessoas que são absolutamente refractárias à Matemática?

É manifesto que nem todos são capazes de criar. É também aceite que nem toda a gente possa reter uma demonstração anteriormente aprendida. Mas o facto de que nem todos possam compreender um raciocínio matemático no momento em que ele é exposto, parece muito surpreendente quando se reflecte sobre isso. E, não obstante, os que conseguem seguir esse raciocínio, ainda que com bastante dificuldade, são a maioria. Isto é inegável e a experiência dos professores do ensino secundário decerto não me contradirá.

Mas há mais. Como é possível o erro em Matemática? Uma boa inteligência não deve cometer erros lógicos e há, sem dúvida, mentes muito subtis que não se enganarão em raciocínios curtos semelhantes aos que se nos apresentam nos actos vulgares da nossa vida, mas que são incapazes de seguir, ou de repetir sem erros, as demonstrações matemáticas mais extensas que, ao fim e ao cabo, não são mais que uma soma de

¹ Conferência apresentada na Sociedade de Psicologia de Paris, no início do Século XX, publicada originalmente no *Bulletin de l'Institut Général de Psychologie*, nº 3, 1908, Paris. Republicada em P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.) (1996), *Investigar para aprender matemática* (pp. 7-14). Lisboa: Projecto MPT e APM.

pequenos raciocínios em tudo análogos aos que resolvem tão facilmente. Será necessário acrescentar que mesmo os bons matemáticos não são infalíveis?

Quanto a mim, devo confessar que sou completamente incapaz de adicionar sem me enganar... Numa palavra, a minha memória não é má, mas seria insuficiente para fazer de mim um bom jogador de xadrez. Porque será, então, que ela não me falha num raciocínio matemático difícil em que se perderiam a maioria dos jogadores de xadrez? Isso deve-se, evidentemente, a ela ser conduzida pela marcha geral do raciocínio. Uma demonstração matemática não é uma simples justaposição de silogismos. Consiste em silogismos *colocados numa certa ordem*, e a ordem pela qual estes elementos são colocados é muito mais importante que os próprios elementos. Se tenho a sensação, a intuição, por assim dizer, desta ordem, de forma a que possa perceber com uma “olhadela” o conjunto do raciocínio, já não tenho que recear esquecer nenhum dos seus elementos. Cada um deles irá colocar-se por si próprio no quadro preparado sem ter que se fazer nenhum esforço de memória...

Percebe-se que esta sensação, esta intuição da ordem matemática que nos leva a adivinhar harmonias e relações escondidas, não possa pertencer a toda a gente. Uns não terão nem este sentimento delicado e difícil de definir, nem uma capacidade de memória e atenção acima do normal e serão assim totalmente incapazes de compreender uma Matemática de um nível um pouco mais elevado; são a maioria. Outros terão este sentimento não muito desenvolvido, mas possuirão uma memória pouco comum. Aprenderão os detalhes de memória, um a um; conseguirão compreender a Matemática e, algumas vezes, aplicá-la. A situação de criação está, no entanto, fora do seu alcance. Outros, por fim, possuirão num grau mais elevado a intuição especial de que vos vou falar e, então, não só serão capazes de entender a Matemática, ainda que a sua memória não tenha nada de extraordinário, como poderão converter-se em criadores e conseguir inventar com maior ou menor êxito, conforme essa intuição está neles mais ou menos desenvolvida.

O que é, de facto, a criação matemática? Não consiste em fazer novas combinações com entes matemáticos já conhecidos. Qualquer um poderia fazer isso, mas as combinações que se conseguiriam obter assim seriam em número limitado e, na sua maioria, totalmente desprovidas de interesse. Criar consiste, precisamente, não em construir as combinações inúteis mas as que são úteis e que estão em ínfima minoria. Criar é discernir, escolher...

É tempo de aprofundar e ver o que ocorre na própria mente do matemático. Para isso creio que o melhor será evocar recordações pessoais. Vou apenas limitar-me a relatar-lhes como escrevi a minha primeira memória sobre as funções fuchsianas. Perdoem-me o facto de utilizar algumas expressões técnicas; nada receiem, no entanto, pois não vão precisar de as entender. Direi, por exemplo: encontrei a demonstração de tal teorema em tais circunstâncias; o teorema terá um nome bárbaro que muitos de vós não conhecerão mas isso não terá nenhuma importância; o que interessa ao psicólogo não é o teorema, são as circunstâncias.

Havia já quinze dias que me esforçava por demonstrar que não podia existir nenhuma função análoga às que depois vim a chamar funções fuchsianas. Estava, então, na mais completa ignorância; sentava-me todos os dias à minha mesa de trabalho e ali permanecia uma ou duas horas ensaiando um grande número de combinações e não chegava a nenhum resultado. Uma tarde, contra meu costume, tomei um café e não consegui adormecer; as ideias surgiam em tropel, sentia como me escapavam até que duas delas, por assim dizer, se encaixaram formando uma combinação estável. De madrugada tinha estabelecido a existência de uma classe de funções fuchsianas, as que derivam da série hipergeométrica. Não tive mais que redigir os resultados o que apenas me levou algumas horas.

Quis, em continuação, representar estas funções pelo quociente de duas séries: esta ideia foi completamente consciente e deliberada, era guiado pela analogia com as funções elípticas. Perguntava a mim mesmo quais seriam as propriedades destas séries, se é que existiam, e logrei sem dificuldade formar as séries que chamei tetafuchsianas.

Nessa altura, parti de Caen, onde então vivia, para participar numa excursão geológica organizada pela Escola de Minas. As peripécias da viagem fizeram-me esquecer os meus trabalhos matemáticos; ao chegar a Coutances entrámos num autocarro já não sei para que passeio. No momento que colocava o pé no degrau, sem que, segundo me pareceu, tivesse relação com o que estava a pensar, veio-me a ideia de que as transformações que tinha utilizado para definir as funções fuchsianas eram idênticas às da Geometria não euclidiana. Não o comprovei, não tive tempo; mal me sentei no autocarro retomei a conversa, mas senti-me, de imediato, completamente seguro disso. Ao regressar a Caen comprovei o resultado com a mente descansada para a tranquilidade da minha consciência.

Pus-me, então, a estudar problemas de aritmética sem grande resultado aparente e sem suspeitar que pudessem ter a menor relação com as minhas investigações

anteriores. Aborrecido com os meus fracassos fui passar uns dias à beira mar e pensei noutras coisas diferentes. Um dia, enquanto passeava por um alcantilado, veio-me a ideia, sempre com as mesmas características de brevidade, instantaneidade e certeza imediata, de que as transformações de formas quadráticas ternárias indeterminadas eram idênticas às da Geometria não euclidiana.

De volta a Caen reflecti sobre este resultado e retirei dele as suas consequências. O exemplo das formas quadráticas demonstrava-me que existiam grupos fuchsianos diferentes dos que correspondem às séries hipergeométricas; vi que podia aplicar-lhes a teoria das séries tetafuchsianas e que, portanto, existiam funções fuchsianas diferentes das que derivam da série hipergeométrica, as únicas que eu conhecia até então. Dispuse-me, naturalmente, a constituir todas estas funções. Fiz um cerco sistemático e fui tomando, um após outro, todos os postos avançados; no entanto, havia um que se mantinha firme e cuja queda arrastaria a de toda a praça. Mas todos os meus esforços serviram a princípio para me fazer conhecer melhor a dificuldade, o que já era alguma coisa. Todo este trabalho foi perfeitamente consciente.

Nessa altura parti para Mont-Valérien onde devia prestar serviço militar. Tinha, pois, preocupações muito diversas. Um dia, ao atravessar uma avenida, a solução da dificuldade que me havia detido apareceu-me de repente. Não procurei aprofundá-la imediatamente e não voltei ao problema senão após o meu serviço militar. Tinha todos os elementos, havia apenas que os ordenar. Assim redigi de seguida a minha memória definitiva e sem nenhum trabalho.

Limitar-me-ei a este único exemplo. É inútil multiplicá-los...

O que os surpreenderá, em primeiro lugar, são estas iluminações súbitas, sinais claros de um grande trabalho anteriormente inconsciente. O papel deste trabalho inconsciente parece-me inegável e encontrar-se-iam os seus vestígios noutras coisas onde ele é menos evidente.

Muitas vezes, quando se trabalha num problema difícil, não se consegue nada na primeira vez que se inicia a tarefa. Mais tarde, depois de um descanso mais ou menos longo, sentamo-nos de novo à mesa e, durante a primeira meia hora, continuamos sem encontrar nada. Depois, de repente, a ideia decisiva surge perante a mente...

Há que fazer outra observação a propósito das condições deste trabalho inconsciente. Tal trabalho não é possível, e em todo o caso não seria fecundo, se, por um lado não for precedido e, por outro, se não se lhe seguir um período de trabalho consciente. Estas inspirações súbitas não surgem (e os exemplos que apresentei provam-

no já de modo suficiente) senão depois de alguns dias de esforços voluntários, aparentemente estéreis, em que pensámos não estar a fazer nada de interessante e ter seguido um caminho totalmente falso. Estes esforços não foram, portanto, tão estéreis como se pensava. Puseram em movimento a máquina inconsciente e sem eles esta não teria funcionado nem poderia ter produzido o que quer que fosse...

Estes são os factos. Vejamos agora as reflexões que eles nos sugerem. O eu inconsciente ou eu subliminar, como se costuma dizer, desempenha um papel essencial na criação matemática. Isto deduz-se de tudo o que atrás se disse. Habitualmente considera-se o eu subliminar como puramente automático; ora bem, vimos que o trabalho matemático não é um simples trabalho mecânico que se poderia confiar a uma máquina por mais perfeita que ela se imaginasse. Não se trata apenas de aplicar regras e de elaborar o maior número possível de combinações através de leis fixas. As combinações assim obtidas seriam extremamente numerosas, inúteis e embaraçosas. O verdadeiro trabalho do criador consiste em escolher entre estas combinações, com o fim de eliminar as inúteis ou, sobretudo, nem sequer se dar ao trabalho de as realizar. As regras que conduzem a esta escolha são extremamente subtis e delicadas. É quase impossível enunciá-las com uma linguagem precisa. É mais fácil senti-las do que formulá-las. Em tais condições como é possível imaginar um “crivo” capaz de as aplicar mecanicamente?

Surge-nos então uma primeira hipótese. O eu subliminar não é de forma alguma inferior ao eu consciente. Não é puramente automático, é capaz de discernimento, possui tacto, delicadeza. Como diria?... Adivinha melhor que o consciente uma vez que consegue chegar aonde este fracassou. Numa palavra, não será ele superior ao eu consciente? Compreenderão toda a importância desta pergunta...

Acaso não nos impõem os factos que acabo de expor uma resposta afirmativa? Por minha parte confesso que não o aceitaria sem desagrado. Regressemos pois aos factos e investiguemos se são compatíveis com outra explicação.

É certo que as combinações que surgem na mente sob a forma de uma inspiração repentina, depois de um trabalho consciente bastante prolongado, são em geral combinações úteis e fecundas que parecem o resultado de um primeiro escrutínio. Deduz-se disto que o eu subliminar, ao adivinhar por meio de uma intuição especial que estas combinações podiam ser úteis, constituiu apenas estas ou então, constituiu muitas outras que por serem desprovidas de interesse permaneceram no inconsciente.

Segundo este último ponto de vista, todas as combinações se constituiriam como consequência do automatismo do eu subliminar mas só as combinações interessantes penetrariam o campo da consciência. Tudo isto é ainda muito misterioso. Qual a causa que determina que entre os milhares de objectos da nossa actividade inconsciente haja alguns chamados a franquear o umbral enquanto outros permanecem do outro lado? Será o mero acaso quem lhes confere este privilégio? Evidentemente que não. Entre os estímulos dos nossos sentidos, por exemplo, só os mais intensos atrairão a nossa atenção, a não ser que esta atenção seja para eles guiada por outras causas. Em geral, os fenómenos inconscientes privilegiados, os que são susceptíveis de se tornarem conscientes, são os que, directa ou indirectamente, afectam mais profundamente a nossa sensibilidade.

Pode estranhar-se o facto de se apelar à sensibilidade a propósito de demonstrações matemáticas que, parece, não conseguem senão interessar a inteligência. Isto seria esquecer o sentimento de beleza matemática, da harmonia dos números e das formas, da elegância geométrica. Todos os verdadeiros matemáticos conhecem este sentimento estético real. E, certamente, isto pertence à sensibilidade. Ora bem, quais são os entes matemáticos a que atribuímos estas características de beleza e de elegância e que são susceptíveis de desencadear em nós um sentimento de emoção estética? São aqueles cujos elementos estão dispostos harmoniosamente, de forma a que a mente possa sem esforço abraçar todo o conjunto penetrando em todos os seus detalhes. Esta harmonia é simultaneamente uma satisfação para as nossas necessidades estéticas e um auxílio para a mente que a sustenta e guia. E, ao mesmo tempo, ao colocar perante os nossos olhos um conjunto bem ordenado, faz-nos pressentir uma lei matemática... Assim, é esta sensibilidade estética especial que desempenha o papel do “crivo” delicado de que falei anteriormente. Isto permite compreender suficientemente porque é que quem não a possui não pode nunca vir a ser um verdadeiro criador.

No entanto, não desapareceram todas as dificuldades. O eu consciente está estreitamente limitado. Quanto ao eu subliminar desconhecemos os seus limites, por isso não nos desagrada supor que tenha podido constituir em pouco tempo mais combinações diferentes que um ser consciente em toda a sua vida pudesse abarcar. No entanto, tais limites existem. Será verosímil que ele pudesse constituir todas as combinações possíveis, em número que assustaria a imaginação? Todavia isto pareceria necessário pois se só se constituísse uma pequena parte destas combinações e se isso

fosse feito ao acaso, existiria uma possibilidade muito pequena que entre elas se encontrasse a “boa”, a que se deve escolher.

Talvez seja necessário procurar a explicação neste período de trabalho consciente preliminar que precede sempre todo o trabalho inconsciente frutífero. Permitam-me uma tosca comparação. Representemos os futuros elementos das nossas combinações como algo parecido com os átomos em forma de “gancho” de Epicuro. Durante o repouso completo da mente, estes átomos estão imóveis, estão, por assim dizer, colados à parede... Pelo contrário, durante o período de repouso aparente e de trabalho inconsciente, alguns desses átomos desprendem-se e põem-se em movimento. Sulcam, em todas as direcções, o espaço, o “compartimento” onde estão encerrados, do mesmo modo que o faria, por exemplo, uma nuvem de mosquitos ou, se preferirem uma comparação mais culta, como o fazem as moléculas gasosas na teoria cinética dos gases. Os seus mútuos choques podem, assim, produzir novas combinações.

Qual será o papel do trabalho consciente preliminar? É, evidentemente, o de fazer mover alguns destes átomos, desprendê-los da parede e fazê-los oscilar. Há quem pense nada ter conseguido uma vez que movimentou estes elementos de mil formas diferentes tentando ligá-los sem ter conseguido nenhuma ligação satisfatória. No entanto, depois desta agitação imposta pela nossa vontade os átomos não retomam o seu primitivo repouso. Continuam livremente a sua dança; ora bem, a nossa vontade não os escolhera ao acaso, perseguia um fim completamente determinado. Os átomos colocados em movimento não são, assim, átomos quaisquer. São aqueles de que se pode razoavelmente esperar a solução procurada. Esses átomos vão então sofrer choques que os farão combinar quer entre eles quer com outros átomos que tinham permanecido imóveis com os quais, no seu trajecto, foram chocar. Peço de novo que me desculpem, a minha comparação é bastante tosca mas não conseguiria fazer compreender o meu pensamento de outra forma.

Seja como for, as únicas combinações que tiveram alguma probabilidade de se constituírem são as que um dos seus elementos, pelo menos, é um desses átomos livremente escolhidos pela nossa vontade. Ora bem, é evidente que entre elas se encontra a que chamei há pouco a “boa combinação”. Talvez aí exista um meio de atenuar o que surgia como paradoxal na hipótese primitiva...

Farei uma última observação. Ao expor-lhes há pouco algumas recordações pessoais falei de uma noite de excitação em que trabalhei como que apesar de mim próprio. Casos como estes são frequentes e não é necessário que a actividade cerebral

anormal seja provocada por um estímulo físico como o que citei. Em tais casos parece que assistimos ao nosso próprio trabalho inconsciente que vem a ser parcialmente perceptível à consciência sobreexcitada e que, no entanto, não mudou de natureza. Damo-nos então conta, vagamente, do que diferencia os dois mecanismos, ou se se quiser, os métodos de trabalho dos dois “eu”. As observações psicológicas que pude fazer parece que confirmam em traços gerais a visão que acabo de expor.

Certamente que necessitam de tal confirmação pois são, e permanecem, hipotéticas apesar de tudo. O interesse do problema é, todavia, tão grande que não me arrependo de o ter apresentado.