

Uma reflexão em torno das tarefas de investigação

Joana Porfírio e Hélia Oliveira

Introdução

O desenvolvimento do projecto MPT foi fortemente influenciado pela importância de estudar sob diversos pontos de vista a problemática da introdução de tarefas de investigação na aula de Matemática. A produção destas tarefas constituiu, desde o início, um dos objectivos mais destacados do projecto. Uma primeira versão das tarefas foi surgindo por diversas vias, procurando-se que se revestissem de alguma originalidade. Por vezes, eram construídas tentando concretizar uma abordagem investigativa a certo conceito ou tema matemático, sendo, neste caso, muito útil a experiência de ensino dos elementos do grupo. A experimentação das tarefas em aulas de diversos níveis de escolaridade gerou sucessivas reformulações no seu formato, e até mesmo, no seu conteúdo. Esta fase de experimentação um conjunto de dados que se revelou muito útil na elaboração de um pequeno texto de apoio para o professor (que denominámos “notas para o professor”) e que passou a acompanhar cada tarefa.

A produção e experimentação deu origem a sucessivas reformulações das tarefas e das notas para o professor. Com base neste processo propomo-nos realizar uma reflexão em torno do sentido a atribuir ao termo *investigação matemática*, da relação entre as investigações e a matemática escolar, das características das tarefas de investigação e das indicações para o professor que poderão facilitar a integração das investigações matemáticas na aula.

O sentido de investigação matemática

Investigar é um termo que, muitas vezes, é usado em sentido lato para descrever um certo tipo de actividade a que se associam características, tais como, descoberta, exploração, pesquisa, autonomia, tomada de decisões, espírito crítico. Procurando sistematizar os aspectos que nos parecem mais relevantes das tarefas de investigação matemáticas, apresenta-se neste ponto uma discussão que tem por base a análise de duas tarefas. A primeira (ver figura 1) integra um conjunto de propostas através das quais se discutem

aspectos relacionados com a aprendizagem da álgebra. A segunda (ver figura 2) foi desenvolvida pela equipa do projecto e enquadra-se na exploração de regularidades e propriedades numéricas.

Observe a sequência:

- a) Qual a próxima figura desta sequência? Desenhe.
- b) E a seguinte? Desenhe.
- c) Como cada figura se transforma na seguinte?
- d) Quantos pontos tem a 6ª figura?
- e) Qual a 10ª figura? Ela tem quantos pontos?
- f) Qual a 28ª figura?
- g) Quantos pontos tem uma figura numa posição qualquer?

Fig. 1¹

O que têm em comum?

Calcula

$$23 - 2 =$$

$$33 - 3 =$$

$$43 - 4 =$$

$$53 - 5 =$$

...

Investiga se existem características comuns entre os números que se obtêm através deste processo.

Fig. 2²

Ambas as tarefas podem originar actividades de exploração e descoberta. No entanto, será que descobrir e explorar é investigar? Embora a exploração e a descoberta sejam aspectos que estão intimamente ligados com o conceito de investigação matemática, eles não o

¹ Em “Álgebra: das variáveis às equações e funções”, Eliane Sousa e Maria Ignez Diniz, (Abril) 1994

² Tarefa desenvolvida no âmbito do projecto MPT

caracterizam totalmente. Assim, explorar e investigar dizem respeito, sobretudo, ao processo enquanto que descobrir aponta, predominantemente, para o produto.

O conceito de investigação relaciona-se com a actividade que os matemáticos profissionais desenvolvem ao produzirem conhecimento. Deste modo, investigar tem como objectivo descobrir algo recorrendo a um processo, de alguma forma, sistemático. Por seu turno, a exploração, embora constitua uma etapa preparatória da investigação propriamente dita, é um processo com menor intencionalidade. Investigar, neste contexto, significa ser capaz de formular boas questões e usar processos e conhecimentos matemáticos que permitam tomar decisões relativamente a essas questões, concebendo e testando e redefinindo conjecturas. Finalmente, será importante procurar validar as conjecturas que resistiram a sucessivos testes. A investigação é, pois, um processo intencional que tem por objectivo a descoberta. O envolvimento do aluno neste tipo de actividade decorre, em boa medida, do prazer que sente ao estabelecer relações matemáticas desconhecidas para si.

Observando as duas tarefas anteriores é claro o apelo que ambas fazem à descoberta matemática. No entanto, na primeira, o objecto da investigação está completamente definido. Aos alunos caberá encontrar um processo que não conhecem à partida e que permita responder às questões que lhe são colocadas. Pelo contrário, na tarefa 2 é feito um convite para formularem as suas próprias questões. Assim, identifica-se claramente a possibilidade das explorações dos diversos alunos tomarem direcções distintas que conduzam a diferentes conclusões. Pelo contrário, na tarefa 1, trata-se de seguir um processo convergente que leve à descoberta de uma relação. Permitindo calcular o número de pontos numa figura qualquer. Parece, pois, que a tarefa 1 se aproxima bastante do que habitualmente se entende por problema e que a tarefa 2 constitui um exemplo do que se entende por uma investigação matemática.

O enunciado da tarefa 2 expressa a *divergência* do processo de investigação. É possível formular diferentes questões: “Que tipo de números se obtêm?”; “Que regularidades se observaram no último dígito?”; “O que se obtém quando se calcula a diferença entre números consecutivos?”; “Quais as características dos números obtidos com um expoente diferente?”; “Que tipo de características se observam se se tratar de uma adição?”. O aluno apercebe-se, progressivamente, da grande diversidade de caminhos por onde pode enveredar a sua investigação, o que o obriga a tomar decisões sobre o foco da sua atenção.

Cada uma destas questões poderá constituir o início de um caminho não linear em que os alunos recolhem, organizam e analisam dados, formulam e testam conjecturas. De facto, a interacção de todos estes aspectos, é uma característica importante do processo de investigação. Por exemplo, a reformulação de uma conjectura que não resistiu a todos os testes realizados, pode constituir um novo desafio que poderá originar a recolha de mais dados e/ou a sua reorganização.

Um objectivo importante é conseguir chegar a uma fase em que uma ou mais conjecturas resistem a sucessivos testes. Os alunos, sobretudo os que têm pouca experiência de trabalho neste tipo de tarefas, tendem a dar-lhes o estatuto de conclusões. Ou seja, uma relação que se verifica ser válida para vários casos, é assumida como sendo válida para todos. Coloca-se então nesta fase a questão da demonstração ou prova. Do nosso ponto de vista é importante salientar duas ideias:

- a realização de sucessivos testes não garante a validade de uma relação para todos os casos;
- a questão “como poderei verificar se essa relação se verifica sempre?” deve ser analisada.

A primeira ideia, embora sem envolver dificuldades de maior, é sobretudo importante por constituir uma característica importante da matemática mas que os alunos, sobretudo numa fase inicial de trabalho em torno das investigações, tendem a ignorar.

A segunda ideia, a vários níveis, inclui aspectos mais complexos. Será importante, em primeiro lugar, salientar que quando nos referimos a uma prova ou demonstração estamos a considerar as justificações que podem ser organizadas com base num raciocínio lógico ou, pelo menos, plausível.

No entanto, os conhecimentos matemáticos dos alunos, nem sempre lhes permitem estabelecer uma prova. Nestas situações, o professor, para além de realçar a importância de realizar um número significativo de testes deve vincar que apenas se poderá, com fase no trabalho desenvolvido, chegar a uma conclusão do tipo “parece que esta relação se verifica sempre”.

Mas, nas tarefas de investigação em que está ao alcance dos alunos chegar à prova das conjecturas que resistiram a vários testes, este aspecto deve ser cuidadosamente trabalhado. Para tal considera-se fundamental que o professor, em momentos colectivos de discussão com toda a turma, aprofunde este aspecto.

A relação entre investigação e a matemática escolar

A relação tarefas de investigação/conhecimentos matemáticos é um aspecto que se coloca quando se pretende propor este tipo de actividade para a sala de aula. Mais concretamente: até que ponto o valor de uma tarefa como investigação depende dos conhecimentos ou da experiência dos alunos na Matemática? Podemos imaginar situações em que a “viagem” matemática que a tarefa pretende originar já poderá ser conhecida do aluno. Nesta situação a tarefa não constituirá uma verdadeira investigação para ele. Também poderá acontecer que, uma vez que o “destino” já é conhecido, a “viagem” não se revista de particular interesse. No entanto, muitas das vezes, o “caminho” proporciona

novos olhares sobre relações matemáticas que podiam não ter sido ainda evidentes, constituindo assim um verdadeiro prazer a oportunidade de o percorrer. Relativamente a algumas tarefas de investigação é possível imaginar tantas extensões que dificilmente elas se tornam inadequadas para alguém, mesmo que possua muitos conhecimentos matemáticos. Assim, o valor de uma tarefa, como investigação, não se subordina directamente aos conhecimentos matemáticos de cada indivíduo. No entanto, certamente, que determinados conhecimentos matemáticos poderão constituir pré-requisitos para a exploração de algumas tarefas.

As tarefas de investigação

O ponto de partida para uma investigação pode surgir em situações diversas: uma discussão entre os alunos e o professor, uma questão colocada por um aluno ou pelo professor. No caso deste projecto, uma vez que se pretendia criar um conjunto de propostas escritas que dessem origem a actividades de investigação, foram sobretudo problematizados os aspectos relativos à produção de enunciados escritos.

O grau de estruturação é um dos aspectos sobre o qual importa reflectir. Provavelmente, perante várias tarefas, os alunos não se sentirão tão perdidos como na tarefa 2 pois conseguirão identificar um conjunto de “coisas para fazer”. Pelo contrário, perante a tarefa 2, depois de calcularem o valor de cada diferença, será bastante provável que muitos alunos chamem de imediato o professor perguntando “o que é para fazer”. A definição do nível desejável de estruturação de uma tarefa de investigação estará sempre muito dependente das experiências anteriores dos alunos e do professor. Tarefas menos estruturadas podem constituir experiências significativas e originar discussões bastante ricas. Do nosso ponto de vista, este aspecto, embora na fase de concepção da tarefa seja um elemento que deve ser cuidadosamente analisado, não constitui por si uma marca de maior ou menor “qualidade” de uma investigação. Mais importante ainda, não consideramos que o conceito de investigação esteja intrinsecamente ligado a determinado grau de estruturação.

No sentido de promover actividade de natureza investigativa há que ter em conta, para além do grau de estruturação da tarefa, a forma como as propostas são redigidas para os alunos. A fraseologia utilizada é importante para que o aluno entenda qual a natureza da actividade que se pretende que ele desenvolva. Deste modo, ainda que “indica se existem características comuns...” ou “investiga se existem características comuns...” possam dar origem à mesma actividade, o facto de na segunda formulação surgir a palavra “investiga” dará o sinal ao aluno de que se espera que ele explore a situação em várias direcções e que não dê apenas uma resposta afirmativa ou negativa. A utilização nas próprias tarefas de termos muito conotados com as investigações tem a dupla vantagem de estes passarem a fazer parte do vocabulário dos alunos e, reciprocamente, de os ajudar a perceber que tipo

de actividade se trata. Ainda assim, tal como foi referido quanto ao grau de estruturação da tarefa, também a utilização de tais termos, *per si*, não garante a existência de um espírito investigativo nos alunos. Com uma experiência continuada é razoável pensar que os alunos sejam capazes de desenvolver uma investigação matemática, independentemente do enunciado conter ou não indicações explícitas sobre a natureza da actividade que é esperada.

Constituindo a prova parte integrante do processo investigativo, como incentivar os alunos a procurarem argumentos para validar as suas conjecturas? Nem sempre a demonstração está ao alcance do aluno, mas quando está, será apropriado sugerir-la explicitamente no enunciado da tarefa? Se tal não for feito corre-se o risco de criar nos alunos a ideia errada de que não necessitam de validar as conjecturas que formulam. Um modo de evitar esta situação, é procurar que o próprio enunciado consiga transmitir o carácter provisório das conclusões. Também se poderão incluir, no final do enunciado, questões do tipo: “justifica as relações que estabeleceste” ou “o que te leva a pensar que as relações que identificaste se verificam sempre?”. Quando estas indicações se mostrem inadequadas, terá de ser o professor a chamar a atenção dos alunos para este aspecto.

Indicações para o professor

A decisão de utilizar tarefas de investigação no processo de ensino-aprendizagem recai naturalmente sobre o professor. O acesso a diversas tarefas e a sugestões sobre a sua utilização pode estimular uma prática que integre este tipo de trabalho.

A indicação dos objectivos da tarefa e o seu enquadramento curricular bem como a antecipação de algumas dificuldades dos alunos, são elementos que podem ajudar o professor a desempenhar o seu papel de uma forma mais adequada à complexidade deste tipo de actividade. Um outro recurso importante para o professor são as descrições feitas por outros professores que já utilizaram a mesma tarefa na sala de aula, dando-lhe oportunidade para aprender com a experiência reflectida de outros.

Um dos aspectos que se destaca em muitas tarefas de investigação é a possibilidade que encerram de virem a ser exploradas com graus diversos de profundidade, tornando-se acessíveis a alunos de níveis de escolaridade distintos ou com desempenhos diferenciados. Para o professor que contacta com determinada tarefa é importante saber o que pode esperar dos alunos de diversos anos de escolaridade, bem como dos diferentes desempenhos que pode encontrar numa mesma turma. A este respeito, o contacto com exemplos concretos do trabalho de alunos pode ser uma forma sugestiva de proporcionar essa visão sem, por outro lado, ser demasiado preditiva quanto às consecuições de cada aluno. Esse contacto pode basicamente dar confiança ao professor para que proponha a

tarefa aos seus alunos pelo facto de ter observado que outros alunos realizaram uma actividade satisfatória.

As indicações específicas relativamente aos conteúdos curriculares podem contribuir para clarificar o modo de integrar a exploração das tarefas de investigação no trabalho que o professor se propõe desenvolver com os seus alunos. Este aspecto será menos relevante nas situações em que o professor leva para a sala de aula, de uma forma esporádica, uma ou outra tarefa de investigação. Nestes casos, poderá bastar que se assegure que os alunos dominam os pré-requisitos necessários. No entanto, quando o professor se propõe realizar um trabalho que contemple, de uma forma mais sistemática, a exploração de tarefas de investigação, este aspecto torna-se especialmente pertinente. Assim, ter ideais concretas sobre as pistas que se poderão levantar na sequência da exploração de uma tarefa, ajudará a decidir sobre a sequência dos temas a abordar. No entanto, será importante ter presente que esta sequência terá de ser encarada de uma forma bastante flexível. Uma das características da abordagem investigativa, a possibilidade de se seguirem caminhos divergentes, pode levar o professor a seguir pistas que entretanto surgiram e que poderão conduzir à exploração de aspectos que anteriormente não tinha previsto. Numa situação deste tipo, o professor enfrenta o dilema de proporcionar ou não a oportunidade de explorar as várias ideias que foram surgindo. As limitações de tempo e a extensão dos conteúdos curriculares, poderão influenciar uma decisão que entra em contradição com o significado de investigar. De facto, a exploração de uma tarefa, prevista inicialmente para durar uma ou duas aulas, poderá prolongar-se por bastante mais tempo de forma a seguir as várias pistas que foram surgindo. Caberá ao professor decidir sobre a opção que, perante cada situação concreta, considera mais adequada.