

## Concepções sobre a Matemática e trabalho investigativo<sup>1</sup>

Irene Segurado, *Escola B 2,3 Rui Grácio, Montelavar*

João Pedro da Ponte, *Universidade de Lisboa*

A mudança de uma sociedade industrializada para uma sociedade de informação, característica da nossa época, exige alterações profundas na educação em geral e também na disciplina de Matemática. Espera-se hoje que a escola garanta a todos os alunos uma formação matemática básica, levando-os a adquirir a capacidade e o gosto de pensar matematicamente (NCTM, 1991).

Para isso, é preciso que os alunos tenham uma experiência escolar viva e gratificante nesta disciplina. A resolução de problemas pode ajudar a atingir esse objectivo. No entanto, a integração da resolução de problemas no currículo levanta diversas dificuldades: Que tipos de problemas escolher? Que peso dar à resolução de problemas? Como articular a resolução de problemas com outro tipo de trabalho? O NCTM, que na sua *Agenda para acção* (NCTM, 1980) apresentava a resolução de problemas como constituindo o foco do ensino da Matemática, sublinha alguns anos mais tarde a necessidade de dar atenção – a par da resolução de problemas – às conexões, à comunicação e ao raciocínio (NCTM, 1991). Mais recentemente, autores proeminentes da área da resolução de problemas têm apontado a necessidade de os alunos serem capazes de utilizar os processos próprios da investigação matemática – generalizar, estudar casos particulares, modelar, simbolizar, comunicar, analisar, explorar, conjecturar e provar (Mason, Burton e Stacey, 1991; Schoenfeld, 1991).

Para melhorar o desempenho dos alunos na resolução de problemas, começaram por propor-se estratégias instrucionais que giram, essencialmente, em torno do ensino de heurísticas, sobre forma “clássica” (proposta por Pólya, 1957) ou “modificada” (ver, por exemplo, Schoenfeld, 1982). Só bastante depois se começou a dar importância à ideia da formulação de problemas, em que se requer que o aluno vá para além do que lhe é sugerido pelo enunciado, interpretando a situação e colocando as suas próprias questões — tarefa que exige claramente mais flexibilidade e criatividade do que a resolução de um problema rotineiro (Silver, 1996).

Em Portugal, estas novas tendências curriculares encontraram expressão na *Renovação do Currículo de Matemática* (APM, 1988), onde se defendem mudanças profundas no ensino e aprendizagem, de modo a combater o insucesso nesta disciplina:

A Matemática é essencialmente uma actividade criativa constituindo a formulação e a resolução de problemas o seu núcleo fundamental. Por outro

lado, nas suas relações com as outras ciências e demais actividades humanas, o seu contributo fundamental é ainda o papel que desempenha na resolução dos problemas de cada uma dessas áreas. Por fim concordaremos que muitos aspectos da nossa vida diária constituem situações problemáticas. (p. 23)

Os programas portugueses de Matemática reflectem de algum modo este sentir (Ministério da Educação, 1991a, 1991b, 1997). Valorizando tanto a aquisição de conhecimentos, como o desenvolvimento de capacidades e aptidões e as atitudes e valores, ao mesmo tempo que privilegiam metodologias de ensino centradas no aluno, indicam que aprender Matemática deve ir além da aprendizagem de conceitos, procedimentos e das suas aplicações. Pressupõem que *aprender* Matemática é sobretudo *fazer* Matemática tal como é preconizado pelo NCTM (1991).

Este enquadramento curricular sugere que a realização de actividades de exploração e investigação pelos alunos pode assumir uma grande importância. Na verdade, em Matemática, a actividade investigativa é essencialmente caracterizada por começar com objectivos pouco precisos, que vão sendo progressivamente estruturados, e por envolver processos como conduzir experiências, formular, testar e aperfeiçoar conjecturas e procurar demonstrá-las quando temos razões para crer que são verdadeiras (Ponte e Matos, 1996). Este tipo de actividade proporciona aos alunos o contacto com uma parte essencial da Matemática que, de um modo geral, eles mal chegam a conhecer.

O ensino a que os alunos habitualmente são sujeitos assenta quase exclusivamente na memorização e na resolução repetitiva de exercícios, o que os leva a adquirir uma visão dualista da Matemática, em termos de certo-ou-errado (Borasi, 1991). Esta visão impede-os de compreender que se podem usar diversas abordagens em muitos problemas matemáticos. Desde muito cedo os alunos vão formando e consolidando também as suas concepções sobre o modo de aprender Matemática, a forma de lidar com tarefas matemáticas, o papel do professor e do aluno, a forma de interagir com os colegas. A ênfase no trabalho em tarefas estruturadas e a pouca atenção à formulação de questões e à interpretação e validação de resultados, contribuem para criar nos alunos uma visão empobrecida do modo de trabalhar e aprender nesta disciplina. Contrariar concepções incorrectas acerca da Matemática e da sua aprendizagem por meio do envolvimento dos alunos em verdadeira actividade matemática é, pois, fundamental.

Há que investigar se a realização destas actividades na sala de aula é viável em níveis de ensino relativamente elementares e se elas contribuem, de facto, para a formação de novas concepções nos alunos. Mais concretamente, é importante saber se realmente os alunos trabalham de modo produtivo em actividades deste tipo, e de que forma eles evoluem no sentido de aprenderem a dar valor à Matemática, a tornar-se confiantes nas suas capacidades e aptos a resolver problemas e a raciocinar matematicamente. Deste modo, o presente estudo tem por objectivo perceber de que forma é que um aluno do 6º ano do ensino básico se pode

envolver em actividades de exploração e investigação na sala de aula e avaliar a sua influência na mudança – ou, pelo menos, no enriquecimento – das suas concepções.

### **Actividades de investigação no ensino e na aprendizagem**

Interessa conhecer os resultados de investigações sobre o alcance curricular e os processos de raciocínio dos alunos em trabalho exploratório e investigativo. É importante saber se este tipo de tarefa, dada a sua sofisticação matemática, está ao alcance dos alunos de todos os níveis de ensino ou apenas dos níveis mais avançados. É também importante saber se este trabalho é adequado para a generalidade dos alunos, ou apenas para os que revelam mais inclinação pela Matemática. Diversos autores argumentam que as capacidades básicas e as capacidades de ordem superior não devem ser rigidamente separadas, podendo antes desenvolver-se em conjunto (ver, por exemplo, Abrantes, 1994; Resnick, 1987). Será que a investigação realizada sustenta esta ideia?

Na verdade, é muito escassa a investigação que se debruça sobre o trabalho dos alunos especificamente neste tipo de tarefa. Atendendo a que se trata de um trabalho próximo do que os alunos efectuam quando formulam problemas ou procuram resolver problemas abertos, olharemos também para o que nos diz a investigação educacional nestes domínios.

Num conjunto de estudos passados em revista por Silver (1996), a formulação de problemas tende a surgir como uma actividade criativa destinada apenas a alunos com uma capacidade excepcional para a Matemática ou provenientes de grupos sociais favorecidos. Este autor indica, no entanto, que outros trabalhos apontam numa direcção muito diferente. Na verdade, estudos realizados em escolas públicas, onde a diversidade de origem social dos alunos é muito grande, mostram que todos eles podem beneficiar com este tipo de experiência matemática. Também para Ernest (1996), a aprendizagem da Matemática está ao alcance de todos – e não apenas da minoria socialmente favorecida – sendo mesmo uma forma de conferir poder epistemológico à generalidade dos alunos.

Em Portugal, Oliveira, Ponte, Cunha e Segurado (1997) referem um estudo envolvendo os alunos do 5º, 6º e 7º anos de escolaridade em explorações e investigações matemáticas, tendo como objectivo a utilização de conceitos e processos matemáticos e o seu empenho na formulação de conjecturas, em discussão e argumentação matemática. Os autores concluem que as tarefas de exploração e investigação estão ao alcance de todos os alunos e não apenas dos melhores. As actividades realizadas mostram que os alunos podem realmente envolver-se em actividade matemática significativa e que é possível eles desenvolverem uma assinalável autonomia. No entanto, um outro estudo relatado por Ponte e Carreira (1992) mostra que os alunos do ensino secundário podem reagir desfavoravelmente a tarefas de natureza problemática, quando não as identificam como relevantes para a sua preparação nesta disciplina.

Surge, assim, com bastante suporte a ideia que o trabalho investigativo poderá estar ao alcance da generalidade dos alunos dos diversos níveis de ensino mas pode defrontar-se com dificuldades decorrentes das suas concepções e atitudes, bem como de factores associados ao contexto escolar e ao sistema educativo. Deste modo, torna-se necessário um melhor conhecimento das eventuais dificuldades ligadas às concepções e atitudes dos alunos e das estratégias a que o professor pode recorrer para as superar.

Alguns estudos mostram, de modo bastante concreto, as potencialidades da formulação de problemas para a aprendizagem. Por exemplo, Winograd (1991) relata uma experiência com alunos de 5º ano em que estes escrevem problemas, por si inventados, destinados a serem posteriormente resolvidos por colegas de outras turmas. Os alunos escreveram, resolveram e partilharam problemas durante quatro dias por semana, durante um ano lectivo. A experiência mostra que eles evoluem no sentido que atribuem à formulação de problemas, no seu desempenho e, especialmente, na sua propensão para a Matemática. O aspecto motivacional também se salienta, mostrando a maior parte dos alunos preferir os problemas formulados pelos colegas aos que se encontram no manual escolar.

Diversos autores portugueses estudaram também a actividade dos alunos na realização de tarefas que de algum modo se assemelham às investigações matemáticas. Assim, Porfírio (1993), num estudo feito em ambiente de aula com alunos do 7º ano de escolaridade, refere que estes conseguiram formular problemas com êxito quando colocados em grupo, tendo manifestado mais dificuldade quando lhes foi pedido que formulassem problemas sozinhos. Depois de, numa primeira fase, os alunos terem formulado problemas com uma estrutura idêntica à de outros problemas anteriormente já resolvidos, evoluíram no sentido de propor problemas mais intrigantes, complexos e criativos. A autora refere-se ainda à importância que teve no desenvolvimento da sua capacidade de formulação de problemas o facto de as professoras terem feito extensões aos problemas por eles apresentados. Esta experiência evidencia como, com este trabalho, ganham valor aspectos como a capacidade criativa e a utilização dos conhecimentos matemáticos. Ao tornarem os problemas mais interessantes os alunos revelam claramente como é importante o papel da motivação na aprendizagem.

Outro investigador, Matos (1991), relata um estudo com alunos do 8º ano, realizado num espaço extra-aula, que incidia sobre as suas concepções e atitudes no contexto de actividades de projecto e de investigação com utilização da linguagem Logo. O autor verifica que os alunos, ao se envolverem nas actividades de investigação, experimentaram momentos de prazer que lhes permitiu apreciar a Matemática, levando-os a uma maior confiança na abordagem dos problemas e capacitando-os para uma maior flexibilidade no recurso aos conhecimentos matemáticos já possuídos.

Investigações centradas particularmente sobre os processos de raciocínio dos alunos mostram outras facetas do seu trabalho. Assim, Ponte e Matos (1996), numa investigação realizada com alunos do 8º ano colocados perante uma actividade de investigação no computador, observam que eles revelam algumas dificuldades em formular conjecturas. As

interacções entre os elementos do grupo eram reduzidas, sendo muitas das descobertas feitas apenas a partir das questões colocadas por um dos investigadores. Estes autores concluem que, apesar dessas dificuldades, as actividades de investigação proporcionam oportunidades para o debate e a reflexão e promovem o conhecimento de assuntos mais gerais.

Os estudos efectuados mostram que a realização de trabalho investigativo na sala de aula tem grandes potencialidades mas também envolve os seus problemas. Evidencia-se a necessidade de perceber a origem das dificuldades conceptuais que os alunos podem ter na compreensão destas tarefas e nas estratégias a usar na sua realização. Verifica-se, também, que se os alunos não identificam este tipo de trabalho como relevante para a sua aprendizagem, podem assumir uma atitude de rejeição. Estes aspectos podem estar associados a concepções que desvalorizam a importância deste tipo de trabalho, sugerindo a pertinência de um olhar mais atento sobre esta questão.

### **Concepções dos alunos**

“Concepção” é um conceito de difícil definição. Thompson (1992) identifica concepções (*conceptions*) como sendo estruturas mentais das quais fazem parte tanto as crenças (*beliefs*) como qualquer tipo de conhecimento adquirido através da experiência, nomeadamente significados, conceitos, proposições, regras, imagens mentais, preferências, etc. Muitos autores falam de convicções, visão, expectativas, representações, etc. – ideias que parecem todas elas incluídas na perspectiva de Thompson. Schoenfeld (1992) parece atribuir um significado também amplo à ideia de concepção que ele define como “compreensões e sentimentos individuais que moldam as formas como cada um conceptualiza e se envolve no comportamento matemático” (p. 358). Para Ponte (1992) as concepções podem ser entendidas como um abstracto conceptual que desempenha um papel fundamental em todo o pensamento e acção, fornecendo meios de ver o mundo e de organizar os conceitos. Surgem assim como pontos de vista ou perspectivas.

Schoenfeld (1985) elabora um pouco mais esta ideia, indicando que as concepções não operam individualmente, mas fazem parte de um sistema:

Um sistema de concepções é a visão que uma pessoa tem do mundo matemático, a perspectiva com a qual a pessoa aborda a Matemática e as tarefas matemáticas. As concepções da pessoa sobre a Matemática podem determinar de que modo ela decide abordar um problema, que técnicas usará ou evitará, quanto tempo e esforço dedicará ao problema, etc. As concepções estabelecem o contexto dentro do qual operam os recursos, as heurísticas e o controlo (p. 45).

Diversos investigadores têm sublinhado a importância do estudo das concepções dos alunos. São vários os estudos que se referem às suas concepções acerca da Matemática e do

que é aprender Matemática como factores que interferem no comportamento matemático destes, afectando-o por vezes de forma negativa. Assim, para Garofalo (1989) a importância das concepções reside no facto de elas influenciarem a forma como os alunos pensam e abordam e resolvem as tarefas matemáticas, como estudam e como participam nas aulas. Também Winograd (1991) afirma que o desempenho dos alunos nas tarefas escolares tem mais a ver com as suas concepções do que com a aprendizagem de conceitos, processos e estratégias. A mesma ideia é ainda apontada por Schoenfeld (1983):

As acções cognitivas perceptíveis produzidas pelos [nossos alunos], são muitas vezes resultado de concepções, consciente ou inconscientemente mantidas acerca de: (a) tarefa em mão, (b) ambiente social dentro do qual a tarefa tem lugar, (c) a autopercepção individual da resolução da tarefa e a relação entre esta e o ambiente. (p. 330)

O professor não só deve ter consciência da existência de tais concepções e das suas influências, como saber o modo de as influenciar. Para Spangler (1992), a avaliação das concepções que os alunos têm acerca da Matemática pode ajudar a planear aulas e a estruturar o ambiente de trabalho, de modo a que os alunos desenvolvam e criem concepções mais verdadeiras acerca desta ciência.

Importa, assim, conhecer as concepções identificadas nos alunos, e que e que os levam a não perceber o verdadeiro sentido da Matemática e da sua aprendizagem. Frank (1988), num estudo feito com alunos do 6º ao 8º ano de escolaridade que frequentam um curso de resolução de problemas com computadores, identifica cinco concepções principais dos alunos acerca da Matemática e da sua aprendizagem, que resultam, no seu entender, do modo tradicional de ensino<sup>2</sup>:

(a) *A Matemática é cálculo.* A excessiva importância dada ao cálculo numérico e à aplicação de fórmulas está na base por certo desta concepção, que se tornará contraproducente se pretendermos, por exemplo, que os alunos resolvam uma dada tarefa para que não dispõem previamente de uma regra.

(b) *Os problemas de Matemática são questões que se resolvem rapidamente e em poucos segundos.* Geralmente, no fim de cada capítulo, o professor treina algumas estratégias de resolução para o problema em estudo. Assim, os alunos procuram resolver um problema aplicando-lhe uma das estratégias aprendidas. Se não conseguem desistem de imediato, não procurando outras alternativas. Para eles um problema nunca deve levar mais do que 5 a 10 minutos a resolver.

(c) *Em Matemática, o objectivo é obter “respostas certas”.* Ao só ser valorizado o trabalho quando é obtida uma resposta correcta, leva a que os alunos não considerem como valioso o esforço desenvolvido na procura de uma solução para um dado problema. Raciocinar sozinho será, pois, uma perda de tempo. Assim, aprender através do erro não tem qualquer significado e consequentemente quando se erra é melhor apagar tudo e começar do

zero. Para esta concepção contribui o sistema de avaliação, geralmente assente em testes escritos, onde os alunos demonstram a sua sabedoria através do número de respostas correctas.

(d) *O papel do aluno é receber conhecimentos de Matemática e demonstrar que os adquiriu.* A postura tradicional do aluno dentro da sala de aula é estar com atenção passando para o caderno o que professor pretende ensinar, de forma a posteriormente poder estudar e imitar nos testes de avaliação. Os alunos não se sentem assim motivados a pensar sobre o porquê do que vão aprendendo. A Matemática formal (demonstrações, deduções, definições) não contribui, para eles, de forma alguma para a resolução de problemas. Ela só tem utilidade para mostrar ao professor que se sabe.

(e) *O papel do professor é transmitir conhecimentos de Matemática e verificar que os alunos os adquiriram.* Os alunos aceitam pacificamente o professor como a autoridade na sala de aula. Se ele explicar bem então os alunos serão capazes de reproduzir rapidamente o que foi ensinado, obtendo assim respostas correctas.

Para os alunos, uma ideia ou resultado matemático é certo ou errado, não existindo áreas nubladas em que o julgamento pessoal, preferências ou valores possam desempenhar um papel importante (Borasi, 1991). Para eles, a Matemática é desenvolvida por pessoas prodigiosas e criativas — os matemáticos — não estando ao seu alcance fazer algo de interessante. Estas concepções conduzem os alunos a pensar, por exemplo, que não é bom deduzir coisas de forma pessoal, que nada se aprende a partir do erros, que demorar muito num problema é uma perda de tempo e que um bom professor nunca deve confundir o aluno. Trata-se de ideias que levam os alunos a não ter confiança nas suas próprias capacidades matemáticas nem a empenhar-se seriamente na realização das tarefas matemáticas mais desafiantes.

Vários têm sido os autores que têm apresentando formas de actuação que podem levar os alunos a reformular as suas concepções permitindo-lhes adquirir um sentido mais correcto da natureza desta ciência. Borasi (1990), por exemplo, considera que, para isso, os professores devem criar situações de aprendizagem que os levem a “serem conscientes de, e a questionarem as suas percepções da Matemática, à medida que experimentam e reflectem sobre os aspectos humanistas da Matemática e sua aprendizagem” (p. 181). A autora concretiza a sua ideia apresentando estratégias de actuação que levem os alunos a questionar a sua visão dualista da Matemática, onde tudo está certo ou errado: (a) estimular algum conflito cognitivo através de paradoxos e contradições insolúveis — como tentar definir  $0^0$ , ou afirmações que podem estar certas ou erradas dependendo do contexto; (b) levar os alunos a questionar a sua concepção de que existe um único modo de resolver um problema — a partilha das estratégias utilizadas; e (c) envolver os alunos em situações problemáticas que exijam a formulação de questões, a selecção de informação relevante e a validação de soluções. Esta autora refere ainda como importante que seja dada oportunidade aos alunos de reflectirem nas suas experiências. Os momentos de discussão serão um bom meio para esse

fim principalmente se forem acompanhados com actividades expressivas escritas. A produção de relatórios poderá fornecer um registo suplementar de desenvolvimento.

Como argumenta Spangler (1992), a relação que existe entre as concepções e a aprendizagem levanta a questão de saber como usar este ciclo de influência para reforçar atitudes positivas nos alunos face à Matemática. Esta autora sublinha a importância de os alunos tomarem consciência das suas próprias concepções em relação à Matemática. Assim, para ela, colocar-lhes questões de resposta aberta é um meio de trazer estas concepções a um nível consciente. Ao responderem a essas questões, os alunos irão por certo manifestar concepções que, ao serem alvo de discussão, poderão mais facilmente sofrer alterações.

Garofalo (1989) advoga que se se pretende desenvolver nos alunos outras concepções há que pensar de outro modo a sala de aula. As aulas de Matemática tradicionais, onde é ensinado um processo, através de um conjunto de exemplos e exercícios de prática, devem dar lugar a outras onde os alunos desenvolvam concepções mais correctas acerca desta disciplina:

O ensino da Matemática deve dar ênfase a actividades que encorajem os alunos a explorarem tópicos; desenvolver e refinar as suas próprias ideias, estratégias e métodos; e reflectirem e discutirem sobre conceitos e processos matemáticos (p. 504).

Para Frank (1988) as convicções matemáticas dos alunos desenvolvem-se, lentamente, ao longo das suas experiências matemáticas, vividas na sua grande maioria nas aulas desta disciplina. Nestas, os alunos, aprendem muito mais que os conteúdos matemáticos. Eles desenvolvem formas de encarar a Matemática que podem ajudá-los ou constrangê-los na resolução de problemas. Assim, esta autora apresenta algumas sugestões a ter em conta se se pretende desenvolver nos alunos concepções acerca da Matemática que se tornem úteis na resolução de problemas: (a) começar a resolver problemas desde o início da escolaridade; (b) propor problemas desafiadores, que ocupem os alunos mais do que cinco ou dez minutos, requerendo o uso de diversas estratégias; (c) centrar a atenção nos processos de resolução e não nas respostas, discutindo e valorizando os diferentes processos, mesmo que não conduzam a uma resposta final correcta; (d) usar com frequência o trabalho em pequenos grupos, dando oportunidade aos alunos de comunicar matematicamente, de modo a que desenvolvam confiança em si e nos colegas como autoridades em Matemática e não dependam só do professor; e (e) não colocar a ênfase no cálculo, pois é a resolução de problemas que deve ser valorizada se queremos que os alunos adquiram uma boa formação matemática.

Em resumo, a investigação realizada sugere que os alunos manifestam por vezes concepções inesperadas e contraproducentes relativamente à Matemática e à sua aprendizagem, que se revelam sobretudo quando confrontados com tarefas diferentes das habituais na aula de Matemática. Os diversos autores dão pistas para a transformação destas

concepções: a realização de experiências matemáticas significativas, a reflexão – oral, escrita, individual e em grupo – sobre essas mesmas experiências e a adequação do modo de trabalhar na sala de aula a esses objectivos curriculares. Torna-se importante saber qual o alcance destas estratégias nos diversos níveis de ensino.

### **Metodologia**

Os desempenhos em tarefas matemáticas sofisticadas e as concepções constituem fenómenos inegavelmente complexos e ainda mal conhecidos. Pretendemos estudá-los tal como eles são, sem interferir sobre eles, tal como existem no seu ambiente natural, para o que é adequada uma abordagem qualitativa, em que (a) este ambiente é a fonte directa dos dados e o investigador o principal instrumento de recolha; (b) os dados recolhidos são predominantemente descritivos; (c) a preocupação incide mais nos processos do que nos produtos; (d) é dada especial atenção ao ponto de vista dos participantes; e (e) a análise dos dados segue um processo indutivo (Bogdan e Biklen, 1982).

Atendendo à grande complexidade dos fenómeno em causa e ao interesse em recolher informação aprofundada, considerou-se indicado estudar um único aluno, procurando dar especial atenção à sua evolução ao longo de alguns meses de trabalho. Para isso, procurou-se tirar partido de fontes múltiplas de evidência, como entrevistas, observações, gravações audio e vídeo e documentos diversos (Patton, 1987; Yin, 1989).

O aluno escolhido – Francisco – pertence a uma turma do 6º ano, leccionada por um dos autores do presente artigo, e foi considerado interessante pelo facto de revelar logo na primeira entrevista<sup>3</sup> um assinalável gosto por actividades de natureza exploratória e investigativa. Na aula anterior à resolução da primeira tarefa, a professora integrou-o num grupo constituído por ele e mais três colegas: Cláudio, Ilda e Susana.

A turma onde ele se integra é constituída por 25 alunos (15 rapazes e 10 raparigas) com idades compreendidas entre os 10 e os 13 anos. Todos eles frequentam pela primeira vez o 6º ano. Não houve reprovações no final do 5º ano em Matemática, havendo, no entanto, 4 alunos que apresentam algumas dificuldades, tendo frequentado aulas de apoio pedagógico. Os alunos provêm de um meio semi-rural com poucos atractivos, o que favorece o seu interesse pela escola, sendo o número de faltas reduzido. Os pais não possuem grandes habilitações literárias, não ultrapassando o equivalente ao 9º ano de escolaridade.

As tarefas de exploração e investigação, em número de quatro (ver anexo), realizaram-se nas aulas de Matemática normais, à cadência de uma por mês, a partir de Janeiro, ocupando dois a quatro tempos lectivos. O facto do estudo ter decorrido no contexto da sala de aula fez com que os alunos não sentissem qualquer artificialidade na situação. A professora já trabalhava com esta abordagem há algum tempo, o que lhe permitiu conduzir estas aulas sem grandes dificuldades, procurando assumir sobretudo o papel de orientadora.

Os dados foram recolhidos pela própria professora da turma. A principal técnica de recolha de dados usada foi a observação participante. Esta técnica permite estudar quase todos os aspectos da existência humana (Jorgensen, 1989), ocupando um lugar privilegiado nas abordagens qualitativas na medida em que possibilita um contacto pessoal e estreito do investigador com o fenómeno a investigar (Ludke e André, 1986). Os alunos tiveram conhecimento de que estavam a ser sujeitos a observação, uma vez que a observação encoberta foi considerada eticamente incorrecta.

A maior parte dos registos, contendo observações e impressões, foram realizados imediatamente após as aulas. Estes registos foram o mais detalhados possíveis, incluindo o modo como as aulas haviam sido planeadas (organização dos alunos, tempo previsto, modo de abordagem) e o modo como decorreram, a maneira como o aluno reagiu e se envolveu nas tarefas. Foram igualmente registados, no fim da aula, alguns episódios significativos. Para além da observação directa, foram ainda efectuadas gravações vídeo e audio das aulas onde foram propostas aos alunos tarefas de cunho investigativo, com o fim de captar aspectos que poderiam passar despercebidos em virtude da atenção da professora ter de acompanhar o trabalho de toda a turma.

Foram ainda feitas duas entrevistas semiestruturadas a este aluno para obter informação sobre aspectos dificilmente observáveis. Uma ocorreu no início e outra no fim do período de recolha de dados, com objectivo de ajudar a identificar as concepções do aluno e possíveis mudanças ou alargamento dessas concepções. As entrevistas foram audiogravadas e posteriormente transcritas de modo a facilitar a sua análise. Depois de transcritas foram tema de conversa entre o aluno e a professora, que de um modo informal procurou esclarecer diversos aspectos.

Foram ainda analisados diversos materiais produzidos pelo aluno, incluindo as respostas dadas nas fichas de trabalho, e uma pequena composição, que foi efectuada no início do estudo, sobre dois episódios relacionados com a Matemática: um agradável e outro desagradável. Estas composições, tal como as entrevistas, tiveram como finalidade ajudar a identificar as suas concepções. As fichas de trabalho permitiram obter informação sobre os conhecimentos e as capacidades do aluno.

Como primeira etapa da análise de dados, procedeu-se à transcrição integral das gravações audio (entrevistas e aulas). Em seguida fez-se uma leitura cuidada de todo o material existente (transcrições das entrevistas, transcrições das aulas, registos de observação, histórias dos alunos, registos escritos dos alunos nas fichas) e procedeu-se ao visionamento dos vídeos. Optou-se por trabalhar inicialmente as entrevistas. Depois de lidas atentamente procedeu-se a uma codificação que teve por base as questões do estudo. Para facilitar a leitura interpretativa os estratos das entrevistas relacionados com cada uma das concepções foram codificadas a diferentes cores. Procurou-se de seguida nas transcrições das aulas momentos que evidenciassem também essas mesmas concepções, assinalando-os de igual modo.

Das transcrições das aulas, foram destacados momentos que pareceram ser relevantes para as questões do estudo. Os registos feitos sobre as aulas e os trabalhos produzidos pelo aluno bem como o visionamento dos vídeos complementaram a análise feita. À semelhança do que foi feito para as entrevistas, os momentos de sala de aula foram também codificados, tendo em conta o desempenho do aluno no trabalho de grupo, as interações, o raciocínio e a mobilização de conhecimentos.

As entrevistas e das composições serviram principalmente para a identificação das concepções. A observação das aulas serviu para perceber de que modo este aluno aborda e se envolve na realização de tarefas de cunho investigativo, entrando em linha de conta com as suas concepções, tendo dado indicações importantes para a realização da segunda entrevista. Serviu também para, em complemento com os registos escritos produzidos, durante a realização das tarefas, identificar os seus conhecimentos e capacidades.

### **Francisco**

Francisco é uma criança calma, reservada, só intervindo quando acha oportuno. Da escola gosta *mais ou menos*<sup>4</sup>, apesar de ser bom aluno. Nos seus tempos livres gosta tanto de jogar à bola como de jogar no computador. Vive relativamente perto da escola. A mãe contacta com regularidade a directora de turma manifestando uma atitude de cooperação. O pai trabalha numa editora, o que lhe proporciona acesso a uma grande variedade de leituras, de que prefere as de aventuras.

O seu relacionamento com os colegas é bom, tanto na aula como fora dela. Num inquérito feito no início do ano lectivo de 1995/96 afirma preferir as disciplinas de Matemática, História, Inglês e Educação Física. O seu gosto pela Matemática é confirmado pelos níveis 5 que obteve ao longo dos dois últimos anos lectivos. Na sala de aula, por sua escolha, ocupa um dos lugares da frente, mostrando uma atitude de interesse pelo que os professores lhe ensinam. Nos trabalhos de grupo geralmente participa de forma discreta, raramente assumindo o papel de líder.

Francisco mostra-se um aluno confiante nas suas capacidades matemáticas. Perante uma tarefa nova, procura resolvê-la do modo semelhante a tarefas que já aprendeu ou através de processos novos por si inventados: *leio com atenção. Tento resolver como nós aprendemos ou arranjar uma forma mais fácil e que dê a mesma coisa. Só que depois tenho de explicar à professora*. Revela um certo gosto pelas tarefas que envolvem descobertas. Descreve com entusiasmo o dia, quando ainda no 1º ciclo, observou sozinho que podia construir a tabuada dos nove por um processo rápido: *comecei a olhar para a tabuada e vi que aquele modo era o mais rápido e sofisticado. Escrevi por ordem e em coluna os algarismos das dezenas [dos produtos], de 0 até 9 e depois o das unidades de 9 até 0*. No entanto, não se atreveu a relatar a descoberta feita à professora, por achar que era um *truque* e que, por isso, esta podia não aceitar.

Refere como as aulas de que mais gosta aquelas em que *a professora dá um certo tempo para se descobrir coisas*. As aulas mais *chatas* são as dos testes porque *quando não se sabe não se sabe, e quando se sabe a mais torna-se aborrecido*. Também refere o prazer que sente no momento das *discussões orais* em que participa toda a turma. Para ele, a troca de *opiniões* é um momento de aprendizagem que encara com satisfação: *nas aulas de discussão há mais acção na aula. É que é interessante ouvir opiniões*. Contudo, muitas vezes apenas participa nas discussões como observador, guardando para si as suas opiniões.

Revelando uma atitude positiva face à Matemática, sente dificuldade em mencionar um episódio desagradável referente a esta disciplina. Pensando um bocado, indica não gostar das divisões: *têm pouca acção e poucas descobertas e coincidências*. Acrescenta ainda: *eu não tive nenhum caso mau com elas, só que não simpatizo e a maior parte dos alunos também não, deve ser da dificuldade. Eu nas contas de dividir tenho uma certa dificuldade*.

### **Desempenho nas tarefas de investigação**

#### **Primeira tarefa – Divisão por 11, 111...**

Francisco encontra-se sentado junto dos colegas, conforme lhes tinha sido indicado pela professora na aula anterior. Quando recebe a folha com a tarefa, começa de imediato a lê-la e mostra-se disposto a resolvê-la. Pára quando a professora solicita *não comecem já a resolver...* e segue com atenção as suas explicações e as questões colocadas por alguns dos seus colegas de turma. Não intervém e parece não ter dúvidas.

Inicia, por si mesmo, a resolução da tarefa, o que leva uma das colegas a interpelá-lo, pois sendo ele um bom aluno, o seu auxílio seria precioso para todo o grupo. Francisco não reage e continua a trabalhar individualmente. Quando lhe parece ter descoberto algo de importante tenta revelá-lo aos colegas. Contudo, se se sente contrariado por estes, requisita a presença da professora que o remete novamente para o grupo. A professora pretende que ele perceba que o seu trabalho só será aceite quando “pertencer” a todo o grupo e que, por isso, ele tem de o transmitir aos seus colegas bem como conhecer o trabalho realizado por estes.

Não intervém na discussão final, assumindo o papel de ouvinte atento.

*Raciocínio e mobilização de conhecimentos*. Francisco, mostra desde início, alguma apetência para a realização de tarefas de investigação. Contudo, é notório que o seu raciocínio é condicionado pela concepção que o grande objectivo é acertar na resposta certa. Assim, quando conjectura que se o denominador é 11 o período é 2, quando o denominador é 111 é 3 e quando é 1111 deve ser 4, não se preocupa muito em testar ele próprio a validade desta afirmação, mas recorre à professora para que esta diga se está bem. Ele mostra-se capaz de entender as questões propostas e avançar com conjecturas mas não sente que o seu papel seja verificar a sua validade.

Um dos argumentos com que é defendida a realização de tarefas de exploração e investigação pelos alunos é que elas permitem a mobilização de diferentes tópicos de ensino e uma melhor compreensão de alguns conceitos. Deste modo, conceitos anteriormente aprendidos podem agora ser utilizados de modo diferente, conduzindo a um melhor domínio e percepção dos mesmos. No caso de Francisco, isso é notório, nesta tarefa, com a utilização do conceito de numeral misto. Ele tenta primeiro utilizar a regra ensinada na aula, fazendo a divisão por escrito do numerador pelo denominador sem, contudo, identificar muito bem a que é que corresponde o quociente e o resto e da sua relação com o numeral decimal. Mais tarde, ao perceber o seu significado, abandona o cálculo escrito a favor do cálculo mental, evidenciando uma forte apropriação do conceito.

Francisco: *Dividimos o numerador pelo denominador para transformar em numeral misto ... Como é que fica? ... O que der é a parte inteira, não é? O resto fica em cima ou em baixo?*

...

Francisco: *Onze, onze avos, que é um, cabe duas vezes em vinte e três [onze avos] e sobra um. É duas unidades e um onze avos.*

*Interações.* Durante a realização destas tarefas Francisco mostra alguma dificuldade em trabalhar conjuntamente com os colegas de grupo, alternando períodos de trabalho individual, em que se isola, com períodos em que simplesmente apoia o que os colegas estão a produzir. Muito em especial, revela alguma dificuldade em pensar conjuntamente com eles:

Susana: *Oh, Chico! Fala!*

Francisco: *O que é que queres que eu diga?*

Susana: *Coisas.*

Francisco: *(silêncio)*

Contudo, quando lhe parece ter descoberto algo de importante, participa-o aos colegas esperando que estes reconheçam o seu valor. Por exemplo, Francisco, pensa ter descoberto a regra que permite indicar o período da dízima correspondente a qualquer fracção de denominador 11 e explicita-a aos seus colegas de grupo:

Francisco: *Já sei o que é que é. É o último número da tabuada.*

Susana: *O último número do fim da tabuada.*

Francisco: *Deixa ver para outro.*

Susana: *Vamos fazer mais experiências.*

Nesta fase, Francisco manifesta grande necessidade de comunicar à professora o seu trabalho. Parece-lhe importante que esta tome conhecimento e valide o que vai sendo produzido. Por exemplo, quando um dos colegas não percebe o seu modo de pensar, ele chama, de imediato, a professora para que esta verifique se tem razão ou não:

Francisco (conjecturando): *Se o denominador é 11 o período é de dois, se for 111 é de três e se for de 1111 deve ser de quatro.*

Cláudio (sem lhe apetecer pensar muito): *Deixa isso que é muito complicado.*

Francisco (desistindo rapidamente de convencer Cláudio ou outro qualquer elemento do grupo): *Stôra!*

(Francisco repete a sua conjectura)

Professora: *Já explicaste aos teus colegas?*

Susana: *Não.*

Professora: *Tenta explicares-lhes primeiro, depois eu venho cá.*

Francisco evidencia bem a concepção que a autoridade em termos de conhecimento matemático na sala de aula reside fundamentalmente na professora.

## **Segunda tarefa – Propriedades Verdadeiras e Falsas**

Francisco presta atenção às considerações iniciais feitas pela professora, após o que inicia a tarefa individualmente. Não se desliga, contudo, do trabalho realizado pelos colegas e revela-lhes do seu aquilo que considera importante para aquilo que estes se encontram a desenvolver. Os colegas só se apercebem dos aspectos da sua investigação que não se enquadram dentro do seu trabalho quando tentam pegar nas folhas individuais para redigir um trabalho final. Nesta segunda tarefa o recurso à professora é manifestamente menor mas continua a revelar alguma dificuldade em desenvolver o trabalho conjuntamente com os colegas de grupo. Em contrapartida, torna-se mais interveniente no momento de discussão colectiva.

*Raciocínio e mobilização de conhecimentos.* É na terceira e quarta questão desta tarefa que Francisco se revela mais criativo. Libertado das “amarras” de uma sequência de interrogações, explora livremente a situação. Por exemplo, na terceira questão, ele não se limita a responder, que *nem sempre é verdade que  $a^n = n^a$* , à questão formulada. Procura vários contra-exemplos que observa com atenção. Conjectura, assim, que há potências com bases e expoentes diferentes mas que representam um mesmo número. Dá como exemplos  $3^8 = 9^4$ ,  $8^6 = 4^9 = 2^{18}$ , que tenta, em colaboração com o grupo, apresentar de uma forma mais generalizada: *dá com números [para a base], menores que dez*. Francisco já assume nesta tarefa que o seu papel inclui não só a formulação de conjecturas, mas também a respectiva testagem.

As actividades de exploração e investigação permitem evidenciar o domínio que os alunos apresentam de alguns conceitos matemáticos. Francisco, na realização desta tarefa, evidencia a sua segurança, por exemplo, no cálculo de potências de base fraccionária:

*Cuidado com as potências de uma fracção. Essa está errada é assim... se tem parênteses é tudo vezes se não tem parênteses é só o numerador.*

O domínio que ele manifesta neste tipo de cálculos contribui também para a aprendizagem dos colegas nessa área.

*Interações.* Por vezes, Francisco não comunica aos colegas do grupo as suas descobertas por pensar que eles as podem achar pouco importantes, registando-as todavia. Deste modo, provoca uma certa admiração da sua parte no momento de compilar o trabalho feito, com o intuito de entregar à professora um registo escrito:

Susana (com certa admiração): *Como é que é, Francisco? Queres dizer que oito à quinta é igual a quatro à oitava?*

Francisco (contente por a colega ter dado importância à sua descoberta): *Sim, oito à quinta é igual a quatro à oitava.*

Esta pequena descoberta de Francisco, leva a que seja formulada uma nova questão: *haverá mais casos em que isto acontece?* Aberto um novo caminho à investigação, todo o grupo se empenhou na procura de igualdades entre potências.

Durante a realização das cinco tarefas de investigação Francisco, nunca se oferece para porta-voz do grupo. No entanto, intervém decididamente durante a discussão final da última questão desta tarefa, evidenciando uma notável segurança:

Susana (escrevendo no quadro os três casos pedidos): *É sempre multiplicar o triplo ao número.*

Professora: *Mas sabem quanto é três elevado a onze?*

Susana (ficando um pouco confusa): *Não.*

Francisco: *Três elevado a onze é três elevado a dez vezes três.*

### **Terceira tarefa – Cadeia de Números**

Na apresentação desta tarefa, a professora faz os usuais esclarecimentos e incentivos e interpreta, com a turma, as regras subjacentes à construção das cadeias apresentadas. Pretende, deste modo, que os alunos possam, rapidamente, começar a explorar a situação, de modo a que as duas horas de aula possam ser bem aproveitadas para a actividade investigativa.

Francisco participa activamente neste trabalho conjunto de professora e turma, embrenhando-se de seguida com entusiasmo na sua realização. O envolvimento com os colegas de grupo é agora mais significativo, havendo mesmo momentos bastante ricos de trabalho colaborativo. A professora deixa de ter um papel preponderante na validação de resultados, que se transfere fundamentalmente para o grupo.

*Raciocínio e mobilização de conhecimentos.* Durante a realização da tarefa, o grupo de trabalho a certa altura explora a instrução criada pela Ilda, *se for par divide-se por 2 e soma-se 1, se for ímpar multiplica-se por 2*, e verifica que para os dois exemplos feitos a cadeia termina em 6, 4 e 3. Francisco conjectura haver ligação entre a terminação e o número que inicia a cadeia, explicitando o seu raciocínio: *O 18 implica a tabuada dos 6, não é? Vai acabar sempre em 3. O 24 vai acabar sempre no 3, portanto está na tabuada dos 6.* Francisco procura de seguida um contra-exemplo, escolhendo para começar, a nova cadeia, o número 19. Ao constatar que esta também termina em 6, 4 e 3, abandona a conjectura feita e avança com uma nova conjectura: *Com esta regra o último número da cadeia é sempre 3 seja par ou ímpar.* O grupo experimenta então o que acontece com o número 13.

Sente-se, que ele tem confiança na validade do seu raciocínio e dos seus colegas, já não precisando de recorrer à professora para o comprovar. Arrisca as suas conjecturas sem medo de que não estejam certas, mostrando não ficar aborrecido quando um contra-exemplo lhe mostra que está errado. Assistimos, assim, ao desenvolvimento da sua autonomia e confiança no seu raciocínio. Vemos também como o seu raciocínio envolve, cada vez mais, não só o teste de conjecturas mas também o seu progressivo refinamento.

O trabalho investigativo faz apelo a diversas competências matemáticas, que os alunos por vezes dominam mas que se tornam pouco evidentes noutro tipo de actividades. A realização desta tarefa, pelas suas características, faz apelo à observação, à descoberta de regularidades e padrões, à formulação de conjecturas bem como ao domínio das operações matemáticas e Francisco revela destreza neste tipo de competências.

*Interações.* Francisco perde-se frequentemente em pequenas investigações, que abandona por vezes ao perceber que os colegas se encontram numa fase mais avançada do trabalho. Interrompe-os então para que lhe expliquem o que fizeram, questionando-os com pertinência. É o que acontece na realização desta tarefa:

Francisco: *O que é que já fizeram?*

Claúdio: *Espera um pouco que já te mostro?*

...

Claúdio: *Estávamos a ver se havia aqui um padrão nesta cadeia.*

*27 - 82 - 41 - 124 - 62 - 31 - 94 - 47 - 142 - 71 - 214 - 107 - 322 - 161 - 484  
- 242 - 121 - 364 - 182 - 91 - 274 - 137 - 412 - 206 - 103 - 310.*

Susana: *Procura um padrão.*

...

Francisco: *Termina sempre em 7, 2, 1 ou 4 mas não há um padrão. Mas aqui termina em 6...*

Cláudio: *Está tudo estragado.*

Nesta fase, Francisco começa também a perceber que trabalhar com os colegas lhe permite avançar nas suas investigações, envolvendo-se com mais frequência num trabalho de colaboração:

Francisco: *A minha cadeia não dá isso. Vês!*

Ilda: *Nós estamos a fazer com o 15, tem de dar o mesmo resultado.*

Susana: *Olha nunca mais acaba ou fui eu que me enganei.*

Francisco: *Como é que é 30?*

Susana: *Se calhar é aí que está mal.*

Francisco: *Vamos começar.*

Ilda: *Esta não termina em 1.*

Francisco: *Espera, vamos ver.*

(o grupo vai efectuando os cálculos)

Francisco: *Termina em quatro.*

Ilda: *Pode fazer-se só com um número?*

Cláudio: *Repete-se.*

Francisco: *Vamos fazer outro número.*

Francisco mostra-se sempre bastante atento ao trabalho apresentado pelos colegas de outros grupos, num misto de interesse e competição, intervindo sempre que acha oportuno. Por exemplo na terceira questão desta tarefa, a regra apresentada por um dos grupos, “se o número for par, multiplicamos por 5 e dividimos por 2. Se o número for ímpar, retiramos 1 e dividimos por 3”, e ilustrada para os números 20 e 13, faz com que ele comente: *tiveram sorte com os números escolhidos pois com o 5 não dava números inteiros.*

#### **Quarta tarefa – Exploração com números**

Como habitualmente, a tarefa é entregue aos alunos por escrito, tendo a professora feito algumas considerações sobre o que era possível observar (regularidades, como se comportam na figura múltiplos, divisores, números primos, quadrados perfeitos...). Mostrando um significativo domínio deste tipo de actividade, todos os grupos começam animadamente a trabalhar incluindo o de Francisco. A atitude inicial de isolamento deste alunos dá agora lugar a uma atitude colaborativa.

*Raciocínio e mobilização de conhecimentos.* Nesta tarefa, Francisco vai mais longe em termos de raciocínio do que tinha ido nas tarefas anteriores, começando a apresentar justificações para algumas das suas conjecturas. Assim, ele descobre e justifica que a sucessão de números existente na primeira coluna depende do número de colunas: *a [primeira] coluna é de 4 em 4 porque as colunas são 4 porque se fossem 5 já não dava. [Dava] de 5 em 5.* Descobre ainda que:

*A tabuada do 5 dá para descobrir a tabuada do número antes e a tabuada do número depois. Olha 4, 8, 12, 16, 20, 24...6, 12, 18, 24.*

*Cada [figura] destas não importa o número de colunas que for, tem sempre incluído o número da tabuada, o número antes dessa tabuada. Isto é a tabuada do 4, tem a do 3 e a do 5, a antes e a depois. A do 5 tem a do 4 e depois a do 6.*

*As colunas são 6, tem incluído a tábuia do 6 do 5 e do 7. As do 5 e do 7 são em diagonal.*

*E argumenta: Tem a ver com a arrumação dos números. Se forem 5 [colunas], cada linha salta de 5 em 5.*

Francisco mostra claramente ter percebido que investigar é muito mais que seguir as regras indicadas pela professora. Envolve decidir sobre o caminho a seguir, explorando, conjecturando, testando e argumentando.

Nesta tarefa Francisco revela alguma insegurança na identificação de números primos:

*Ilda: O nove não é número primo.*

*Francisco: Não é?*

*Ilda: Quantos divisores é que tem? O 1, o 3 e o 9.*

*Francisco (concordando): Pois é. Tem mais que dois.*

A sua dificuldade é rapidamente ultrapassada no diálogo com os colegas. Isso mostra que dificuldades pontuais em factos específicos (que podem ser um indicador de uma compreensão limitada dos conceitos ou fruto de simples distração) não impedem este aluno de realizar raciocínios relativamente sofisticados.

*Interações.* A pergunta repetidamente colocada pela professora ao longo das investigações *Já trocaste ideias com os colegas?* ajuda-o a modificar o seu comportamento, vindo a mostrar-se, no fim do estudo, mais confiante na validade dos raciocínios realizados pelo próprio grupo:

*Francisco: Olhem aqui (aponta com o dedo). É um padrão.*

*Cláudio: Não sei se é sempre assim. Chamamos a professora?*

*Francisco: Espera! Vamos nós ver primeiro ...*

O “nós” da última fala de Francisco revela bem a confiança que passou a depositar na validação do grupo.

## Concepções

### Visão da Matemática

No início do estudo Francisco revela uma visão limitada da Matemática, reduzindo-a ao cálculo. Na primeira entrevista foi-lhe pedido que dissesse em que é que pensava quando ouvia a palavra Matemática, ao que responde sem hesitação: *números... contas, tabuada*. Ao ser incentivado a prosseguir, diz nada mais lhe vir à ideia.

A estreita ligação que faz da Matemática com o cálculo parece dever-se principalmente ao ensino a que foi sujeito na escola primária. É o próprio Francisco que justifica esta afirmação dizendo:

*[Tabuada e contas foi] das coisas que fizemos mais [na escola primária]. Na primária é assim como uma coisa rija, nós temos de fazer o ensino como nos mandam, não podemos estar a explorar nem a fazer coisas. Agora daqui para a frente já aprendemos mais coisas, já podemos fazer outras coisas.*

A visão redutora da Matemática que evidencia no início do ano, e que se vai alterando posteriormente, nunca correspondeu, porém, ao seu modo de trabalhar. Francisco sempre mostrou gosto pela resolução de problemas e pela realização de actividades de descoberta. Com a introdução das actividades de exploração e investigação, parece ter passado a sentir a Matemática num contexto significativamente ampliado, aprofundando a compreensão desta disciplina. No final do ano, ao lhe ser perguntado novamente o que lhe vinha à ideia quando ouvia a palavra Matemática, responde:

*Escola, números e depois os números puxam sempre outras coisas. Matemática, não podemos pensar só no momento, temos de pensar mais tempo. Nós pensamos em Matemática para aí um minuto e depois ficamos a pensar logo em outras coisas, temos de continuar esse pensamento que é para vermos o que é a Matemática: números, depois de números começo a pensar em contas, nas explorações que nós fizemos. Matemática é isso tudo, é também Geometria...*

Francisco refere ainda que, para ele, a Matemática está em permanente desenvolvimento, comparando-a a um jogo de computador:

*[É] como no computador. Nós obtemos um nível, depois nós conseguimos outro nível. Nós temos um número, depois outro número, conseguimos fazer mais coisas, fazer contas depois explorar...*

Reforça a ideia, acrescentando ainda:

*Acho que a exploração é um ingrediente de partir a pedra e desenvolver a Matemática. É o escopro e a maceta. Nós exploramos uma coisa, levamos mais a fundo, desenvolvemos mais, é, quem parte a pedra é o martelo e o escopro e quem desenvolve mais a Matemática, acho eu, é as investigações.*

A estreita ligação que faz entre o desenvolvimento da Matemática e a realização de investigações é bem revelador do papel importante que estas podem desempenhar na criação de uma concepção mais autêntica desta ciência pelos alunos. Utilizando ainda o exemplo do trabalho na pedra, característico do meio que habita, define Matemática do seguinte modo:

*[A Matemática] é como uma pedra, nós estamos a partir uma pedra, a pedra ainda está rija, a Matemática ainda está muito rigorosa, passado muito tempo já está mais mole já podemos explorar mais, parte-se em muitos bocadinhos e depois fazemos mais coisas.*

Francisco parece encarar agora os conhecimentos adquiridos como assuntos não compartimentados mas com ligação entre si e que permitem desenvolver e criar a Matemática.

No final do ano demarca-se da tradicional visão dualista da Matemática, em termos de certo-errado, afirmando serem raras as questões que têm uma só solução ou um só processo de resolução:

*[Por exemplo] a stôra tem uma forma de nós sabermos transformar as fracções em números decimais, podemos transformar de uma maneira ou de outra. Cada aluno faz a que quiser, a que escolher.*

*(...)*

*Se está a ver uma coisa que não consegue fazer "eu não consigo fazer", mas pode estar logo a ver outra solução de como resolver. A Matemática não tem uma só solução como 1 e 1 são 2.*

A realização de actividades de exploração e investigação, ao estimularem um vasto leque de abordagens e processos de resolução, parecem claramente ter contribuído para que Francisco os passe a ver como parte integrante da própria Matemática.

## Papel do professor

No início do estudo, Francisco encara o professor como a autoridade máxima dentro da sala de aula. A sua função é *ensinar e avaliar* os alunos. Para ele, um bom professor de Matemática é o que *ensina bem, que explica bem as coisas* e que tem a preocupação de *ajudar os alunos mais fracos*. Para os considerados *bons alunos* basta *estarem todos com atenção nas aulas*. Ensinar parece, pois, ser encarado aqui unicamente como transmitir conhecimentos.

Francisco delega a avaliação no professor, que verifica os seus conhecimentos e os dos colegas. Ao lhe ser perguntado se o aluno deveria ter ou não um papel na sua avaliação, responde prontamente: *a stôra sabe avaliar melhor que nós*. Justifica, centrando-se na sua experiência pessoal: *os professores sabem melhor do que nós. Nunca tive problemas. Estou de acordo com as minhas notas*. Esta justificação, pela certa, advém de se ver reconhecido como um bom aluno quer pelos professores quer pelos colegas, nas diferentes disciplinas, nunca tendo sentido a necessidade de questionar a avaliação que lhe é feita.

Para ele, os testes têm um papel de relevo, sendo o elemento fundamental na classificação atribuída ao aluno no final do período pelo professor. Porém, manifestando algum desconforto, alega: *pode calhar num dia muito mau. Uma pessoa está a fazer um teste e pode não saber tudo*. Ainda assim enumera como outros elementos de avaliação, o trabalho de casa, a organização e a participação nas aulas.

A introdução das actividades de exploração e investigação nas experiências de aprendizagem matemática de Francisco, parece estar ligada ao alargamento que manifesta, no final do ano lectivo, da sua visão do papel do professor nesta disciplina. Um bom professor de Matemática passa a ser o que *sabe ensinar*. o que não se resume agora, somente a saber transmitir conhecimentos. É também:

*...Apoiar os alunos de uma certa forma, [para] que os alunos percebam que não é para deitar abaixo. Nós tínhamos uma coisa mal, os professores deviam dar força, que é para tentar outra vez. Não é [só dizer] que "está mal", "é para fazeres outra vez", "assim nunca mais vais conseguir". Tem de ser uma coisa construtiva e não destrutiva...*

A motivação e o incentivo prestado pela professora ao longo das actividades de exploração e investigação parecem ter contribuído para esta visão do papel do professor que procurou sempre por meio de questionamento levar os alunos a sentirem confiança em si próprios.

O professor passa agora também a ter para Francisco um papel importante na criação de um ambiente de aprendizagem estimulante:

Francisco: *Nas aulas os alunos devem estar bem dispostos, o professor igualmente.*

Professora: *Tudo a rir à gargalhada?*

Francisco: *Não. Boa disposição para aprender...*

Ilda: *...E para ensinar.*

Francisco: *Podem os alunos não vir bem dispostos desde que o professor consiga dar a volta a eles.*

Professora: *Como é que o professor faz? É complicado!*

Francisco: *Acho que os ingredientes [de uma aula de Matemática] são estes: disciplina de Matemática, um professor, que o seu carácter não seja destrutivo mas construtivo, e os alunos tenham vontade, força de vontade, uma matéria que os alunos consigam fazer explorações, uma matéria que, uma matéria que... todos consigam fazer alguma coisa.*

Este extracto da segunda entrevista evidencia também como este aluno é sensível à motivação e à natureza das tarefas como aspectos fundamentais na criação do ambiente de aprendizagem estimulante.

A realização de actividades de exploração e investigação contribuíram ainda para que Francisco refira que o professor na sua função de avaliador, deve estar atento ao aspecto da diferenciação: *para um aluno uma descoberta pode ter muito valor para outro pode não ter.* O professor deve, pois, proporcionar aos alunos tarefas em que todos se consigam envolver. Deste modo ele foi alterando ao longo do ano a sua visão sobre o papel do professor. Encara agora ensinar e o aprender de um modo diferente. Não se aprende somente o que o professor ensina e o ensinar não se reduz apenas a transmitir conhecimentos.

## **Papel do aluno**

Durante a primeira entrevista, ao ser pedido a Francisco que explique qual o papel do aluno na aprendizagem, ele é peremptório: *é estar com atenção nas aulas e estudar como se faz.* Esta afirmação parece revelar uma visão bastante tradicional da aprendizagem da Matemática, onde o ouvir o professor e o treinar as regras por ele ensinadas têm um papel preponderante. No entanto, outras afirmações, feitas ao longo da mesma entrevista, evidenciam aspectos da aprendizagem a que ele é sensível mas que parece não valorizar de modo consciente.

Apesar de não questionar o que afirma ser o papel do aluno, mostra claramente que este contém aspectos que não são muito do seu agrado: *estuda-se como se faz, só que se torna aborrecido quando se estuda a mesma coisa. Acho que a melhor forma de estudar é trabalhar nas aulas.* E, afirma ainda que, as aulas de que mais gosta são aquelas em que *a professora dá um certo tempo para se descobrirem coisas.*

Os diálogos que se seguem ilustram bem como Francisco encara já nesta altura as aulas de trabalho independente e os momentos de discussão como momentos de aprendizagem:

Professora: *Ficas contente quando descobres um modo diferente de resolver um problema?*

Francisco: *Fico.*

Professora: *O que é que sentes?*

Francisco: *Que aprendi mais uma coisa.*

Professora: *Como é que achas que aprendes melhor, quando tu descobres as coisas, mesmo que ajudado pelo professor, ou quando o professor te ensinou tudo?*

Francisco: *Descobrir se calhar sozinho.*

Professora: *Porquê?*

Francisco: *Fico a saber mesmo, já não esqueço e é engraçado.*

...

Professora: *Há pouco disseste que gostavas muito da parte da discussão, não foi? Porquê?*

Francisco: *Há mais acção na aula.*

Professora: *E achas que aprendes com isso?*

Francisco: *Acho.*

Professora: *Como?*

Francisco: *Opiniões.*

Professora: *E tu pensas sempre nas opiniões dos teus colegas?*

Francisco: *Sim*

Professora: *E depois?*

Francisco: *Penso e depois... ou estou de acordo ou não. Quando estou, estou. Quando não estou, não estou.*

Professora: *Como é que te sentes quando dás a tua opinião e um colega não está de acordo contigo?*

Francisco: *Acho que ele percebeu a minha intenção e não está de acordo comigo.*

Professora: *Ficas zangado ou pensas no que ele te está a dizer para ver se tem razão?*

Francisco: *Ainda dá mais interesse e vejo se a minha opinião está errada.*

Francisco, ao afirmar que quando descobre as *coisas* sozinho é mais *engraçado* e já não as esquece, revela bem de como é para ele importante aprender Matemática “fazendo matemática”. Por outro lado, revela como as interações estabelecidas nos momentos de

discussão, ao desafiarem-no a reflectir sobre o seu trabalho e o dos colegas, contribuem para um melhor entendimento do mesmo.

A realização das actividades de exploração e investigação parece ter contribuído para levar Francisco a assumir conscientemente o importante papel que o aluno tem na sua própria aprendizagem. As suas afirmações no final do estudo não se remetem agora puramente para um gosto pessoal mas para a importância do aluno participar como elemento activo no processo de aprendizagem, deixando de ser um consumidor passivo da Matemática produzida por outros.

Professora: *Parece-te que os alunos podem aprender por eles próprios?*

Francisco: *Sim.*

Professora: *Explica-me melhor.*

Francisco: *Nas explorações. É mais engraçado descobrir coisas que os professores ainda não descobriram. É surpreender os professores.[...] Outras vezes as matérias não têm descobertas nenhuma é só ensinar.*

Professora: *Gostas de explorar por ti ou que te ensinem?*

Francisco: *Ficamos a perceber melhor porque fomos nós que fizemos as descobertas. É importante para nós.*

Para além da motivação que está subjacente ao desafio de fazer descobertas que os outros ainda não haviam feito, nomeadamente a professora, Francisco ao afirmar com convicção, “*ficamos a perceber melhor porque fomos nós que fizemos*”, mostra ser mais significativa a aprendizagem onde ele tem um papel activo.

As últimas duas falas de Francisco deixam transparecer como é para ele, no final do estudo, perfeitamente natural que sejam os elementos do grupo a validar as suas descobertas, não sendo necessário o aval do professor.

A aprendizagem passou também a ser encarada como um processo dinâmico e contínuo:

*Nós aprendemos uma coisa num ano, depois noutra ano aprendemos outra coisa. Tudo tem o seu tempo. Agora aprendíamos uma coisa e não percebíamos metade, para o ano já percebíamos essa coisa e ainda mais. Por exemplo, nós aprendemos os números pares e ímpares, tenho a impressão que foi na 2ª classe, e agora fizemos uma exploração com pares e ímpares. É como na primária, nós pensávamos que já tínhamos explorado muito, agora chegamos ao 6º ano e vimos que não tínhamos quase nada feito, e agora podíamos ir para o 10º ano e vemos que no 6º ano não tínhamos quase nada feito. É como na vida, estamos sempre a aprender.*

Trabalhar os conceitos aprendidos ao longo dos anos em contextos diferentes dos habituais, fora do seu “capítulo de aprendizagem”, contribuiu por certo para o levar a sentir a aprendizagem como dinâmica e contínua.

Percebe-se, ao longo do estudo, que este aluno começa conscientemente valorizar processos como aprender por si próprio, relegando para segundo plano aspectos como estar com atenção nas aulas, ouvir o que o professor ensina e estudar, como formas primordiais de aprendizagem.

### **Natureza das tarefas**

Francisco é um aluno que reage bem a qualquer tipo de tarefa que lhe seja apresentada, desde os meros exercícios aos problemas mais abertos. Revela, contudo, uma certa preferência pelas tarefas que envolvem algum raciocínio.

Ao lhe serem apresentadas várias questões, durante a primeira entrevista, para que resolva uma delas, escolhe sem grande hesitação uma das mais problemáticas, envolvendo-se com entusiasmo na sua resolução. Experimenta várias abordagens. Conforme verificava que a estratégia escolhida não era a adequada, abandonava-a, mostrando prazer pela “luta” que o problema lhe proporcionava.

Ao ser questionado sobre o porquê desta escolha afirma: *as outras eu sei fazer. Podia-me enganar mas sei fazer, esta era a mais interessante.* O gosto pelos desafios é bem patente nesta sua afirmação.

Quando lhe é perguntado, na primeira entrevista, sobre o que sente quando colocado perante uma tarefa nova responde, revelando uma atitude de confiança: *A minha maior preocupação é conseguir resolvê-la. Temos de acreditar em nós.*

Na primeira entrevista, Francisco identifica dois tipos de tarefas: *aquelas em que é preciso descobrir coisas e aquelas que não têm descobertas nenhuma que é só o ensinar.* A realização das tarefas de exploração e investigação não veio, pois, provocar mudanças substanciais na sua concepção sobre a natureza das tarefas matemáticas. Contudo, levaram a que ele perceba que o papel do aluno e do professor é diferente conforme o tipo de tarefa:

*As contas, as expressões numéricas ou se sabe ou não se sabe. Se nos enganamos parece logo que não sabemos. É o professor que tem de ver se está bem ou não. Nas explorações, nós descobrimos coisas, e somos nós que vemos se está bem ou mal (...) A tabuada, as contas, são precisas para fazer explorações.*

Francisco diferencia as tarefas que têm de ser ensinadas previamente e validadas pelo professor das tarefas em que pode aprender sozinho e ser ele próprio a validar o seu trabalho.

A reforçar o seu gosto pela realização de determinado tipo de tarefa faz referência ao ambiente de trabalho:

Professora: *Porque se realizam determinadas tarefas na sala de aula? por exemplo expressões numéricas, problemas?*

Francisco: *Para se aprender.*

Professora: *E tu gostas de todas?*

Francisco: *Umas são mais chatas que outras.*

Professora: *Por exemplo?*

Francisco: *Não sei (pensa um pouco). Nas investigações estamos todos muito animados. Outras coisas é a sim, é a sim ...*

É notório que, para Francisco, há tarefas mais estimulantes que outras. Refere como aulas “animadas” aquelas onde se realizam investigações.

### **Trabalho de grupo**

Durante a primeira entrevista, Francisco relaciona o interesse do trabalho de grupo com o tipo de actividade a desenvolver, valorizando as interacções com os colegas.

Professora: *Como é que trabalhas melhor? Em grupo, com o colega do lado, ou sozinho?*

Francisco: *Depende das ocasiões. Há coisas que é melhor em grupo. Sozinhos não temos com quem discutir. Torna-se mais aborrecido.*

Professora: *Que ocasiões?*

Francisco: *Depende, há coisas que fazemos melhor sozinhos, outras com os colegas.*

Professora: *E as expressões numéricas?*

Francisco (pensando um pouco): *As investigações sobre potências, que fizemos no outro ano, é melhor em grupo.*

A experiência, pontual, vivida durante a realização de uma tarefa de investigação no ano anterior foi de tal forma significativa para Francisco que a recorda de imediato ao lhe ser pedido um exemplo de uma tarefa que funcionasse bem em grupo.

No fim do estudo a sua opinião sobre a importância do trabalho de grupo encontra-se de certa forma fortalecida:

Professora: *É importante trabalhar em grupo?*

Francisco: *Eu acho que a exploração deve ser feita por um grupo porque um aluno diz uma coisa, incentiva-nos logo para outra. As opiniões de uns e de outros é importante para o trabalho.*

Trabalhar as tarefas de exploração e investigação em grupo, levou a que Francisco se apercebesse que uma exploração ou investigação feita deste modo se torna mais rica do que feita individualmente.

### **Discussão**

No início do estudo, Francisco encara a Matemática essencialmente como uma ciência onde o cálculo tem um papel preponderante. Para ele, o professor constitui a autoridade dominante na sala de aula, sendo o seu papel transmitir conhecimentos e avaliar os alunos. Estes, por sua vez, têm de estar com atenção nas aulas e estudar se querem aprender. No entanto, já nesta fase, Francisco revela gosto pela resolução de problemas e manifesta uma certa originalidade no modo de encarar as tarefas que lhe são propostas. Deste modo, a visão bastante limitada que apresenta da Matemática e da sua aprendizagem não está completamente de acordo com a sua maneira de ser e o seu gosto pessoal mas parece ser, sobretudo, o resultado da sua adaptação ao meio escolar e, muito especialmente, ao ensino da Matemática que tem recebido.

Francisco mostra sempre grande interesse pela realização das actividades de exploração e investigação que lhe são propostas. Nas primeiras, o seu raciocínio é francamente limitado, não indo além da formulação de conjecturas que pede para o professor validar. Progressivamente começa a realizar testes, a refinar as conjecturas em função dos seus resultados dos testes e, finalmente, ensaia justificações para as conjecturas que acredita serem verdadeiras. Ao mesmo tempo que vai revelando maior ousadia nos seus raciocínios, vai exibindo crescente autonomia e confiança. O trabalho efectuado à volta das tarefas de exploração e investigação ajudou claramente este aluno a desenvolver as capacidades de raciocínio e a criatividade matemática.

A realização destas tarefas mostra como Francisco se apropria de certos conceitos e técnicas operatórias, evidenciando segurança em alguns aspectos mas também, se pensarmos nas suas capacidades, revela uma surpreendente dificuldade noutros aspectos. Torna-se flagrante como os conhecimentos de nível mais básico podem ser desenvolvidos no decurso deste tipo de actividade e como o seu domínio imperfeito não constitui factor impeditivo para o trabalho dos alunos.

Durante a realização das primeiras tarefas, Francisco trabalha principalmente de modo individual, integrando-se pouco no grupo. Mostra dificuldade em pensar com os colegas. A realização das tarefas de exploração e investigação leva a que ele se sinta gradualmente mais à vontade no papel de elemento de um grupo. No fim do estudo ele já interage bastante com os colegas, colocando as suas ideias ao grupo e aproveitando as ideias dos outros para avançar na realização das tarefas. Inicialmente muito dependente da professora para a validação das respostas, vai reconhecendo que ele e os seus colegas podem também assumir o papel de autoridades matemáticas. Nos momentos de discussão geral, continua a revelar-se

um aluno reservado e nunca se oferece para expressar as opiniões do grupo perante a turma. Contudo, segue com manifesta atenção as discussões, intervindo com pertinência sempre que considera necessário.

A realização de diversas actividades de exploração e investigação contribui para uma consciencialização por Francisco de aspectos do ensino e aprendizagem da Matemática que não valoriza anteriormente. Estes aspectos incluem: (a) a visão da Matemática como uma ciência em desenvolvimento, onde o processo de investigação tem um papel importante; (b) o papel do professor como orientador, dando especial atenção à motivação e ao incentivo dos alunos e dando-lhes espaço para fazerem a sua Matemática; (c) a natureza das tarefas, que para além de terem a função de levar os alunos a aprender, devem também ajudar a criar um ambiente de aprendizagem estimulante. A realização das tarefas de investigação em grupo traz-lhe ainda uma visão mais positiva relativamente a este modo de trabalho. A necessidade de interagir com os colegas leva-o a aperceber-se da importância da partilha de ideias no desenvolvimento do trabalho investigativo.

Francisco é, sem dúvida, um aluno com uma relação especial com a Matemática. No início do estudo, tem consciência de que, para além do que a professora ensina, há outras maneiras de resolver um problema que ele próprio pode descobrir. Mas não as valoriza muito, subordinando-se à professora; procura ir de encontro ao que ela indica como se tratasse da “verdade matemática oficial”. Com o decorrer do estudo passa a confiar na sua capacidade de decidir da validade dos raciocínio que faz. Não deixando de ser reservado, participa e interage muito mais, principalmente no trabalho com os colegas do grupo. A sua inclinação especial para a descoberta é estimulada por este tipo de trabalho que o ajuda a perceber novas dimensões do raciocínio matemático a que – dada a sua dependência da validação da professora – ele antes não se chegava a aventurar: testar, refinar, justificar.

O tipo de trabalho proposto a este aluno contribuiu de modo decisivo para estes resultados. A natureza desafiante e aberta das tarefas propostas proporcionou oportunidades de raciocínio, de exploração, de interacção que foram por ele aproveitadas. O trabalho em pequeno grupo fomentou oportunidades de interacção, de diálogo, de colaboração que o levou a perceber que, apesar da sua grande inclinação para a Matemática, podia ganhar bastante no diálogo com os seus colegas. O modo como a professora exerceu o seu papel, não dando respostas imediatas às solicitações dos alunos, mas requerendo que eles pensassem e aprofundassem as suas ideias, foi também decisivo para o levar a perceber que ele podia ter um papel importante na validação dos resultados a que ia chegando. Finalmente, as discussões gerais realizadas no culminar de cada actividade – que Francisco encara com grande satisfação – mostram-se importantes, para este aluno, como momento de aprofundamento e de consolidação das aprendizagens.

## Conclusão

Este estudo mostra que é possível proporcionar uma experiência matemática significativa envolvendo a formulação de conjecturas, o seu teste e refinamento, e a própria elaboração de justificações de relações matemáticas que se considera serem verdadeiras pelo menos a alguns alunos deste nível de escolaridade. Mostra, além disso, como este trabalho pode levar a um significativo enriquecimento das concepções dos alunos no que respeita à Matemática e até a uma mudança de perspectiva do que consideram ser o seu papel e o do professor no processo de ensino-aprendizagem desta disciplina.

Francisco é um caso especial. Trata-se de um aluno com uma inclinação natural para a Matemática, para quem as tarefas propostas, no ambiente proposto, parecem perfeitamente adequadas. Não será assim, certamente, com todos os alunos. Torna-se necessário, por isso, estudar o modo como outros alunos, com outras características, do mesmo e de outros níveis de escolaridade, se envolvem neste tipo de trabalho e de que modo isso contribui ou não para a mudança das suas concepções sobre a Matemática e o ensino-aprendizagem da Matemática.

Este estudo mostra ainda que o trabalho investigativo na sala de aula de Matemática deve merecer a atenção dos investigadores. Não é só o modo de reagir dos alunos que deve ser objecto de estudo. O trabalho investigativo depende tanto das tarefas propostas, como do modo como o professor orienta a sua resolução, da cultura da sala de aula e do contexto escolar. Propostas à partida interessantes podem dar origem a aulas menos conseguidas e pouco produtivas. Por isso, também o modo de integrar estas tarefas no currículo, o modo de conduzir a sua realização por parte do professor e a influência dos factores contextuais devem ser objecto de atenção em novas investigações neste domínio.

## Referências

- Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática: A experiência do Projecto MAT789* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Associação de Professores de Matemática (1988). *Renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: APM.
- Borasi, R. (1990). The invisible hand operating in mathematics instruction: students' conceptions and expectations. Em T. J. Cooney (Ed.), *Teaching and learning mathematics in the 1990s* (pp. 174-182). Reston, Va: NCTM.
- Borasi, R. (1991). *Learning mathematics through inquiry*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Frank, M. L. (1988). Problem solving and mathematical belief. *Arithmetic Teacher*, 35, 32-34.
- Garofalo, J. (1989). Beliefs and their influence on mathematical performance. *Mathematics Teacher*, 82 (7), 502-505.

- Jorgensen, D. L. (1989). *Participant observation: A methodology for human studies*. Newbury Park: Sage.
- Ludke, M., & André, M. E. D. A. (1986). *Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.
- Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. London: Addison-Wesley.
- Matos, J. F. (1991). *Logo na Educação Matemática: Um estudo sobre as concepções e atitudes dos alunos* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: Projecto MINERVA, DEFCUL.
- Ministério da Educação (1991). *Organização curricular e programas (2º ciclo do ensino básico)*. Lisboa: Imprensa Nacional Casa da Moeda.
- Ministério da Educação (1991). *Programa de Matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem (2º ciclo do ensino básico)*. Lisboa: Imprensa Nacional Casa da Moeda.
- Ministério da Educação (1997). *Matemática: Programas*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.
- National Council of Teacher of Mathematics (1980). *An agenda for action*. Reston, VA: NCTM.
- National Council of Teacher of Mathematics (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.
- Oliveira, H., Ponte, J. P., Cunha, M. H., & Segurado, M. I. (1997). Mathematical investigations in the classroom: A collaborative project. Em V. Zack, J. Mousley & C. Breen (Eds.), *Developing practice: Teachers' inquiry and educational change* (pp. 135-142). Geelong, Australia: Centre for Studies in Mathematics, Science and Environmental Education.
- Patton, M. (1987). *How to use qualitative methods in evaluation*. Newbury Park: Sage.
- Pólya, G. (1957). *How to solve it* (2nd ed.) New York: Doubleday.
- Ponte, J. P. (1992). Concepções dos professores de Matemática e processos de formação. Em M. Brown, J. F. Matos, D. Fernandes & J. P. Ponte, *Educação Matemática: Temas de Investigação* (pp. 185-239). Lisboa: IIE.
- Ponte, J. P., & Carreira, S. (1992). Computer spreadsheet and investigative activities: A case study of an innovative experience. In J. P. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos, & D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies: Research in Contexts of practice* (pp. 301-312). Berlin: Springer.
- Ponte, J. P. & Matos, J. F. (1996). Processos cognitivos e interações sociais nas investigações matemáticas. Em P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds), *Investigar para aprender matemática* (pp. 119-137). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Porfírio, J. (1993). *A resolução de problemas na aula de Matemática: Uma experiência no 7º ano de escolaridade* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Resnick, L. (1987). *Education and learning to think*. Washington, DC: National Academy Press.

- Schoenfeld, A. (1983). Beyond the purely cognitive: Belief systems, social cognitions and metacognitions as driving forces in intellectual performance. *Cognitive Science*, 7, 329-363.
- Schoenfeld, A. (1985). *Students' beliefs about geometry and their effects on the geometry performance*. Manuscrito não publicado.
- Schoenfeld, A. (1991). What's all the fuss about problem solving? *ZDM*, 1, 4-8.
- Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. Em D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.
- Silver, E. (1996). Acerca da formulação de problemas de Matemática. Em P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 139-162). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Spangler, D. (1992). Assessing student's beliefs about mathematics. *Arithmetic Teacher*, 39, 148-152.
- Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. Em D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.
- Winograd, K. (1991). Children's mathematical beliefs. *Mathematics Teaching*, 137, pp. 33-37.
- Yin, R. K. (1989). *Case study research: Design and methods*. Newbury Park: Sage.

## Anexos

### Divisões por 11, 111...

1. Determina o período das dízimas representadas pelas fracções:

$$\frac{3}{11} \quad \frac{9}{11} \quad \frac{18}{11} \quad \frac{47}{11} \quad \frac{52}{11} \quad \frac{125}{11}$$

- Que tipo de período se obtém quando dividimos um número inteiro por 11?
  - Será possível, sem efectuar a divisão, indicar o período da dízima correspondente a qualquer fracção de denominador 11? Investiga e apresenta as tuas conjecturas.
2. Experimenta agora divisões por 111. Apresenta os resultados.
  3. Podes ainda investigar o que se passa nas divisões por 1111...

## Propriedades Verdadeiras e Falsas

1. Repara que  $2^2 = 4$  e que  $2 \times 2 = 4$ .

- Será sempre verdade que  $a^n = a \times n$  ?
- Experimenta nos seguintes casos e noutros por ti escolhidos, usando, se necessário, a calculadora.

$0^2 =$	$0 \times 2 =$	$10^2 =$	$10 \times 2 =$
$4^2 =$	$4 \times 2 =$	$(1/2)^3 =$	$(1/2) \times 3 =$
$3^3 =$	$3 \times 3 =$	$(5/3)^4 =$	$(5/3) \times 4 =$

2. Determina cada uma das seguintes potências

$10^3$	$1^4$	$0.45^2$
$10^5$	$1^8$	$0.45^4$
$10^6$	$1^{18}$	$0.45^7$

- Se calculasses  $10^7$ , seria maior ou menor que  $10^6$ ?
- E se calculasses  $0.45^9$  seria maior ou menor que  $0.45^7$ ?
- O que se passa com as potências de base 1?
- De todo o estudo que fizeste, podes tirar alguma conclusão?

3. Repara que  $4^2 = 16$  e  $2^4 = 16$ . Será sempre verdade que  $a^n = n^a$ ?

- Experimenta noutros casos!

4. Sabendo que  $3^6 = 729$ , és capaz de calcular imediatamente  $3^7$ ? e  $3^8$ ? e  $3^{12}$ ?

## Cadeia de números

1. As cadeias de números são criadas através da repetição de uma instrução.

Por exemplo: escolhe um número

se o número for par, divide-o por 2.

se o número for ímpar, multiplica-o por 3 e adiciona-lhe 1.

15    46    23    70    35    ...

- Termina esta cadeia. O que acontece? Será que todas as cadeias geradas deste modo terminam da mesma forma? Investiga.

2. Outro tipo de cadeia possível é por exemplo:

Soma os quadrados dos algarismos do número escolhido e assim consecutivamente.

$$23 \rightarrow 2^2 + 3^2 = 13 \rightarrow 1^2 + 3^2 = 10 \rightarrow 1^2 + 0^2 = 1$$

- Investiga outros exemplos idênticos a este. Que conclusões?
- Estabelece agora tu as instruções e investiga as propriedades das tuas próprias cadeias.

## Explorações com números

Procura descobrir relações entre os números da tabela:

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
...	...	...	...

Como sempre, regista as conclusões que fores obtendo.

## Notas

---

<sup>1</sup> Este estudo foi feito no quadro do Projecto *Matemática para Todos - investigações na sala de aula*, no âmbito do Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. O objectivo deste projecto é produzir, experimentar e avaliar propostas de trabalho que proporcionem aos alunos actividades de exploração e investigação e estudar os processos de raciocínio dos alunos, as dinâmicas da sala de aula e o conhecimento profissional dos professores envolvido na realização destas actividades.

<sup>2</sup> Algumas destas concepções encontram-se, igualmente, referidas em outros autores como Garofalo (1989), Borasi (1991), Winograd (1991) e Schoenfeld (1992).

<sup>3</sup> Antes, portanto, da realização das tarefas propostas no presente estudo. Note-se, porém, que este aluno já tinha resolvido tarefas semelhantes no ano lectivo anterior.

<sup>4</sup> As palavras e expressões em itálico são as usadas pelo próprio aluno.