

Investigações Geométricas no Contexto de uma Escola Pública Brasileira

Cármem Lúcia Brancaglioni Passos¹
Edna Maura Zuffi²
Renata Cristina Geromel Meneghetti²
Maiza Lamonato³
Jean Piton Gonçalves⁴
Raquel Duarte de Souza³
Verônica Simão Esteves de Souza³

Introdução

Este artigo refere-se a uma pesquisa que foi desenvolvida no final de 2004, numa escola pública brasileira e que foi apresentada no V CIBEM. Nosso objetivo inicial era verificar as potencialidades didático-pedagógicas de tarefas geométricas com características exploratório/investigativa no contexto brasileiro. Contudo o foco da pesquisa recaiu sobre a constituição de uma tarefa em atividade de investigação geométrica, bem como nas tentativas da professora (uma das participantes de um grupo de estudos) em transformar o enunciado de uma tarefa em uma autêntica atividade de investigação geométrica. Diferentes aprendizagens foram evidenciadas nesse processo. A professora buscou a todo momento enriquecer a exploração matemática a ser realizada por seus alunos e compartilhou essas questões nas discussões que ocorriam no grupo.

O trabalho de campo foi realizado em uma classe de 7^a série do ensino básico de uma escola pública municipal do interior do Estado de São Paulo e foi realizado pela própria professora da turma, uma das autoras deste artigo. A tarefa de investigação geométrica foi planejada e discutida durante reuniões realizadas num grupo colaborativo (Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática da UFSCar, GEM) e tiveram como ponto de partida as discussões que o grupo realizou ao estudar o capítulo referente às investigações geométricas do livro *Investigações matemáticas na sala de aula*, de

¹ Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação (PPGE) da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), São Carlos/SP.

² Docentes do Instituto Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC) da Universidade de São Paulo (USP), São Carlos/SP.

³ Alunas do PPGE/UFSCar.

⁴ Docente do Departamento de Matemática (DM) da UFSCar e das Faculdades Integradas São Carlos (FADISC), São Carlos, SP.

Ponte, Brocado e Oliveira (2003). Ao longo da implementação da tarefa na sala de aula os procedimentos adotados pela professora foram debatidos no grupo tendo como referência a prática pedagógica da professora, que conhecedora da realidade de seus alunos, apresentava indicadores necessários para o entendimento dos enunciados que a tarefa poderia ter. Além disso, o grupo contou com a experiência didática dos demais elementos do grupo, tanto relativa ao ensino básico quanto à docência na formação de professores. Concomitantemente foram realizados estudos teóricos sobre investigações matemáticas e resolução de problemas que influenciaram os desdobramentos da investigação.

Para a análise foram considerados os registros escritos dos alunos, os registros fotográficos feitos pela professora, os relatórios produzidos por ela após as aulas, os relatórios da observadora externa, as narrativas da professora durante as reuniões no grupo, e as narrativas dos demais elementos do grupo.

Embora essa experiência não tenha sido suficiente para desenvolver nos alunos as atitudes esperadas numa atividade investigativa mostrou-nos que o contexto de investigações matemáticas representa um desafio para a aprendizagem dos alunos e também para o desenvolvimento profissional de professores, em especial no contexto brasileiro.

Os dilemas e dificuldades enfrentados pela professora em uma dinâmica de aula investigativa de geometria evidenciaram que a constituição de uma tarefa em atividade investigativa foi dificultosa. Identificamos alguns dos intervenientes nesse processo: a) o número excessivo de alunos na sala de aula; b) o tempo de duração das aulas; c) dificuldades dos alunos em ler e interpretar enunciados; d) a professora ser a própria pesquisadora, portanto aquela que ao mesmo tempo propõe a tarefa e faz os registros de campo; e) a resistência dos alunos em registrarem suas conclusões; f) conflito na definição criteriosa dos instrumentos de avaliação; g) projetos internos do contexto escolar não previstos e não relacionados à tarefa; h) momentos do trabalho de campo em que revela-se a autonomia da professora.

Nesse contexto, consideramos que houve um avanço na maneira da professora em conceber as aulas de matemática num contexto de investigações. Ela conseguiu perceber a importância de seus registros nesse tipo de atividade, a necessidade da definição dos papéis de cada aluno no grupo, identificou potencialidades da investigação matemática e elegeu prioridades curriculares a fim de atingir seus objetivos.

Consideramos que o caso investigado revelou-se uma experiência inicial nessa linha de pesquisa para nosso grupo, base para reflexões, questionamentos e também para traçar novos direcionamentos para futuras pesquisas. As aprendizagens ocorridas evidenciaram as potencialidades didáticas da constituição de uma tarefa em investigação pelos alunos bem como as necessidades próprias do contexto brasileiro na constituição de tarefas investigativas.

Alguns pressupostos teóricos

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), para os matemáticos profissionais, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar suas respectivas propriedades. Quando trabalhamos em um problema, nosso objetivo é, naturalmente, resolvê-lo, mas, além disto, podemos fazer outras descobertas que, em alguns casos, se revelam tão ou mais importantes que a solução do problema original. Muitas vezes, mesmo não conseguindo obter essa solução, o processo é válido devido às descobertas imprevistas que proporciona. Por estes motivos, os autores defendem que os alunos podem envolver-se na realização de investigações matemáticas e que isso se constitui em poderoso processo de construção do conhecimento, o que é corroborado por outros matemáticos (BRAUMANN, 2002, p. 5).

Para os autores acima, uma investigação matemática envolve quatro momentos principais: (i) o reconhecimento da situação, sua exploração preliminar e a formulação de questões; (ii) o processo de formulação de conjecturas a partir da organização dos dados; (iii) a realização de testes e eventual refinamento das conjecturas; (iv) a justificação e avaliação do trabalho realizado, através de argumentações ou demonstrações.

Serrazina et al. (2002, p. 42) destacam que em atividades desse tipo “é importante apresentar aos alunos um conjunto de propostas de trabalho interessantes, que envolvam conceitos matemáticos fundamentais e onde os alunos tenham oportunidade para experimentar, discutir, formular, conjecturar, provar, generalizar, comunicar as suas idéias e tomar decisões”.

Observam estes autores que uma investigação pode se desencadear a partir da resolução de simples exercícios. O que a distingue de exercícios e problemas, então, é o fato de que, nos primeiros casos, o enunciado indica claramente o que é dado e o que é

pedido - não há ambigüidades. A solução é sabida, de antemão, pelo professor e a resposta do aluno, ou está certa, ou está errada. Ponte (2003) enfatiza que muitas vezes as tarefas de investigação e as de exploração são chamadas de “investigações” devido à não se conhecer inicialmente o grau de dificuldades que será oferecido para um determinado grupo de alunos. Uma investigação matemática, por outro lado, é um processo que propicia ao aluno a construção do conhecimento de uma forma não sistêmica, diferentemente da resolução de problemas, em que estes estão relacionados com uma questão matemática bem definida proposta pelo professor. Dessa maneira, as investigações podem ser caracterizadas como situações abertas, não estando bem definidas de início, cabendo a quem investiga um papel fundamental em sua definição, onde os pontos de partida e chegada podem variar, segundo as decisões tomadas durante o processo. Isso ocasiona a diversidade no processo e no produto da investigação matemática, exigindo novos requisitos às competências do professor (PONTE et al., 1998).

Temos convivido por muito tempo com os termos tarefa e atividade como se fossem sinônimos, tanto em textos didáticos quanto em textos acadêmicos da área da Educação Matemática. Cunha (2000) explica que o termo tarefa correlaciona-se com a palavra inglesa “*task*” e que alguns educadores matemáticos a têm utilizado há algum tempo para designar a atividade. A referida autora ressalta que seria mais adequado dizer que tarefa é a proposta de trabalho que o professor apresenta para seus alunos que se envolvem em atividades para resolvê-la.

Na busca de compreendermos como as tarefas dão origem às atividades dos alunos, nos remetemos a Stein e Smith (1998) que enfatizam que a qualidade das tarefas utilizadas pelo professor na sala de aula se constitui na base do conhecimento construído pelos alunos. Uma tarefa que exige a memorização, de maneira rotineira, representaria certo tipo de oportunidade para os alunos. Por outro lado, uma tarefa que possibilitasse aos alunos pensarem conceitualmente estaria estimulando-os a fazer conexões e conseqüentemente estaria proporcionando-lhes uma oportunidade muito mais rica para o conhecimento que está sendo objetivado. Os autores afirmam que

o efeito cumulativo, dia após dia, de exploração, na sala de aula, de diferentes tipos de tarefas conduz ao desenvolvimento de idéias implícitas nos alunos sobre a natureza da Matemática – sobre se a Matemática é algo de que eles

podem pessoalmente compreender o sentido quão longa e arduamente devem trabalhar para conseguir (STEIN e SMITH, 1998, p. 269).

Chistiansen e Walther (1986) apresentam considerações esclarecedoras sobre o papel preponderante que os exercícios têm desempenhado no ensino da Matemática, prática que ainda ocorre e é aceita por alunos em aulas de Matemática. Os referidos autores enfatizam que a forma com que os exercícios vêm sendo tratados basicamente favorecem a quantificação de resultados, valorizando sobretudo os produtos em detrimento dos processos na aprendizagem da Matemática. Os autores defendem que a Matemática escolar pode basear-se muito mais em atividades pessoais dos alunos. Nesse sentido, a prioridade deveria ser as tarefas que possibilitassem aos alunos se envolverem com atividades de construir, explorar e resolver problemas. Os autores enfatizam, contudo que não basta solicitar aos alunos que se sejam ativos ou que se envolvam com seu próprio trabalho a partir de um problema interessante. A proposta é que isso ocorra com a intervenção adequada do professor ao propor tarefas que dão margem ao aluno se envolver com atividades significativas. Isso é possível quando a tarefa proposta pelo professor torna-se objeto para a atividade do aluno, levando em consideração sua aprendizagem e desenvolvimento.

As tarefas são, na maior parte das vezes, propostas pelo professor, e uma vez propostas, têm de ser interpretadas pelo aluno e podem dar origem a atividades muito diversas ou a nenhuma atividade, conforme a disposição do aluno e o ambiente da aprendizagem da sala de aula.

Metodologia da pesquisa

A presente pesquisa teve abordagem qualitativa que foi construída ao longo de sua realização. Sempre que se pensa em pesquisa com essa característica é essencial que ela seja focalizada no indivíduo, com toda sua complexidade, e na sua inserção e interação com o ambiente sócio-cultural e natural. Nesse caso, a interação entre o GEM e a professora Maiza, que desenvolveu as aulas de caráter investigativo, se revelou fundamental.

Como a investigação refere-se a um contexto singular, com significado próprio, o método da investigação escolhido foi o Estudo de Caso. Essa modalidade de pesquisa possibilita que as situações naturais, próprias do contexto escolar, sejam consideradas na análise dos dados, focalizando a realidade com sua complexidade de forma

contextualizada (LÜDKE e ANDRÉ, 1986). Nessa perspectiva, o investigador parte de alguns pressupostos teóricos iniciais e procura se manter atento a novos elementos que possam surgir durante a investigação. Procuramos com isso compreender melhor a manifestação geral do problema, as ações, as percepções, os comportamentos e as interações dos sujeitos envolvidos. Nesta pesquisa nossa intenção foi revelar a multiplicidade de dimensões presentes na constituição da tarefa investigativa, nas transformações que os enunciados da tarefa sofreram, bem como nas aprendizagens da professora nesse processo, evidenciando assim a inter-relação desses componentes.

Com as características de uma pesquisa qualitativa (BOGDAN e BIKLEN, 1994) os dados coletados foram predominantemente descritivos. Como material de análise temos aqueles obtidos diretamente no momento de implementação das aulas investigativas na escola: os registros escritos dos alunos, os registros fotográficos feitos pela professora, os relatórios reflexivos produzidos por ela após as aulas, o relatório escrito da observadora externa durante o processo avaliativo; e os obtidos durante as reuniões do GEM: as narrativas da professora Maiza, as reflexões/narrativas dos demais elementos do grupo, que foram audiogravadas.

A análise envolveu a leitura e reflexão dos relatórios produzidos, dos registros fotográficos e das reflexões produzidas nas reuniões do grupo.

Investigações matemáticas como foco de estudo e de pesquisa

O Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (GEM) vem se reunindo quinzenalmente, desde 2003, na Universidade Federal de São Carlos/UFSCar, cidade de São Carlos/SP, tendo como principais objetivos o desenvolvimento de estudos e pesquisas compreendendo a formação inicial e contínua de professores que ensinam matemática a partir de reflexões da prática pedagógica de professores de matemática. Uma característica do grupo é congregar professores universitários, professores escolares, alunos da pós-graduação em Educação e alunos da graduação. Ressalta-se o caráter dinâmico do grupo, cujos estudos e pesquisas são realizados em decorrência do interesse e também dos objetivos dos seus participantes que também têm se alterado nesse período.

Em 2004 o GEM⁵ se propôs a estudar investigações matemáticas tendo como referência pesquisas portuguesas (PONTE, 2003; PONTE, BROCARD e OLIVEIRA, 2003), bem como entender as aproximações que poderiam ocorrer entre as investigações matemáticas e a resolução de problemas. Nesse sentido, o grupo estudou também referenciais sobre resolução de problemas, em especial as publicações da pesquisadora brasileira Lourdes de La Rosa Onuchic (ONUCHIC, 1999; ONUCHIC e ALLEVATO, 2004) tendo em vista um estudo sobre resolução de problemas no Ensino Médio que estava sendo desenvolvido por uma das integrantes do GEM (Edna M. Zuffi – Projeto sobre Resolução de Problemas no Ensino Médio, ICMC/USP).

Nessa dinâmica, que consideramos ser de um grupo colaborativo, é que a pesquisa apresentada neste artigo se originou. A partir da leitura do capítulo *Investigações Geométricas* (PONTE, BROCARD e OLIVEIRA, 2003) o grupo decidiu desenvolver as mesmas investigações propostas pelos autores. Durante essa experiência, foram feitas considerações a respeito da forma com que os enunciados originais se apresentavam. Indagações sobre a influência que os desenhos tiveram no momento em que desenvolvemos as atividades, e que resultaram em recortes diferenciados, nos fez refletir sobre as condições que estudantes brasileiros teriam para realizar tal investigação. Jean, um dos participantes, questionou se a ausência de desenho interferiria nos cortes que os alunos poderiam realizar. Ele próprio não tinha em mãos os desenhos que os demais elementos do grupo tinham e sentiu essa dificuldade quando apenas era lido o enunciado. Aliada a essa inquietação, o grupo considerou ainda que quando essa proposta foi realizada com estudantes portugueses, *ninguém havia cortado um triângulo retângulo (...) tendiam a cortar apenas triângulos acutângulos* (PONTE, BROCARD e OLIVEIRA, 2003, p. 75-76). Sendo assim, surgiu o seguinte questionamento: o desenho interferia nos tipos de triângulos que seriam cortados? Desse modo, o grupo resolveu alterar o enunciado para adaptá-lo na ausência do desenho.

Nosso objetivo foi verificar como os estudantes brasileiros se envolveriam na tarefa para realizar as investigações geométricas pretendidas. Também nos interessava entender como a professora agiria nesse processo tendo em vista as condições de uma sala de aula brasileira.

⁵ Na ocasião da pesquisa aqui referida o GEM contava também com a participação de Thelma Cardinal Duarte Campãna (professora da rede pública de ensino) e Jaqueline Maria de Souza (graduanda em Matemática do ICMC/USP), entretanto não elas fizeram parte deste artigo.

Nosso grupo mostrou-se cauteloso com a implementação de uma proposta semelhante nas escolas públicas brasileiras visto as condições de ensino no Brasil serem diferentes das de Portugal. Essa reflexão motivou uma das professoras participantes, Maiza, a realizar tal investigação com seus alunos.

Naquele momento a questão que norteou a investigação foi identificar como os alunos da professora Maiza faziam os registros de suas aprendizagens a partir de tarefas de investigação geométrica. Contudo, essa questão foi se transformando ao longo da implementação em sala de aula e das análises que foram sendo realizadas nas reuniões do GEM e passaram a focalizar a constituição de uma tarefa de investigação geométrica bem como a tentativa da professora em transformar o enunciado visando melhorar seu entendimento e conseqüentemente enriquecer sua exploração matemática pelos alunos.

A investigação geométrica realizada na sala de aula e a dinâmica que se processou no grupo de estudo

Consideramos conveniente descrever a dinâmica da investigação geométrica realizada na sala de aula interrelacionando-a com as discussões realizadas durante as reuniões do grupo, pois esses dados compõem os materiais de análise desta pesquisa. Conforme citado anteriormente, a investigação geométrica foi realizada em uma classe de 7^a série do Ensino Fundamental (13-14 anos), com cerca de 35 alunos em uma escola pública do interior do Estado de São Paulo.

Embora esta tenha sido a primeira investigação matemática a partir dos estudos que o grupo vinha realizando, a professora Maiza relatou que seus alunos já tinham experiências com explorações matemáticas, dentre as quais uma com classificação de polígonos. Naquela ocasião, ela dividiu a classe em grupos, com cerca de oito alunos em cada um, e entregou para cada grupo, um conjunto de 25 polígonos (triângulos, quadriláteros, pentágonos e hexágonos) feitos em papel cartão, cujas medidas dos lados e dos ângulos estavam anotadas. A proposta foi que eles classificassem esses polígonos segundo os critérios que o grupo estabelecesse. Maiza relatou no GEM que os grupos fizeram classificações diferenciadas dos polígonos. Enquanto um grupo classificou o conjunto apenas pela quantidade de lados, outro classificou os polígonos quanto à medidas dos lados e à medida dos ângulos. Ela relatou que um dos grupos chegou a estabelecer relações entre os polígonos e a soma das medidas dos ângulos internos. Maiza solicitou aos grupos que fizessem os registros sobre suas conclusões e essa foi a


maior dificuldade enfrentada por eles. Segundo ela, os alunos conseguiam expressar oralmente suas descobertas, mas não se dispunham em fazer os registros escritos. Maiza relatou que precisou tomar a iniciativa de construir uma tabela que auxiliasse na classificação dos polígonos para sistematizar os conceitos envolvidos.

Essa experiência anterior, aliada aos estudos que o grupo vinha realizando, colaborou para que a professora Maiza se motivasse a desenvolver investigações geométricas com seus alunos. A partir daí todos os desdobramentos da investigação foram sendo debatidos e avaliados nas reuniões do grupo.

A investigação a que nos referimos neste artigo teve origem na proposta *Dobragens e Cortes* de Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p. 72-73), quando definimos que seria colocado aos alunos apenas o item A, qual seja:

A – Uma dobragem e dois cortes

1. Numa folha de papel dobrada ao meio, corte triângulos equiláteros, isósceles e escalenos. Pegue nos pedaços de papel que obteve, desdobre-os e diga quais as formas geométricas que têm.



Desenhe o esboço que mostre os cortes que fez e comente as suas descobertas.

Como referido anteriormente, o grupo sentiu a necessidade de modificar o enunciado omitindo o desenho por considerar que ele poderia interferir nos tipos de triângulos que seriam cortados. Desse modo, o enunciado foi adaptado para os alunos da professora Maiza:

1 – Numa folha de papel, dobrada ao meio, fazendo apenas dois cortes partindo da lateral da dobra, corte triângulos equiláteros, isósceles e escalenos. Pegue os pedaços de papel que obteve, desdobre-os e diga quais as formas geométricas que você obteve.

Abaixo, **descreva os cortes feitos e as formas geométricas obtidas.**

a) Corte: triângulo equilátero

b) Corte: triângulo isósceles

c) Corte: triângulo escaleno

(Enunciado construído durante reunião do GEM).

A princípio, não tínhamos idéia de quantas aulas seriam necessárias para o desenvolvimento da tarefa, entretanto fomos nos surpreendendo em cada reunião do GEM, com os desdobramentos provocados pela investigação proposta pela professora Maiza. O contexto da própria escola onde a pesquisa foi realizada contribuiu para que tanto tempo fosse utilizado proposta. Projetos de iniciativa da Secretaria Municipal de Educação e Exames Externos de Avaliação do Rendimento dos Alunos foram alguns dos intervenientes que prolongaram a realização da proposta. Isso ocasionou interrupções no seu desenvolvimento e conseqüentemente muito mais tempo foi utilizado. Ao todo foram necessárias 11 aulas (50 minutos cada) para sua execução.

A turma foi organizada em grupos, com 4 alunos em cada um, entretanto os papéis de cada integrante do grupo não foi previamente estabelecido. O relatório reflexivo de Maiza, discutido nas reuniões do GEM, evidencia como foram os momentos iniciais da proposta:

(...) foi combinado que era uma atividade que eles deveriam realizá-la e eu faria várias anotações do que estaria ocorrendo e também registraria em fotos.

Eles se animaram quando eu falei em fotos porque em uma aula anterior eu já havia feito algumas fotos das atividades com blocos geométricos e eles haviam gostado desta forma de atenção de minha parte.

(...) Eles tiveram muita dificuldade na interpretação, porém, não houve reclamações quanto ao fato de não haver explicação prévia. Acredito que este fato seja devido à postura que eu tento impor durante todas as aulas: em qualquer atividade proposta a tarefa de interpretação será sempre deles, eu só ajudarei depois. (Relatório n. 1 de Maiza)

Observamos no relatório de Maiza e também nas narrativas que ela fez nas reuniões do grupo, que a maior parte da classe apresentou dificuldade na interpretação do enunciado da tarefa, porém não reclamou de executá-la. Os questionamentos eram do tipo “*como corta?*”. Maiza devolvia esse questionamento dizendo: “*Leia a questão. O que ela diz?*”.

Maiza explicou que ao solicitar ao aluno que lesse novamente a questão, ele o fazia, porém não entendia o que deveria fazer. Segundo ela, não houve envolvimento dos alunos com a proposta. Diante disso, ela avaliou que essa dificuldade poderia ser

com relação à leitura e interpretação do enunciado e também quanto aos conceitos matemáticos intrínsecos e assim:

(...) então comecei a fazer a leitura pausada e com questionamentos, fazendo-os responder o que constava no enunciado, e a grande parte dos alunos acompanhou e começou a realizar a atividade. (Relatório n. 1 de Maiza)

Depois disso os alunos iniciam os recortes. A professora, na preocupação de melhorar a tarefa de modo a transformá-la numa investigação matemática, fez a leitura, ajudando os alunos a interpretar o enunciado. Há uma tentativa de inseri-los na atividade investigativa. Porém os alunos não correspondem ao esperado, não conseguem partir dessa proposta e iniciar o processo investigativo e isso é observado no relatório:

(...) eles não seguiam as orientações simultaneamente: ou cortavam triângulos, ou faziam dois cortes apenas, ou ainda, cortavam na lateral da dobra. E conforme foram me apresentando os resultados eu fui questionando as incorreções com relação ao enunciado. Achei melhor fazer uma alteração no enunciado: onde figurava **fazendo dois cortes na lateral da dobra** foi trocado por **fazendo dois cortes partindo da lateral da dobra**. No planejamento não prevíamos que os alunos poderiam fazer recortes como os seguintes:



Observe que eles fizeram o corte partindo da lateral da dobra e o objetivo era que a figura central fosse um triângulo escaleno. Isto ocorreu e os dois recortes feitos, quando abertos, também eram triângulos. [Aqui] o enunciado foi obedecido. (Relatório n. 1 de Maiza).

Observa-se no relatório de Maiza que ela se questiona a respeito das alterações feitas no enunciado. Embora o enunciado estivesse sendo obedecido quanto ao corte, não era esse tipo de corte que ela esperava (que parecesse o desenho que havia sido

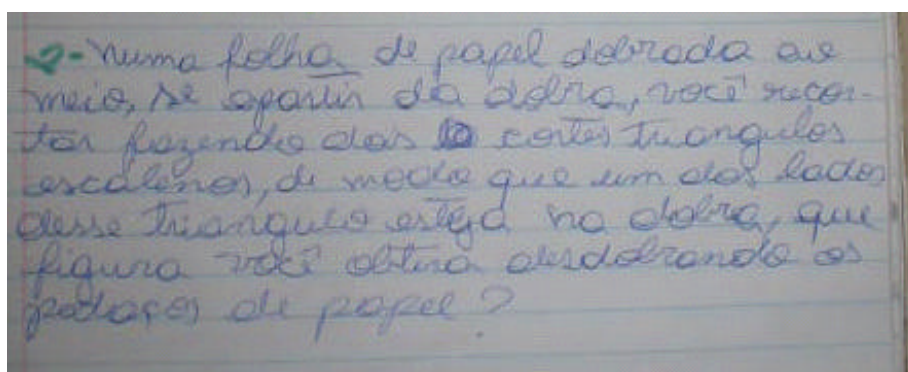
suprimido). Mesmo assim Maiza explicou que solicitava aos alunos que registrassem o que estavam observando. Mas a resistência ao registro ficou evidente. Predominou apenas a ação de cortar triângulos, sobretudo os escalenos. A atividade foi interrompida pelo final da aula.

Maiza trouxe essas questões para a reunião do GEM. Após algumas reflexões, concluímos que talvez o término da aula tivesse colaborado com a resistência dos alunos para o registro. E sugerimos que ela rerepresentasse a tarefa com outro enunciado, e que insistisse no registro:

Numa folha de papel, dobrada ao meio, se a partir da dobra, você recortar triângulos escalenos, de modo que um dos lados desse triângulo esteja na dobra, que figura você obterá desdobrando os pedaços de papel?

(Enunciado construído durante reunião do GEM).

Nota-se que esse enunciado focalizou apenas os triângulos escalenos, pois o objetivo era de que os alunos previssem, e registrassem, qual seria a figura obtida com o desdobramento dos pedaços de papel. Maiza acrescentou uma restrição a esse enunciado: *Numa folha de papel, dobrada ao meio, se a partir da dobra, você recortar, fazendo dois cortes, triângulos escalenos, de modo que um dos lados desse triângulo esteja na dobra, que figura você obterá desdobrando os pedaços de papel?* como mostrado no caderno do aluno:



Ela pediu que os alunos continuassem a investigação e pensassem sobre as respostas antes de executarem os cortes e, portanto, ela não lhes forneceu as tesouras. Entretanto, eles não acataram essa solicitação e passaram a recortar com o auxílio de

dobraduras (vincos) e réguas, não se dispendo a abstrair, antes dos cortes, as possibilidades de figuras que seriam obtidas.

Durante a aula, a professora percebeu que a nova instrução levava a outros entendimentos e adaptações. Um dos grupos, por exemplo, recortou um triângulo isósceles, ao invés de escaleno, como o enunciado pedia; outro recortou um triângulo obtusângulo. Ao serem questionados sobre os triângulos recortados, Maiza observou que eles não dominavam a nomenclatura dos triângulos.

É interessante observar que embora a professora avaliasse, naquele momento, que os cortes não estivessem adequados e que isso decorria de falta de conhecimentos prévios dos alunos, estava ocorrendo a mobilização dos alunos com a aula investigativa. Os objetivos didáticos da professora procuravam “rever e/ou fixar conceitos de triângulos já trabalhados”, enquanto a dinâmica da aula investigativa poderia estar promovendo aprendizagens de forma compartilhada.

Ressalta-se que a característica da aula investigativa ainda não estava clara para a professora e nem para os demais elementos do GEM e só foram percebidas no momento da análise dos dados. Talvez isso tenha contribuído para que o desenvolvimento da tarefa tenha sido truncado.

A seqüência de fotos e os comentários do relatório produzido por Maiza evidenciam a dificuldade que uma professora, não acostumada com aulas investigativas, teve em compreender as dimensões dessa prática.

A foto abaixo ilustra que no decorrer da atividade, o enunciado ainda não ficou preciso como queríamos, pois vários alunos seguiram-no e ainda não fizeram os recortes que esperávamos:



Observe que acrescentamos a expressão “um lado do triângulo esteja na dobra” e mesmo assim não conseguimos, obrigatoriamente, cortes que descrevessem a figura que omitimos do enunciado original.

(Relatório n. 2 de Maiza)

A professora continua insistindo nos registros, porém não obtém sucesso:

Entretanto nesta aula eles não fizeram os registros. Eu insisti para que não deixassem de escrever o que estavam fazendo para não se esquecerem posteriormente e porque estas anotações seriam úteis mais adiante. Eu percebo que a ansiedade em fazer os recortes é muito grande e que eles não se puseram a antecipar o resultado sem fazer os cortes, isto não aconteceu nos grupos, por mais que eu insistisse. Praticamente todo o tempo da aula eles ficaram recortando com suas próprias tesouras e não tentaram antecipar o resultado. Quando eu perguntava “se vocês recortassem...” a resposta obtida era imediatamente com a mão no papel e na tesoura. Quando eu não deixava recortar eles paravam e falavam: “Ah, não sei...” (Relatório n. 2 de Maiza).

Ela relatou na reunião do GEM que os alunos estavam muito ansiosos e faziam os cortes, sem parar para pensar ou prever o que obteriam. Ela precisou intervir em diferentes momentos na tentativa de gerir uma situação que proporcionasse a investigação dos alunos, sem estruturar demais a tarefa e nem deixá-la muito aberta. Contudo, ela sentiu necessidade de fazer uma revisão dos conteúdos que estavam sendo trabalhos:

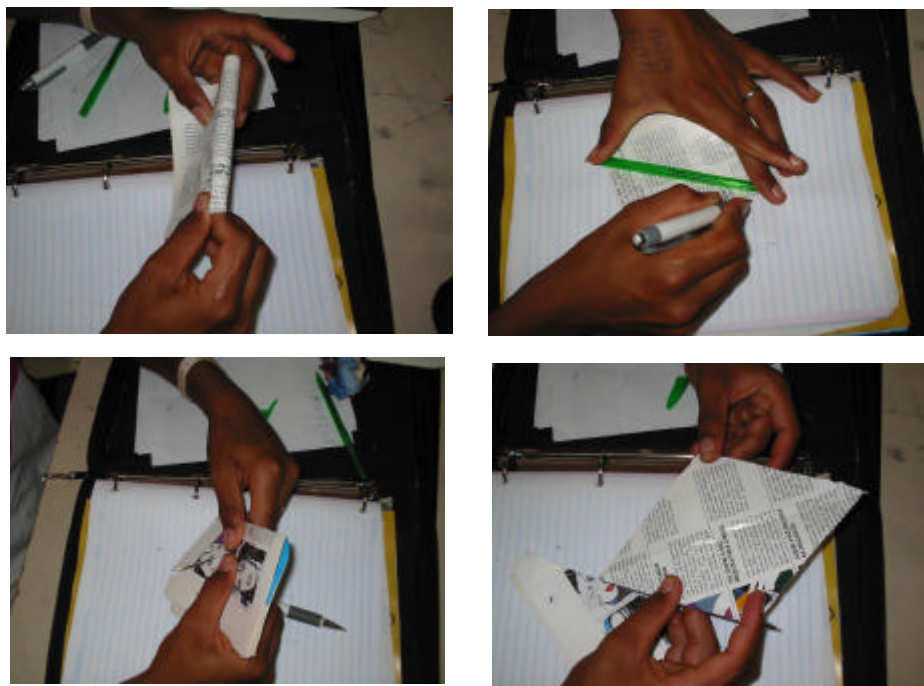
No decorrer desta aula eu fiz uma revisão oral com eles do que eram triângulos escalenos, isósceles e equiláteros, porque algumas das perguntas que apareceram eram confusões do tipo: **o isósceles, qual é mesmo?** (Relatório n. 2 de Maiza).

É interessante observar que a cada nova aula a professora necessitava retomar o que havia feito na aula anterior:

No início de cada aula eu recolocava o enunciado na lousa, fazia a leitura e grifava bastante que não era para fazer os recortes, mas antecipar o resultado. Nada adiantava, em 5 minutos só víamos papéis picados! (Relatório n. 3 de Maiza).

Por outro lado, Maiza destaca o envolvimento dos alunos com a proposta de aula investigativa, comparando com outros tipos de tarefas:

Foi muito interessante observar que os alunos que mais se concentraram e tentaram ser criativos nas dobras não foram aqueles que sempre se destacam de forma positiva em outras atividades. O aluno que mais me chamou e ficou envolvido era um daqueles que não gostam de ficar resolvendo exercícios escritos. Observe na seqüência de fotos que para esse aluno a tarefa se transformou em uma atividade de investigação matemática. Ele investigou como deveria ser feita a dobra para obter um triângulo isósceles:



(Relatório n. 3 de Maiza)

Maiza ressalta ainda em seu relatório a dificuldade de acompanhar as aprendizagens de seus alunos numa aula investigativa nas condições da sala de aula brasileira:

Devido ao tempo de aula, ao dinamismo da atividade e ao grande número de alunos em classe, eu não conseguia acompanhar todas as etapas dos grupos. Eles me chamavam muito para mostrar o que estavam obtendo, as perguntas eram em quantidade bem menor do que os resultados que eles queriam mostrar. (Relatório n. 3 de Maiza)

Além disso, ela vai percebendo que o envolvimento dos alunos vai diminuindo, e que as dificuldades vão sendo acentuadas à medida que ela não consegue fechar a proposta. O grau de insatisfação é expresso na reflexão:

Terminou a aula, novamente fico com a certeza de que as minhas intervenções poderiam ser maiores, porém eu não conseguia estar em todos os grupos durante o tempo necessário para isso.

Vários alunos já se mostraram dispersos, não apresentando um crescimento na atividade, eles estavam repetindo recortes anteriores, porém a concentração e o interesse diminuíram. Isto ocorreu principalmente nos grupos que anteriormente estavam bem dispostos.

Muitos alunos faltaram em pelo menos um dos dias de desenvolvimento da atividade. (...) eles não têm o hábito de buscarem os conteúdos com seus colegas quando faltam, chegam à aula seguinte de forma bem tranqüila, sem preocupação com o que perderam. Este comportamento é freqüente em todas as disciplinas e é uma das queixas dos professores em nosso dia-a-dia.

Nesta aula de investigação eu percebi que isto compromete o desenrolar da atividade e do raciocínio.

Os alunos dispostos em grupo facilita a utilização do material e a troca de experiências, porém eles não planejam conjuntamente o que vão fazer. Quem está com a tesoura corta, ou então, quem tem a idéia corta e mostra para os outros ou para mim. (Relatório n. 4 de Maiza).

No decorrer dessa aula, ela decidiu direcionar um pouco mais a atividade, tentando resgatar a concentração e o envolvimento dos alunos. Segundo o que ela narrou na reunião do GEM, a atenção foi retomada, por outro lado a riqueza da exploração geométrica deixou de fluir. A partir de então, alguns alunos começaram a fazer registros parecidos com o que ela fazia e fixava na lousa, como pode ser observado nas fotos seguintes. A da esquerda refere-se ao registro de Maiza.



(Fotos do Relatório n. 5 de Maiza).

Entretanto essa dinâmica adotada por ela se modifica em outra aula, quando ela volta a propor explorações geométricas. Ao pedir que os alunos recortassem um triângulo retângulo isósceles, a dinâmica de aula investigava é recomposta. Em seu relatório, nota-se que alguns alunos construíam os lados utilizando a régua para medir os comprimentos e como esquadro, o “canto da régua”, como eles mesmos costumam dizer.

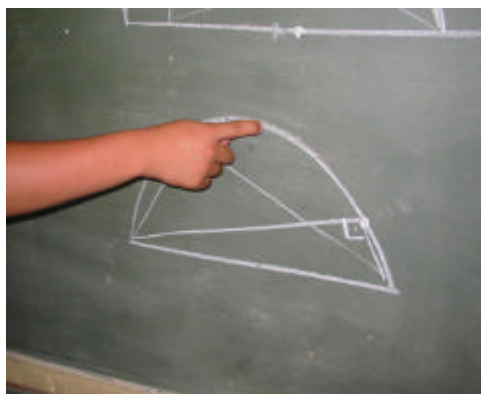


Triângulo com ângulo reto na dobra

(Relatório n. 6 de Maiza)

Quando os alunos construíam triângulos com ângulos retos fora da dobra, os lados não eram exatamente iguais, assim Maiza fez intervenções, dialogando com a turma a respeito da construção geométrica de triângulos retângulos isósceles. Ela fez um esboço na lousa de uma semicircunferência e questionou-os a respeito dessa construção. Na seqüência, pediu que eles identificassem a localização de elementos do triângulo retângulo isósceles desenhado na lousa com os elementos do triângulo retângulo isósceles desenhado na folha dobrada. Eles conseguiram observar que a hipotenusa deve ficar na dobra no papel e também indicaram a localização que o ângulo reto precisa estar para que os catetos desse triângulo sejam congruentes.

Nota-se nessa dinâmica proporcionada pela professora que os alunos se envolvem plenamente com a atividade investigativa. Um dos alunos se prontifica em mostrar para os demais colegas que o ângulo reto deveria estar “*bem lá em cima*”, como mostra a foto extraída do relatório de Maiza. Em nossa concepção, isso evidencia potencialidades didáticas proporcionadas pela investigação geométrica proposta.



(Relatório n. 7 de Maiza)

No relatório de Maiza fica evidente também a preocupação com a aprendizagem dos alunos e ao mesmo tempo com a constituição da tarefa de investigação geométrica. Identificamos que ela faz intervenções no sentido de proporcionar aos alunos condições para que eles mesmos cheguem às relações entre o corte do triângulo retângulo isósceles e o quadrado.

Ressalta-se que, embora Maiza não se tenha dado por satisfeita com as aulas investigativas, pois percebeu, no decorrer do trabalho, que seus alunos não conseguiam relacionar idéias, supostamente já conhecidas, teve que promover um fechamento da mesma, em virtude do término do ano letivo. A partir de então, a construção dos instrumentos de avaliação passa a fazer parte das ações da professora envolvida com essa dinâmica. Ressalta-se que nesse período ela não contou com as reuniões no GEM para compartilhar seu trabalho.

Para a professora, os registros escritos produzidos pelos alunos eram insuficientes para avaliá-los. As manifestações orais deles durante essas aulas também não bastavam para avaliar suas aprendizagens (ela não conseguiu fazer os registros dessas falas pelo fato ser, ao mesmo tempo, a professora e a pesquisadora durante esse processo). Aliado a isso, havia a necessidade de apresentar registros de avaliação para cumprir as exigências legais da escola. Assim sendo, ela elaborou um processo avaliativo que consistiu de quatro provas. As duas primeiras através de questionários com perguntas de caráter mais aberto para serem respondidas por escrito. As outras duas, mais diretas, pretendo avaliar conhecimento específico.

Quando Maiza expôs para os participantes do GEM como havia realizado esse processo avaliativo, apresentando os motivos acima relatados, consideramos que a

resistência dos alunos em realizarem os registros escritos foi um dos motivos mais marcantes, o que a levou a uma busca por instrumentos de avaliação diferenciados.

Por outro lado, os resultados revelados pelas provas não foram plenamente satisfatórios. No GEM, os participantes buscavam explicações para esse desempenho dos alunos. Imaginávamos que, após essas atividades, e a partir do que estávamos estudando, os alunos seriam capazes de fazer conjecturas, classificar os diversos tipos de triângulos e quadriláteros (quanto aos seus lados e ângulos), perceber seus princípios geradores, estabelecer relações, justificar suas respostas, identificar eixos de simetria.

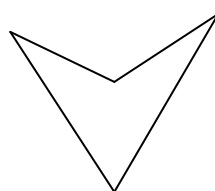
Diante dessas dissonâncias entre as avaliações, o grupo sugeriu que na última aula do ano letivo a professora Maiza poderia fazer uma síntese de todo processo. Nesse dia ela contou com uma observadora externa, membro do GEM, que fez os registros dessa dinâmica, a qual se revelou extremamente importante para o estudo aqui apresentado.

Procurando cruzar os dados do relatório da observadora externa, com os dos relatórios reflexivos da professora Maiza e com as narrativas realizadas na reunião do GEM, percebemos que, embora os alunos se empolgassem com as tarefas e participassem da execução das mesmas, eles apresentaram certo grau de dificuldade para justificar razoavelmente seus raciocínios, relacionar a diversidade de conteúdo trabalho na tarefa, conjecturar e generalizar os resultados.

Eu notei que, mesmo na sistematização, após eles usarem um conceito de forma correta para uma determinada tarefa, em outras, que requeriam o mesmo conceito, eles o utilizavam de forma incorreta. Ou seja, não houve efetivamente aprendizagem. (Narrativa de Maiza durante a reunião do GEM).

Um exemplo dessa dificuldade ocorreu a partir do desenho de um quadrilátero não-convexo feito na lousa pela professora Maiza, como indicado no relatório da observadora externa:

Maiza desenhou na lousa um quadrilátero e dialogou com a classe.



Maiza: — Que figura é essa?

Aluno1: — Quadrilátero não convexo.

Aluna2: — Obtusângulo.

Aluna3: — O mesmo que ela [aluna3] falou.

Maiza: — O que é que ela falou?

A aluna3 respondeu confusamente, e Maiza pergunta novamente.

Aluna3: — Eu não entendi o que ela falou.

Maiza: — Então, como é que você fala que é o que ela falou, se você não entendeu?

A aluna3 fica confusa e Maiza dirige a pergunta a outros alunos que respondem: *obtusângulo*.

Maiza: — Por que vocês estão chamando esta figura de obtusângulo?

Os alunos ficam confusos. Outro aluno chegou a afirmar que seria um “triângulo de 4 lados”.

Maiza: — Quantos lados tem a figura? (apontando para ela)

Aluno1: — Quatro.

Maiza: — Como se chama um polígono de 4 lados?

Alunos em coro: — Quadrilátero.

Alguns alunos responderam quadrilátero não convexo, enquanto outro disse que era obtusângulo.

(Extraído do relatório da observadora externa)

Ao comentarmos sobre esse episódio no GEM, conjecturarmos que provavelmente o aluno ao se referir ao quadrilátero como sendo um “triângulo de quatro lados”, poderia estar preso aos aspectos figurais do quadrilátero não-convexo, em detrimento dos conceituais, comum quando não há domínio dos conceitos geométricos. (FISCHBEIN, 1993).

Através de relato detalhado da professora, observamos que, apesar de todas essas restrições, diferentemente do que ocorre no ensino tradicional, a atividade favoreceu a espontaneidade dos alunos. Maiza acredita que seus alunos têm uma visão de escola ainda muito arraigada nos moldes do ensino tradicional. Em suas palavras: “*esperam mais do que buscam, criticam ou questionam pouco, demonstram passividade na aprendizagem*”.

Segundo ela, essa característica foi um entrave para o desenvolvimento da investigação matemática de forma plena, mas tem consciência de que isso pode e deve

ser mudado: *fazer a investigação matemática pode ser uma forma de colocar o aluno como sujeito, de colaborar para a mudança.*

Algumas considerações

Ainda que Maiza questionasse se realmente promoveu uma investigação matemática, este estudo revelou que a constituição das tarefas em aulas investigativas pode trazer inúmeros aprendizados. Quando o enunciado foi sendo modificado na tentativa de promover entendimentos favoráveis para que os alunos se envolvessem com a investigação matemática, colocou diversos desafios tanto para a professora quanto para os demais participantes do grupo colaborativo. A professora, principal protagonista nesse estudo, precisou adequar algumas rotinas da sala de aula para um contexto de aulas investigativas. Embora tenha contado, em alguns desses momentos com a colaboração de um grupo de estudo, essa experiência só foi possível devido ao desafio que ela se propôs e por acreditar que essa proposta traria contribuições relevantes para a aprendizagem de seus alunos. Segundo suas palavras:

Para o êxito da atividade de caráter investigativo, é necessária a crença na sua importância, por parte dos alunos e do professor. Se, em algum momento, uma das partes perder seu objetivo, a tarefa não terminará e não terá o êxito esperado. Entra novamente todo o histórico da turma com o professor: em todas as aulas, eles precisam ter em mente a importância do ensino e o respeito pessoal, como princípios para o trabalho. (...) Durante os meus relatórios, mencionei que fazê-los é tão importante para o professor quanto para os alunos. Além da visão e das impressões no momento da aula, podemos ter um olhar externo durante a escrita, como se fosse uma outra pessoa, o que possibilita uma reflexão profunda, que não se configura apenas na interpretação do que o aluno fala ou mostra. E aparecem as dificuldades de registro, também para o professor. (Relato de Maiza em reunião do GEM).

Considerando a realidade da escola pública brasileira, os objetivos desta investigação, cujo enfoque recaiu sobre a constituição de uma tarefa em atividade de investigação geométrica e nas tentativas da professora (uma integrante do GEM) em transformar o enunciado de uma tarefa em uma autêntica atividade de investigação

geométrica, identificamos algumas questões que merecem destaque e indicam que outros estudos podem ser desenvolvidos.

A relação positiva que a professora estabeleceu com a atividade de investigação ocorreu por ela acreditar nas potencialidades didáticas dessa abordagem e também em sua experiência em atividades de caráter exploratório e de resolução de problemas, e a disposição em aceitar desafios.

Embora os alunos não tenham se mobilizado totalmente na produção matemática que esperávamos o envolvimento (da maneira deles) com a tarefa pôde ser observado. Eles passaram por situações de experimentação que não estavam acostumados, saíram da rotina das aulas tradicionais, usaram a criatividade em suas “explorações” matemáticas.

As condições da sala de aula brasileira, com um número excessivo de alunos na classe, é um fator que merece destaque. A professora que propôs a tarefa precisou, ao mesmo tempo, atender adequadamente todos os grupos, que não estavam acostumados a essa dinâmica, e a registrar os seus resultados. Isso demandou muito tempo para cada etapa, que constantemente era interrompida pelo término da aula. A ausência de contato dos alunos com propostas investigativas e a não disposição deles em estudar fora do contexto escolar, fez com que a professora, a cada aula, retomasse o que tinha desenvolvido na aula anterior.

A resistência dos alunos em realizarem registros provocou o conflito da professora em definir os instrumentos de avaliação, que devem ser necessariamente compatíveis com a proposta desenvolvida.

Os momentos do trabalho de campo em que foi exigido ações imediatas, revelando a autonomia da professora, devem ser destacados. Este estudo revelou também que é essencial fazer um planejamento que indique a efetiva constituição de tarefa em atividade de investigação. Os momentos de intervenção da professora na tentativa de estimular os alunos para que realizassem as investigações merecem destaque, ainda que em alguns momentos ela não tenha reconhecido como satisfatória. Referindo-se à autonomia dos alunos Maiza relata que:

Todos os recortes que eles faziam, queriam mostrar. Buscavam uma validação do que fizeram. Por exemplo, quando eu fazia o registro fotográfico, eles

acreditavam que estavam no caminho certo. (Relato de Maiza na reunião do GEM)

Considerando, como apontam Serrazina et al. (2002), que a formulação de problemas, a colocação de questões e o estabelecimento de objetivos por parte dos alunos são atributos essenciais nas investigações, observa-se que, no caso analisado, os alunos não tiveram um papel tão ativo. Embora Maiza enfatizou tal postura, procurando manter atitudes nessa direção, como quando reformulou os enunciados, por diversas vezes, para que os alunos fizessem previsões sobre os recortes e fossem capazes de se atentar para os detalhes e sua interpretação, não obteve os resultados esperados. Entretanto, numa investigação matemática não há resultados conhecidos para os alunos, conforme enfatizado por Pirie (1987, apud SERRAZINA et al., 2002, p. 43) e não *se espera que estes alcancem 'a resposta certa', mas sim que explorem, formulem conjecturas e se convençam a si próprios e aos outros das suas descobertas.*

Além disso, esta dificuldade não deve ser atribuída ao modo de condução das tarefas pela professora, mas principalmente à cultura escolar que hoje se faz presente na maioria das escolas públicas brasileiras, na qual o comprometimento dos alunos com a própria aprendizagem é bastante precário. Isto se deve a fatores sociais e comportamentais, desencadeados por vários anos de políticas públicas para a educação que não valorizam tal comprometimento do educando. *Ser professor no Brasil, desde a segunda metade do século XX, não tem sido tarefa fácil. No entanto, nos últimos dez anos, esta tarefa parece estar se tornando ainda mais difícil.* (FIORENTINI et al., 2003, p. 3).

Em síntese, o estudo aqui apresentado revela que as tarefas de investigações matemáticas, por sua própria natureza, têm um caráter reflexivo e isso exige do professor um novo papel. A união do domínio matemático com os fundamentos pedagógicos é fundamental para que as intervenções sejam adequadas. Além disso, o professor precisa estar atento para perceber quando uma investigação matemática, pretendida por ele, precisa ser interrompida, ou quando ela pode ser transformada em outra.

Quando refletimos sobre as aprendizagens que ocorreram no grupo de estudo com essa pesquisa, identificamos a necessidade dessas novas exigências para o professor. A experiência evidenciou que as discussões no grupo não foram suficientes para decidir os rumos que a investigação matemática poderia tomar. Como enfatizado

por Goldenberg (1999), o professor facilmente pode estar a perder tempo insistindo em pontos insignificantes, quando uma pequena mudança na investigação em curso, ou uma mudança radical do ponto tratado, poderia ser mais produtiva para os alunos.

Por outro lado, os textos reflexivos escritos pela professora dão indícios de seu desenvolvimento profissional, evidenciando o que a dinâmica das atividades investigativas lhe proporcionou:

Fazer o registro deste documento me fez prestar atenção em detalhes que o tempo não permitiria durante a aula. A observação das fotos, a reorganização mental dos fatos ocorridos e a interpretação posterior têm-se caracterizado em momentos singulares, que provavelmente terão seus frutos em situações futuras. É um exercício de autonomia que permite um crescimento profissional que eu não imagino que alguém pudesse ter me ensinado como um modelo algum dia. (Relatório reflexivo de Maiza).

Embora essa experiência não tenha sido suficiente para desenvolver nos alunos as atitudes esperadas de uma atividade investigativa, vimos nos relatos e reflexões da professora um ganho significativo para suas aprendizagens. Consideramos que essa experiência apresenta indícios de que as investigações matemáticas podem ser conduzidas de modo que os alunos aprendam a investigar. Uma função das investigações matemáticas é ensinar o aluno a investigar, como destacado por Goldenberg (1999). Ser um investigador competente em matemática, como em outras ciências ou outras áreas do conhecimento, também é importante. Como afirmam Ponte et al. (2003), os alunos podem precisar de várias experiências em trabalho investigativo para perceberem, de modo apropriado, o que é este trabalho. Neste sentido, consideramos que o caso analisado foi uma experiência inicial nessa linha de pesquisa, base para reflexões, questionamentos e também para traçar novos direcionamentos para futuras investigações no GEM.

Referências Bibliográficas

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Portugal: Porto Editora, 1994.

BRAUMANN, C. Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem de matemática. In: PONTE, J.P. et al. **Atividades de investigação na**

aprendizagem da matemática e na formação de professores. Lisboa: SEM-SPCE, 2002, p. 5-24.

CHRISTIANSEN, B. e WALTHER, G. Task and activity. In: CHRISTIANSEN, B; HOWSON, A. G. e OTTE, M. (Eds.) **Perspectives on mathematics education**. Dordrecht: D. Reidel, 1986, p. 243-307. Tradução em português disponível em: <<http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/sd/mestrado-bibliografia.htm>>. Acesso em: 28 mai. 2005.

CUNHA, Maria Helena. Saberes profissionais de professores de matemática: dilemas e dificuldades na realização de tarefas de investigação. In: **Millenium on line**. www.ipt.pt. n. 17, janeiro, 2000.

FIORENTINI, Dario et al. O Desafio de Ser Professor de Matemática Hoje. In **Anais XI Conferência Interamericana de Educação Matemática**. Blumenau: FURB-Inter-American Commite on Mathematics Education, 2003.

FISCHBEIN, Efraim. The Theory of Figural Concepts. In: **Education Studies in Mathematics** 24, pp. 139-162. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1993.

GOLDENBERG, E. Paul. Quatro funções da investigação na aula de matemática. In: ABRANTES, P. et al. **Investigações Matemáticas na aula e no currículo**. Portugal: Grupo Matemática para todos – CIEFCUL, 1999, p. 35-50.

LÜDKE, Menga e ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

ONUCHIC, L. R. . Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de Problemas. In: Maria Aparecida Viggiani Bicudo. (Org.). **Perspectivas em Educação Matemática**. São Paulo, 1999, v. único, p. 199-218.

ONUCHIC, L. R. ; ALLEVATO, Norma Suely Gomes . Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem da matemática através da resolução de problemas. In: Maria Aparecida Viggiani Bicudo; Marcelo de Carvalho Borba. (Org.). **Educação Matemática - pesquisa em movimento**. , 2004, v. único, p. 213-231.

PONTE, J. P. et. al. Investigando as aulas de investigações matemáticas. In ABRANTES, P. et al (Orgs) **Investigating Mathematical Investigations Les interactions dans la classe de mathématiques**. Proceedings of the CIEAEM 49. Setúbal: ESE de Setubal, 1998, p. 3-14.

PONTE, J. P. ; BROCADO, Joana ; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PONTE, João Pedro M. (2003). **Investigar, ensinar e aprender**. Actas do ProfMat, p. 25-39 (CD-ROM).

SERRAZINA, Lurdes; VALE, Isabel; FONSECA, Helena; PIMENTEL, Teresa. O papel das investigações matemáticas e profissionais na formação inicial de professores. In: PONTE, J. P. da et al. (Orgs.) **Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores**. Lisboa: SEM-SPCE, 2002, p. 41-58.

STEIN, Mary Kay e SMITH, Margaret Schan. Mathematical tasks as a framework for reflection: from research to practice. In: **Mathematics Teaching in the Middle Scholl**, 1998, 3(4), 268-275. Tradução em português disponível em: <<http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/sd/mestrado-bibliografia.htm>>. Acesso em: 28 mai. 2005.