

Cenários para investigação¹

Ole Skovsmose², *University of Aalborg, Dinamarca*

Resumo

Conforme observações efectivadas em diversos lugares, a educação matemática tradicional se enquadra no paradigma do exercício. Esse paradigma se diferencia do cenário para investigação, no qual os alunos são convidados a se envolverem em processos de exploração e argumentação justificada. A distinção entre o paradigma do exercício e o cenário para investigação é combinada com a diferença entre três tipos diferentes de referência: referência à matemática, referência à semi-realidade e referência à situação da vida real. Os seis possíveis ambientes de aprendizagem resultantes dessa combinação serão ilustrados através de exemplos.

Mover-se do paradigma do exercício em direcção ao cenário para investigação pode contribuir para o enfraquecimento da autoridade da sala de aula tradicional de matemática e engajar os alunos activamente em seus processos de aprendizagem. Mover-se da referência à matemática pura para a referência à vida real pode resultar em reflexões sobre a matemática e suas aplicações. Minha expectativa é que caminhar entre os diferentes ambientes de aprendizagem pode ser uma forma de engajar os alunos em acção e reflexão e, dessa maneira, dar à educação matemática uma dimensão crítica.

1. Introdução

Nas suas observações de salas de aula inglesas, Cotton (1998) notou que a aula de matemática é dividida em duas partes: primeiro, o professor apresenta algumas ideias e técnicas matemáticas e, depois, os alunos trabalham com exercícios seleccionados. Ele também observou que existem variações nesse mesmo padrão: há desde o tipo de aula em que o professor ocupa a maior parte do tempo com exposição até aquela em que o aluno fica – a maior parte do tempo envolvido com resolução de exercícios. De acordo com essas e muitas outras observações, a educação matemática tradicional se enquadra no paradigma do exercício. Geralmente, o livro didáctico representa as condições tradicionais da prática de sala de aula. Os exercícios são formulados por uma autoridade externa à sala de aula. Isso significa que a justificação da relevância dos exercícios não é parte da aula de matemática em si mesma. Além disso, a premissa central do paradigma do exercício é que existe uma, e somente uma, resposta correcta.

O paradigma do exercício pode ser contraposto a uma abordagem de investigação, que pode tomar muitas formas, como o trabalho de projecto na escola primária e secundária

¹ Publicado em *Bolema*, nº 14, pp. 66 a 91, 2000. A palavra “cenário” foi traduzida do inglês *landscape*.

² osk@den.auc.dk

(Nielson, Patronis & Skovsmose 1999; Skovsmose, 1994) bem como no nível universitário (Vithal, Christiansen & Skovsmose, 1995). Em geral, o trabalho de projecto está localizado num ambiente de aprendizagem que difere do paradigma do exercício. É um ambiente que oferece recursos para fazer investigações.

O meu interesse numa abordagem de investigação tem relação com a educação matemática crítica, a qual pode ser caracterizada em termos de diferentes preocupações³. Uma delas é o desenvolvimento da *materacia*, vista como uma competência similar à *literacia* caracterizada por Freire. Materacia não se refere apenas às habilidades matemáticas, mas também à competência de interpretar e agir numa situação social e política estruturada pela matemática. A educação matemática crítica inclui o interesse pelo desenvolvimento da educação matemática como suporte da democracia, implicando que as micro-sociedades de salas de aulas de matemática devem também mostrar aspectos de democracia. A educação matemática crítica enfatiza que a matemática como tal não é somente um assunto a ser ensinado e aprendido (não importa se os processos de aprendizagem são organizados de acordo com uma abordagem construtivista ou socio-cultural). A Matemática em si é um tópico sobre o qual é preciso refletir. Ela é parte de nossa cultura tecnológica e exerce muitas funções, as quais podem ser mais bem caracterizadas por uma leve reformulação da Primeira Lei de Kranzberg: o que a matemática está produzindo não é bom nem ruim, nem é neutro (veja Kranzberg, 1997). D'Ambrosio (1994), usando uma formulação mais incisiva, enfatiza que a matemática é parte de nossas estruturas tecnológicas, militares, económicas e políticas e como tal, um recurso tanto para maravilhas como para horrores⁴. Fazer uma crítica da matemática como parte da educação matemática é um interesse da educação matemática crítica. Parece não haver muito espaço no paradigma do exercício para que tais interesses sejam levados em conta.

A apresentação que segue é baseada parcialmente em meu trabalho com educação matemática através de projectos. Esse trabalho mantém vínculos com professores de contextos culturais, económicos e políticos muito diferentes – Colômbia, África do Sul, Brasil, Inglaterra e Dinamarca com os quais tenho discutido essas ideias. Sempre começo com um exemplo.

³ Veja Skovsniose e Nielsen (1996).

⁴ Veja também D'Ambrosio (1998) e Skovsmose (1998a, 1999b, no prelo).

2. Um exemplo

Chamo de “cenário para investigação” um ambiente que pode dar suporte a um trabalho de investigação⁵. Observemos uma interessante e antiga tabela de números, que provavelmente tem decorado as paredes de muitas salas de aula de matemática e servido de base para uma variedade de exercício:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	...						

Figura 1 - Uma interessante e antiga tabela de números

Concentremo-nos num rectângulo colocado sobre a tabela. Se os números nos cantos do rectângulo são indicados por a , b , c e d , é possível calcular o valor de F determinado por:

$$F = ac - bd.$$

O rectângulo pode ser transferido para outra posição e o valor de $F = ac - bd$ pode ser calculado novamente.

Por exemplo, observamos que $22 \cdot 34 - 24 \cdot 32 = -20$ e $37 \cdot 49 - 39 \cdot 47 = -20$. Tentemos transladar o rectângulo para uma posição diferente e calcular de novo o valor de F . A propósito, o que acontece se girarmos o rectângulo em 90° e fizermos o mesmo cálculo? Bem... O que acontece se escolhermos um rectângulo maior e fizermos uma translação semelhante? Qual será o valor de $F = ac - bd$? De que maneira o valor de F depende das dimensões do rectângulo?

Naturalmente, é possível investigar translações de outras figuras. O que acontece se calcularmos os valores $F = ac - bd$, com a , b , c e d referindo-se aos números determinados

⁵ O exemplo seguinte é inspirado na palestra de Ole Einar Torkildsen, durante a Conferência NOMUS, em Aalborg (Dinamarca), no ano de 1996.

pelos cantos das figuras mostradas abaixo (Figura 2)? Quais destas figuras podem ser “transladadas” sem alterações no valor de F ?

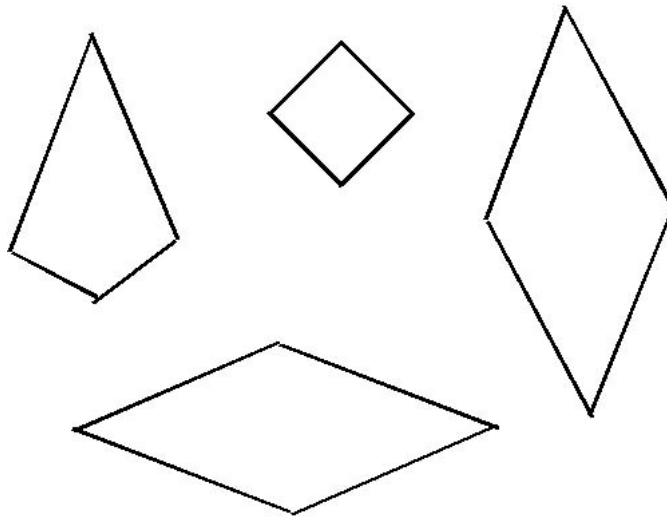


Figura 2 - Outras figuras a serem transladadas

Por que não investigar uma função diferente para F ? Por exemplo, o que acontece se permutarmos as operações “subtração” e “multiplicação” e, em vez de $F = ac - bd$, calcularmos:

$$G = (a - c)(b - d)$$

(a , b , c e d referem-se aos cantos de um rectângulo)? Será que G é constante em todas as translações? Daria certo também para as figuras mostradas na Figura 2? Existem outras funções que são rectângulos transladáveis (ou seja, cujo valor seja mantido constante durante a translação)? Sim, bem, há a função H definida como $H = Oa + Ob + Oc + Od$. Mas será que não existem funções para rectângulos “transladáveis” mais interessantes? Considerando que achamos uma dessas funções, ela seria também um losango transladável? Uma função associada a um rectângulo transladável seria também associada a um losango transladável? Em termos mais gerais: que funções fazem quais figuras transladáveis?

E se considerarmos os números negativos? Nesse caso, a tabela de números da Figura 1 poderia ser prolongada, acrescentando números à esquerda e à direita de cada linha. Podemos, então, considerar translações que tragam as figuras para regiões com números negativos (Figura 3). A propósito, o que aconteceria se a tabela fosse disposta como se mostra na Figura 4?

Certamente, é também possível desenvolver cálculos numa base numérica diferente. Seria a qualidade de “ser transladável” dependente da base numérica que estamos considerando?

								...									
...	-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	...
...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
...	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	28	19	20	21	22	...
								...									

Figura 3 - Uma tabela prolongada de números

Naturalmente, não precisamos nos concentrar em configurações de números determinados pelos cantos de um quadrilátero. Poderíamos considerar qualquer configuração de números a_1, \dots, a_n e uma função $F = F(a_1, \dots, a_n)$. A questão, então, seria: que funções definidas sobre uma configuração de números são constantes em relação à translação da configuração? E por que não considerar a rotação ou qualquer outro movimento da figura? Além disso, até agora concentrámo-nos numa propriedade particular da função F , ser constante ou não, mas poderíamos observar muitas outras propriedades desta função. Isso nos conduz à questão: Que funções definidas sobre uma configuração de números mostram “belas” propriedades para a translação?

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	...			

Figura 4 - Uma disposição diferente para a tabela de números

3. O que acontece se ... ?

Imaginemos que este exemplo envolve os alunos e o professor por um determinado tempo. Estamos observando seu diálogo. O professor pergunta: “O que acontece se ... T”, e, mais tarde, ouvimos de novo o seu “O que acontece se ... T”. Os alunos podem ficar surpresos com algumas das propriedades matemáticas levantadas pelas questões. Sussurros vêm de todos os cantos. Mais adiante, torna-se possível ouvir mais claramente as vozes dos alunos: “O que acontece se ... T” “Sim, o que acontece se...?”

Talvez o professor pergunte: “Por que isto ... ?”, o que conduz a mais sussurros e, possivelmente, períodos longos de silêncio. Mais tarde, algumas falas dos alunos podem ser ouvidas: “Sim, por que isto... ?”

Um cenário para investigação é aquele que convida os alunos a formularem questões e procurarem explicações. O convite é simbolizado pelo “O que acontece se ... T” do professor. O aceite dos alunos ao convite é simbolizado por seus “Sim, o que acontece se ... T”. Dessa forma, os alunos se envolvem no processo de exploração. O “Por que isto ... ?” do professor representa um desafio e os “Sim, por que isto ... T” dos alunos indica que eles estão encarando o desafio e que estão procurando explicações. Quando os alunos assumem o processo de exploração e explicação, o cenário para investigação passa a constituir um novo ambiente de aprendizagem. No cenário para investigação, os alunos são responsáveis pelo processo.

Então, o exemplo da translação de figuras é um cenário para investigação? Talvez sim, talvez não, pois o cenário somente torna-se um cenário para investigação se os alunos aceitam o convite. Ser um cenário para investigação é uma propriedade relacional. A aceitação do convite depende de sua natureza (a possibilidade de explorar e explicar propriedades matemáticas de uma tabela de números pode não ser atractiva para muitos alunos), depende do professor (um convite pode ser feito de muitas maneiras e para alguns alunos um convite do professor pode soar como um comando), e depende, certamente, dos alunos (no momento, eles podem ter outras prioridades). O que pode servir perfeitamente como um cenário para investigação a um grupo de alunos numa situação particular pode não representar um convite para um outro grupo de alunos. Se um certo cenário pode dar suporte a uma abordagem de investigação ou não é uma questão empírica que pode ser respondida através da prática dos professores e alunos envolvidos.

4. Ambientes de aprendizagem

As práticas de sala de aula baseadas num cenário para investigação diferem fortemente das baseadas em exercícios. A distinção entre elas pode ser combinada com uma distinção diferente, a que tem a ver com as “referências” que visam levar os estudantes a produzirem significados para conceitos e actividades matemáticas.

Em Filosofia, muitos esforços têm sido realizados para clarificar a noção de significado em termos de referências. Esses esforços têm inspirado educadores matemáticos a discutirem significado no tocante às referências possíveis dos conceitos matemáticos. Por exemplo, a ideia de fracção pode ser introduzida através da ideia de divisão de pizzas e, mais tarde, o significado de “fracção” pode ser desenvolvido pela introdução de outros conjuntos de referências. Portanto, o significado também pode ser visto, primeiramente, como um característica das acções e não somente como uma característica dos conceitos. Em minha interpretação, as referências também incluem os motivos das acções; em outras palavras, incluem o contexto para localizar o objectivo de uma acção (realizada pelo aluno na sala de aula de Matemática). Quando, no que se segue, falo sobre os diferentes tipos de referência, estarei geralmente aludindo à produção de significado na educação matemática⁶.

Diferentes tipos de referência são possíveis. Primeiro, questões e actividades matemáticas podem se referir à matemática e somente a ela. Segundo, é possível se referir a uma semi-realidade; não se trata de uma realidade que “de facto” observamos, mas uma realidade construída, por exemplo, por um autor de um livro didáctico de Matemática⁷. Finalmente, alunos e professores podem trabalhar com tarefas com referências a situações da vida real.

Combinando a distinção entre os três tipos de referência e a distinção entre dois paradigmas de práticas de sala de aula, obtém-se uma matriz com seis tipos diferentes de ambientes de aprendizagem (Figura 5). Mais adiante, tentarei esclarecer o que entendo por cada ambiente de aprendizagem, comentando sobre os diferentes tipos sugeridos pela matriz.

⁶ Para uma análise da produção de significado em educação matemática, ver Lins (no prelo).

⁷ Christiansen (1997) refere-se à “realidade virtual” como uma realidade que é estabelecida pelo exercício matemático. Uso a noção de “semi-realidade” de uma forma similar.

	Exercícios	Cenário para Investigação
Referências à matemática pura	(1)	(2)
Referências à semi-realidade	(3)	(4)
Referências à realidade	(5)	(6)

Figura 5 - Ambientes de aprendizagem

O ambiente tipo (1) é aquele dominado por exercícios apresentados no contexto da “matemática pura”, os quais podem ser da seguinte forma:

$$(27a - 14b) + (23a + 5b) - 11a =$$

$$(16 \times 25) - (18 \times 23) =$$

$$(32 \times 41) - (34 \times 39) =$$

O tipo (2) é caracterizado como um ambiente que envolve números e figuras geométricas. O exemplo introdutório da translação de figuras geométricas numa tabela de números ilustra esse tipo de ambiente.

O ambiente tipo (3) é constituído por exercícios com referências à semi-realidade. A natureza desse ambiente pode ser ilustrada pelo seguinte exemplo:

Um feirante A vende maçãs a 0,85 € o kg. Por sua vez, o feirante B vende 1,2 kg por 1,00 €. (a) Que feirante vende mais barato? (b) Qual é a diferença entre os preços cobrados pelos dois feirantes por 15 kg de maçãs?

Certamente, fala-se de maçãs, compras e preços. Mas não acredito que a pessoa que construiu esse exercício tenha feito alguma investigação empírica sobre a maneira como as maçãs são vendidas ou tenha entrevistado alguém de modo a descobrir as circunstâncias em que seria relevante comprar 15 kg de maçãs. A situação é artificial. O exercício está localizado numa semi-realidade. O exemplo é tomado do livro de Dowling, *The sociology of mathematics education: Mathematical myths/pedagogical texts*, no qual ele descreve os “mitos de referências”. Certamente, é um mito que um exercício como esse se refere a alguma realidade. Mas, na minha compreensão, há uma referência: a semi-realidade imaginada pelo autor do problema.

A semi-realidade pode ser uma referência que oferece suporte para alguns alunos na resolução de problema. Portanto, a prática da educação matemática tem estabelecido padrões

específicos como operar numa dada semi-realidade. Se, por exemplo, um aluno pergunta ao professor sobre a distância entre as lojas e a casa da pessoa que vai comprar as maçãs; e se o aluno desejar descobrir que distância é possível carregar uma sacola de 15 kg, fazendo um experimento no pátio da escola; e ainda, se o aluno pergunta se ambas as lojas possuem serviço de entrega a domicílio ou não; e se podemos considerar a qualidade das maçãs das duas lojas como sendo a mesma, nesse caso, o professor provavelmente considerará que o aluno está tentando obstruir a aula de matemática.

Certamente, essas questões geram obstrução, considerando o “acordo” geral entre o professor e os alunos para operar no paradigma do exercício. Resolver exercícios com referência a uma semi-realidade é uma competência muito complexa e é baseada num contrato bem especificado entre professor e alunos. Alguns dos princípios desse acordo são os seguintes: a semi-realidade é totalmente descrita pelo texto do exercício; nenhuma outra informação é relevante para a resolução do exercício; mais informações são totalmente irrelevantes; o único propósito de apresentar o exercício é resolvê-lo. Uma semi-realidade é um mundo sem impressões dos sentidos (perguntar pelo gosto das maçãs está fora de questão), de modo que somente as quantidades medidas são relevantes. Além disso, toda informação quantitativa é exacta; a negociação do preço ou compra de, vamos dizer, um pouco menos do que 15 kg de maçãs é destituída de sentido. A combinação da exactidão das medidas com o pressuposto de que a semi-realidade é completamente descrita pelas informações fornecidas torna possível sustentar o pressuposto de que há somente uma resposta correcta. A metafísica da semi-realidade assegura que esse pressuposto pode ser mantido, não somente quando a referência é exclusivamente para números e figuras geométricas, mas também quando são “compras”, “maçãs”, “quilogramas”, “preços”, “distâncias” bem como outras entidades empíricas parecidas⁸. Em particular, essa metafísica tem estruturado a comunicação entre professor e alunos.

As observações acerca da maneira como a matemática opera em situações da vida real não têm sido consideradas na elaboração de exercícios do tipo (3). Mas, recentemente, estudos muito mais cuidadosos de práticas matemáticas em diferentes situações de trabalho têm sido desenvolvidos⁹. Exercícios baseados na vida real oferecem um ambiente de aprendizagem do tipo (5). Por exemplo, diagramas representando o desemprego podem ser

⁸ Se não for reconhecido que a maneira que a matemática se enquadra na semi-realidade não tem nada a ver com a relação entre matemática e realidade, então a ideologia da certeza encontra seu lugar. Para uma discussão sobre a ideologia da certeza, veja Borba e Skovsmose (1997).

⁹ Veja, por exemplo, Wedege (1999).

apresentados como parte do exercício, e, com base neles, podem ser elaboradas questões sobre períodos de tempo, países diferentes, etc.¹⁰. Todos os diagramas utilizados vêm da vida real, oferecendo uma condição diferente para a comunicação entre o professor e os alunos, uma vez que agora faz sentido questionar e suplementar a informação dada pelo exercício. Entretanto, as actividades estão ainda estabelecidas no paradigma do exercício.

Como o ambiente (3), o ambiente (4) também contém referências a uma semi-realidade, mas agora ela não é usada como um recurso para a produção de exercícios: é um convite para que os alunos façam explorações e explicações. Uma “corrida de grandes cavalos” pode servir como exemplo. A pista de corrida é desenhada na lousa e onze cavalos – 2, 3, 4,..., 12 – estão prontos para iniciar. Dois dados são jogados; a partir da soma dos números tirados, marca-se uma cruz no diagrama. Como mostra a Figura 6, a soma 6 apareceu três vezes, mais vezes que as outras somas. O cavalo 6, portanto, tornou-se o grande vencedor, seguido pelos cavalos 7 e 10.

			X							
			X	X			X			
X	X		X	X	X	X	X		X	
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	2

Figura 6 - O terreno da corrida de cavalos

Essa corrida de cavalos pode ser desenvolvida na direcção de uma grande actividade de sala de aula. Imagine que estamos com crianças em torno de 11 anos. Duas agências de apostadores organizam-se na sala de aula. Um pequeno grupo de alunos controla cada agência. Independente das outras, as agências anunciam os prémios. O resto da classe, jogadores muito ricos, faz suas apostas: “Veja, a agência A paga de volta 8 vezes pelo cavalo número 9. Mas veja a agência B! Eles pagam 40 vezes pelo cavalo número 10!” As apostas precisam ser feitas logo, pois a próxima corrida está para começar. Um outro grupo de crianças, que está cuidando da corrida, toca o sino e a sala de aula fica em silêncio. Os dados são jogados, as somas são calculadas, as cruces são feitas e os cavalos correm pelas linhas. Alguns apostadores mostram grandes sorrisos.

¹⁰ Veja, por exemplo, Frankenstein (1989) para exercícios desse tipo.

A agência A tem poucos clientes. Seus prêmios parecem menos favoráveis do que os oferecidos pela agência B. De qualquer modo, uma nova corrida está para começar. Novos prêmios são apresentados. Os apostadores estão surpresos: “Que maravilhosos prêmios a agência A está oferecendo agora!” Novos prêmios, novas corridas, novos ganhadores, novos perdedores. Os cavalos não são mais anônimos e o número 2 é chamado de tartaruga. Repentinamente, uma agência perde toda sua fortuna. De qualquer modo, um novo milionário monta uma nova agência.

O professor sugere que está no momento de uma corrida mais longa. Até agora, as corridas tiveram o comprimento de 3 casas, mas esta seria de pelo menos 5 casas. As agências lançam seus prêmios. Alguns dos jogadores colocam chapéus de papel. Após a segunda corrida, alguns dos jogadores querem saber: O cavalo número 7 seria um bom candidato para uma corrida de longa distância?

Depois de várias corridas, não há cheiro de cavalos na sala de aula. A grande corrida de cavalos está acontecendo numa semi-realidade, mas não no paradigma do exercício. E as muitas observações sobre as habilidades dos diferentes cavalos (o cavalo número 11 precisa de algumas pílulas de vitamina) não são percebidas como obstruções. A lógica estrita que governa a semi-realidade do ambiente de aprendizagem número (3) não está em operação. A actividade toda está localizada num cenário para investigação. Muitas descobertas estão esperando as crianças. Estratégias estão para ser produzidas e aperfeiçoadas. E, uma vez que essa actividade foi escolhida para ser descrita, o aluno certamente aceitou o convite para participar da grande corrida de cavalos.

5. Um outro exemplo

Naturalmente, é possível desenvolver cenários para investigação envolvendo um grau maior de realidade do que a grande corrida de cavalos. Em *Towards a philosophy of critical mathematics education*, discuto alguns exemplos organizados como trabalho de projeto, os quais podem ilustrar o ambiente de aprendizagem (6).

O projeto “Energia” concentrou-se sobre o *input-output* de energia. Como introdução, os estudantes calcularam a quantidade de energia em certos tipos de pequeno almoço (a energia foi medida em kJ). Então, usando fórmulas oriundas de pesquisas sobre desporto, foi calculada a quantidade de energia gasta durante uma determinada viagem de bicicleta. As fórmulas expressavam o uso da energia em função de parâmetros diferentes como velocidade,

tipo de bicicleta e “área frontal” do ciclista. Como medir essa área? Os estudantes desenvolveram um método e concluíram seus cálculos. Dessa forma, eles foram introduzidos à ideia de fazer um modelo de *input-output* para energia.

Depois disso, o projecto concentrou-se nos modelos de *input-output* na agricultura. Os estudantes investigaram uma fazenda relativamente próxima da escola. Primeiro, calculou-se a quantidade de energia em termos, por exemplo, da gasolina usada na preparação de um certo campo durante um ano. No celeiro, os alunos ouviram do agricultor explicações sobre os métodos de preparação do campo. Depois, eles mediram a largura dos diferentes instrumentos – o arado, a colheitadeira, etc. – e, com isso, estimaram quantos quilómetros o agricultor tem que dirigir o tractor anualmente na preparação do campo. No campo pesquisado, a cevada estava crescendo e foi calculada a quantidade de energia que havia na cevada colhida. Para esses cálculos, usaram-se informações estatísticas trazidas da agronomia e de outras áreas. De acordo com os cálculos dos alunos, o diagrama *input-output* estava bastante lucrativo: a cevada colhida tinha seis vezes mais energia do que a energia usada no campo; isso porque o Sol é um grande fornecedor de energia. O resultado pôde ser comparado com as estatísticas oficiais da Dinamarca, que revelaram um factor um pouco menor (um motivo para isto é que os alunos não consideraram todos os tipos relevantes de transporte necessários para gerir a fazenda).

Nessa fazenda, a cevada era usada como alimento para os porcos e, assim, os alunos puderam montar um novo modelo *input-output*. Eles recolheram informações sobre a quantidade de porcos que estava comendo cevada em relação aos seus pesos e sobre o tempo necessário para serem levados para o matadouro. O factor foi calculado em torno de 0,2; somente um quinto de energia contida na comida fornecida aos porcos estava na carne. A produção de carne, portanto, parece ser uma actividade económica ruim do ponto de vista da energia.

Essas conclusões são características somente da fazenda escolhida? Os resultados dos alunos foram muito similares aos relatados nas estatísticas oficiais sobre a agricultura dinamarquesa. Do ponto de vista da energia, a transformação de cevada em carne tem um custo muito alto. Nesse sentido, as investigações dos alunos tornaram-se exemplares, o que é um elemento essencial no trabalho de projecto. A discussão pode ser levada adiante. A agricultura dinamarquesa está fazendo coisas erradas do ponto de vista da energia? Não necessariamente. Conforme apontam as estatísticas, a agricultura norte-americana está em situação mais negativa em relação à problemática do gasto de energia.

O projecto apresenta aspectos diferentes do ambiente de aprendizagem (6). As referências são reais, tornando possível aos alunos produzirem diferentes significados para as actividades (e não somente os conceitos). Os alunos fazem cálculos relacionados a fazenda real. Isso quer dizer que são eliminadas as autoridades que exercem seu poder no paradigma do exercício. O pressuposto de que há uma, e somente uma, resposta correcta não mais faz sentido. Livros didácticos podem descansar seguramente no canto da sala de aula à medida que um projecto desse tipo é desenvolvido. O professor tem o papel de orientar. Novas discussões baseadas em investigação sempre surgem: Como calcular a área frontal de um ciclista? O problema agora é a montagem de modelos para os cálculos de *input-output*, o que torna importante reflectir sobre os resultados dos cálculos. Eles são confiáveis? Considerámos os factores relevantes? Bem, podemos comparar com as estatísticas oficiais. Mas qual desses resultados é o correcto? A reflexão crítica sobre matemática e modelação matemática ganha um novo significado.

Na Dinamarca, o currículo oficial não é um obstáculo para os alunos e os professores trabalhem no ambiente de aprendizagem (6). Não há exames após cada ano escolar para decidir se os alunos são aprovados ou não. Neste país a passagem de ano é automática. Somente após o 9º ano, os alunos fazem um exame nacional em matemática, em que todos passarão independente das notas que tirarem. Esse exame inclui uma abordagem de investigação, em sua parte escrita, que não pressupõe nenhum conhecimento memorizado e, em sua parte oral, concentra-se sobre grupos de alunos, fazendo investigações matemáticas. Apesar disso, o paradigma do exercício também tem um forte apoio neste canto do mundo.

6. Movendo-se entre diferentes ambientes de aprendizagem

Naturalmente, a matriz da Figura 5 representa uma simplificação. A linha vertical que separa o paradigma do exercício dos cenários para investigação é, por certo, um linha muito “espessa”, simbolizando um terreno imenso de possibilidades. Alguns exercícios podem provocar actividades de resolução de problemas, as quais poderiam transformar-se em genuínas investigações matemáticas. Propor problemas significa um passo adiante em direcção aos cenários para investigação, embora actividades de formulação de problemas possam ser muito diferentes de um trabalho de projecto. Não há dúvida de que as linhas horizontais também são “fluidas”. Não pretendo tentar oferecer uma classificação claramente

determinada, mas elaborar uma noção de ambientes de aprendizagem tendo em vista facilitar as discussões sobre mudanças na educação matemática.

Uma boa parte da educação matemática está alternando os ambientes (1) e (3). Nesse sentido, o paradigma do exercício oferece uma fundamentação assente na “tradição” da educação matemática. Muitos estudos em educação matemática têm revelado um quadro desolador sobre o que acontece na sala de aula tradicional. Muitos desses estudos, todavia, não reconhecem que existem outros possíveis ambientes de aprendizagem e que seus dados estão ligados a uma organização particular da sala de aula de matemática, a que é típica¹¹. Uma diferenciação entre a “tradição da matemática escolar” e a “tradição da matemática investigativa” tem sido sugerida por Richards (1991), o que está em consonância com a matriz. O exercício é parte do que define a tradição da matemática escolar.

Na Dinamarca, o ambiente de aprendizagem tipo (6) tem desafiado a tradição da matemática escolar. Porém, acho importante que os desafios sejam organizados em termos dos ambientes de aprendizagem de tipos (2) e (4) bem como do (6). Não pretendo defender que o ambiente (6) seja a única alternativa ao paradigma do exercício. De fato, não quero sugerir que um ambiente de aprendizagem particular represente o objectivo último para a educação matemática, crítica ou não.

Sustento que a educação matemática deve mover-se entre os diferentes ambientes tal como apresentado na matriz. Particularmente, não considero a ideia de abandonar por completo os exercícios da educação matemática. Poderia fazer sentido, por exemplo, após a grande corrida de cavalos, usar um período para “consolidar” o que os alunos trabalharam por meio de exercícios relacionados com a noção de probabilidade. É importante que os alunos e professores, juntos, achem seus percursos entre os diferentes ambientes de aprendizagem. A rota “óptima” não pode ser determinada apressadamente, mas tem que ser decidida pelos alunos e pelo professor. A matriz dos ambientes de aprendizagem pode também ser usada como um instrumento analítico. Por exemplo, é possível que alunos e professor considerem a rota seguida no último ano: Que ambientes de aprendizagem experimentamos? Gastámos todo o tempo com um ou dois ambientes? Em que ambiente tivemos experiências com mais sucesso? Algum movimento de um ambiente para outro causou dificuldade? Muitas considerações de planeamento podem ser relacionadas à matriz.

Há muito tempo, participei de um projecto matemático envolvendo crianças com cerca de 7 anos. O principal objectivo do projecto era planear e construir um parque infantil fora da

¹¹ Veja, por exemplo, Walkerdine (1988).

sala de aula, num lugar onde havia um pequeno terreno disponível para a classe. Certamente, essa actividade se enquadrou no ambiente de aprendizagem tipo (6), e, como um dos resultados do projecto, foi construído um pequeno parque infantil fora da sala de aula com a ajuda dos pais durante alguns finais de semana. Antes disso, porém, muitas actividades foram desenvolvidas. Inicialmente, as crianças visitaram outros parques infantis para testar o que seria um “bom” brinquedo. Crianças de 7 anos são especialistas em fazer esse tipo de teste. Entretanto, mais difícil foi especificar a qualidade exacta de um bom parque infantil. Qual é a altura dos baloiços? Quanta areia é necessária? Muitas coisas precisavam ser medidas; e, para não esquecer essas medidas, tornou-se importante anotá-las. Não é uma tarefa fácil!

Esses períodos de actividade intensa foram muito frutíferos e importantes, mas outros tipos de actividade mais tranquilas são importantes tanto para o professor quanto para os alunos. Como parte do projecto do parque infantil (que levou alguns meses), foram organizados períodos de “trabalho de escritório”, os quais pareciam de facto um passeio ao ambiente de aprendizagem do tipo (1). As crianças eram organizadas em pequenos grupos trabalhando em seus escritórios. Como em qualquer escritório colectivo, conversa-se “baixinho”. Os alunos colocaram copos plásticos com sumo ou limonada sobre suas mesas de modo que, por algum toque mágico, pareciam mesas de escritório de verdade. Às vezes, os trabalhadores do escritório comiam um biscoito enquanto estavam somando números. Às vezes, o rádio tocava uma música leve. Às vezes, o professor tocava violão. Os papéis espalhados ao redor das mesas continham os exercícios sobre adição e subtracção. O ponto é que as crianças, durante os períodos interinos de trabalho do projecto, reconheceram a importância de serem capazes de somar números correctamente. Durante as horas de escritório, esse tipo de habilidade podia ser consolidada e as razões para essa tarefa foram compreendidas nos períodos prévios do trabalho de projecto. A posição de “trabalho de escritório” quebrou o padrão normal do paradigma do exercício, embora a actividade fosse desenvolvida no tipo (1). Isso ilustra que a rota entre os diferentes ambientes pode ajudar a dar novos significados às actividades dos alunos. O trabalho de escritório não ocorreu numa atmosfera da tradição da matemática escolar, ainda que tenha acontecido no paradigma do exercício. Particularmente, a comunicação entre o professor e os alunos no escritório não foi governada pela mesma lógica que a comunicação entre o professor e os alunos na tradição da matemática escolar¹².

¹² Para uma discussão sobre comunicação na sala de aula de Matemática, ver Alro e Skovsmose (1996a, 1996b, 1998).

A consolidação propiciada pelo trabalho de escritório serve também como uma preparação para o envolvimento num novo projecto. Criar uma harmonia entre o trabalho de projecto e as actividades da sala de aula tem sido o grande desafio para a educação matemática baseada em projectos (não importa se estamos tratando de projectos num curso universitário ou em escolas).

Às vezes, em discussões com professores, tem sido sugerido que, antes de os alunos se envolverem com investigação em algum ambiente, eles devem compreender algumas técnicas que podem, mais eficientemente, ser produzidas dentro do paradigma do exercício. A grande corrida de cavalo ilustra por que, em minha opinião, isso geralmente não é adequado. Suponhamos que as crianças, antes da corrida, tenham sido introduzidas a algumas noções de probabilidade através do diagrama canónico: o número tirado no dado vermelho é mostrado no eixo x; o número tirado no dado azul é mostrado no eixo y, e a soma... então, o jogo poderia perder o fascínio. Portanto, uma rota oposta é relevante em muitos casos, isto é, a rota de (4) para (3). Uma vez que o jogo tenha sido experimentado e as crianças tenham ganho familiaridade com as características dos diferentes cavalos, obtendo confiança nas vantagens, então os alunos e o professor podem fazer observações específicas e encontrar explicações. E os exercícios podem ser usados como um meio para fixar algumas experiências.

7. A zona de risco

A investigação francesa em educação matemática tem dado muita atenção à noção de “contrato didáctico”¹³. Com relação à noção de ambiente de aprendizagem, um contrato didáctico pode ser definido em termos do “equilíbrio no ambiente de aprendizagem”. Assim, um contrato didáctico refere-se à harmonia entre os parâmetros do ambiente de aprendizagem, isto é, uma harmonia entre a maneira como o significado é produzido, as tarefas são organizadas, o livro didáctico é estruturado, a comunicação é desenvolvida, etc. A essa harmonia deve ser reconhecida e aceite tanto pelo professor quanto pelos alunos. O facto do contrato didáctico estar estabelecido não revela muito sobre a qualidade do ambiente de aprendizagem. Mas, antes de tudo, indica que o professor e os alunos compartilham a mesma compreensão e aceitação das prioridades do ambiente de aprendizagem. A interacção entre eles não é problemática até onde ambas as partes reconhecem o contrato.

¹³ Veja, por exemplo, Brousseau (1997).

Um contrato didático pode ser quebrado de muitas maneiras como, por exemplo, quando alunos começam a questionar detalhes de uma semi-realidade, conforme a descrição anterior. O contrato pode ser quebrado se a avaliação é drasticamente mudada. Em geral, melhorias na educação matemática estão intimamente ligadas à quebra de contrato. Quando, inicialmente, sugeri desafiar o paradigma do exercício, isso pode ser visto também como uma sugestão de quebrar o contrato da tradição da matemática escolar.

Da perspectiva dos professores, isso pode parecer o movimento de uma zona de conforto para um zona de risco. Essa noção tem sido introduzida por Penteado (manuscrito) em seu estudo sobre as experiências do professor num novo meio de aprendizagem onde os computadores representam um papel crucial¹⁴. O movimento entre os diferentes ambientes possíveis de aprendizagem e a ênfase especial no cenário para investigação causarão um grau elevado de incerteza. A meu ver, a incerteza não deve ser eliminada. O desafio é enfrentá-la.

Os computadores na educação matemática têm ajudado a estabelecer novos cenários para investigação (embora alguns programas fechados tentem eliminar incertezas, ajustando as actividades ao paradigma do exercício)¹⁵. O computador desafiará a autoridade do professor (tradicional) de matemática. Alunos trabalhando com, por exemplo, geometria dinâmica facilmente encontram possíveis situações e experiências que os professores não previram ao planearem a aula. Um clique no rato pode rapidamente conduzir a uma parte desconhecida do programa: O que fazer agora? Como sair daqui? O professor deve estar sempre pronto para enfrentar perguntas que podem não ser facilmente respondidas. A autoridade do professor tradicional está para ser quebrada dentro de segundos; e ninguém sabe sobre o próximo momento. Certamente, nem o professor. Uma razão epistemológica para isso é que o computador não é simplesmente um instrumento que estende nossa maneira de pensar; em vez disso, como descreve Borba (1999), os computadores reorganizam nosso pensamento. A reorganização pode influenciar muitas coisas, em particular a forma como o significado é produzido. Portanto, a ideia completa de “reorganização” liga-se fortemente à ideia de “zona de risco”.

Quando os alunos estão explorando um cenário, o professor não pode prever que questões vão aparecer. Uma forma de eliminar o risco é o professor tentar guiar todos de volta ao paradigma do exercício, à zona do conforto. Então, a exploração completa das figuras geométricas transladáveis na tabela de números poderia ser re-organizada como uma sequência de exercícios. E, em vez de permitir os alunos explorarem o programa de geometria

¹⁴ Veja também Penteado, 1999.

dinâmica, o professor poderia especificar cada passo a ser tomado: “Primeiro, você selecciona um ponto. OK, todos fizeram isto! Esse ponto chamaremos de A. Então você deve seleccionar um outro ponto. Este chamaremos de B...” Através da reorganização das actividades em sequência, o professor pode conduzir todos os alunos da sala de aula a terem quase a mesma figura sobre as telas dos computadores. Dessa forma, à medida que os alunos estão operando os passos, o professor pode prever a ocorrência de eventos e desafios. Porém, fazendo assim, muitas oportunidades de aprendizagem são também perdidas.

Qualquer cenário para investigação coloca desafios para o professor. A solução não é voltar para a zona de conforto do paradigma do exercício, mas ser hábil para actuar no novo ambiente. A tarefa é tornar possível que os alunos e o professor sejam capazes de intervir em cooperação dentro da zona de risco, fazendo dessa uma actividade produtiva e não uma experiência ameaçadora. Isso significa, por exemplo, a aceitação de questões do tipo “o que acontece se...”, que possam levar a investigação para um território desconhecido. De acordo com a pesquisa de Penteadó, uma condição importante para os professores se sentirem capazes de trabalhar na zona de risco é o estabelecimento de novas formas de trabalho colaborativo, em particular, entre os professores, mas também juntamente com alunos, pais, professores e pesquisadores.

Portanto, por que se preocupar com o trabalho na zona de risco? Por que não aceitar simplesmente o contrato didáctico da tradição da matemática escolar, o qual tem sido cuidadosamente elaborado? Cobb e Yackel referem-se à “autonomia intelectual” como um objectivo explicitamente declarado para seus esforços em estabelecer uma tradição da matemática investigativa em contraste com a tradição da matemática escolar. A autonomia intelectual é caracterizada *em termos da consciência e da disposição dos alunos para recorrer às suas próprias capacidades intelectuais quando envolvidos em decisões e julgamentos matemáticos* (Cobb e Yackel, 1998, p. 170). A autonomia intelectual pode ser associada a actividades de exploração e explicação tais como nos cenários para investigação. É difícil ver essa autonomia enraizada nas regras de comportamento que operam numa semi-realidade do ambiente (3). Em particular, deixar a “zona de risco” também significa eliminar oportunidades de aprendizagem associadas à ideia de computadores como re-organizadores.

Fazer um movimento na matriz da Figura 5 do paradigma do exercício em direcção aos cenários para investigação pode contribuir para o abandono das autoridades da sala de aula de matemática tradicional e levar os alunos a agirem em seus processos de

¹⁵ Veja, por exemplo, Borba (1995).

aprendizagem. No livro *Towards a philosophy of critical mathematics education*, discuto aprendizagem como ação e enfatizo a importância de estabelecer as intenções dos alunos como os elementos que dirigem o processo de aprendizagem. Um sujeito crítico tem que ser um sujeito que age.

Estudos de sala de aula que usam problemas do mundo real como ponto de partida para considerações matemáticas levaram Voigt a fazer a seguinte afirmação:

Como cidadãos do futuro, alunos terão que enfrentar muitos problemas do mundo real que parecem não ser matematicamente claros... O cidadão é competente para distinguir entre inferências matemáticas necessárias e os pressupostos de modelagem dependentes de interesses? Pode-se esperar que colocar mais atenção na qualidade da negociação do significado matemático na sala de aula pode melhorar a educação do “leigo competente”. (1998: p. 195)

Certamente, compartilho dessa visão.

Realizar um movimento, na matriz da Figura 5, das referências à matemática pura para as referências da vida real pode ajudar a oferecer recursos para reflexões sobre a matemática¹⁶. *Towards a philosophy of critical mathematics education* contém uma especificação de elementos de uma crítica da modelação matemática como sendo essencial para o desenvolvimento da competência chamada *materacia*. Referências à vida real parecem ser necessárias para estabelecer uma reflexão detalhada sobre a maneira como a matemática pode estar operando enquanto parte de nossa sociedade. Um sujeito crítico, é também um sujeito reflexivo.

De que modo desenvolver uma educação matemática como parte das nossas preocupações com a democracia numa sociedade estruturada por tecnologias que incluem a matemática como um elemento estruturante?¹⁷ De que maneira desenvolver uma educação matemática que não torne opaca a introdução dos alunos ao pensamento matemático, mas que os leve a reconhecerem suas próprias capacidades matemáticas e a consciência da forma pela qual a matemática opera em certas estruturas tecnológicas, militares, económicas e políticas? Nunca ousarei afirmar que o abandono do paradigma do exercício para explorar cenários para investigação forneceria uma resposta para essas questões. Nem afirmaria que é suficiente construir uma educação matemática baseada somente em referências à vida real. Minha expectativa é que a busca de um caminho entre os diferentes ambientes de aprendizagem

¹⁶ Veja também Cobb, Boufi, McClain e Whitenack (1997).

¹⁷ Veja, por exemplo, Skovsmose (1998b), Skovsmose e Valero (1999), Valero (1999), Vithal (1999, 2000) e Volmink (1994).

possa oferecer novos recursos para levar os alunos a agir e reflectir e, dessa maneira, oferecer uma educação matemática de dimensão crítica.

Agradecimentos

Este estudo sobre cenários para investigação tem sido desenvolvido como parte de um investigação iniciada no *Centre for Research in Learning Mathematics*, Dinamarca e baseia-se em Skovsmose (1999a). Este artigo foi apresentado na Reunião Anual da American Educational Research Association (AERA), New Orleans, 24-28 de Abril de 2000. Gostaria de apresentar meus agradecimentos a Helle Alro, Morten Blomhoj, Gunnar Bomann, Herining Bodtkjer, Arrie Astrup Jutil, Miriam Penteadó, Mikael Skánstrom e Paola Valero por seus comentários críticos e suas sugestões para clarificar os “cenários para investigação”.

Bibliografia

- Alro, H., & Skovsmose, O. (1996a). On the right track. *For the Learning of Mathematics*, 16(1), 2-9 e 22.
- Alro, H., & Skovsmose, O. (1996b). The students' good reasons. *For the Learning of Mathematics*, 16(3), 31-38.
- Alro, H., & Skovsmose, O. (1998). That was not the intention! Communication in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 18(2), 42-51.
- Borba, M. C. (1995). Graphic calculators, functions and reorganization of the classroom. In M. C. Borba, T. Souza, B. Hudson, & J. Fey (Eds.), *The role of technology in the mathematics classroom: Proceedings of WG 16, ICME 8*. Rio Claro: UNESP - State University of São Paulo.
- Borba, M. C. (1999). Tecnologias informáticas na educação matemática e reorganização do pensamento. In M. A. V. Bicudo (Ed.), *Pesquisa em educação matemática: Conceções e perspectivas* (pp. 285-295). São Paulo: Editora da UNESP.
- Borba, M., & Skovsmose, O. (1997). The ideology of certainty. *For the Learning of Mathematics*, 17(3), 17-23.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970-1990* (editado e traduzido por N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield). Dordrecht: Kluwer.
- Christiansen, I. M. (1997). When negotiation of meaning is also negotiation of task. *Educational Studies in Mathematics*, 34(1), 1-25.
- Cobb, P., Boufi, A., McClain, K., & Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research in Mathematics Education*, 8(3), 258-277.
- Cobb, P., & Yackel, E. (1998). A constructivist perspective on the culture of the mathematics classroom. In F. Seeger, J. Voigt., & U. Waschescio (Eds.), *The culture of the mathematics classroom* (pp. 158-190). Cambridge: Cambridge University Press.
- Cotton, T. (1998). Towards a mathematics education for social justice. [s.i.] (thesis, Ph.D).

- D'Ambrosio, U. (1994). Cultural framing of mathematics teaching and learning. In R. Biebler, R. W. Scholz, R. Strässer, & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 443-455). Dordrecht: Kluwer.
- D'Ambrosio, U. (1998). Mathematics and peace: Our responsibilities. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 98(3), 67-73.
- Dowling, P. (1998). *The sociology of mathematics education: Mathematical myths/pedagogic texts*. London: Falmer.
- Frankenstein, M. (1989). *Relearning mathematics: A different r – radical maths*. London: Free Association Books.
- Kranzberg, M. (1997). Technology and history: “Kranzberg’s Laws”. In T. S. Reynolds & S. H. Cutcliffé (Eds.), *Technology and the West: A historical anthology from technology, and culture* (pp. 5-20). Chicago, IL: University of Chigago Press.
- Lins, R. (no prelo) The production of meaning for algebra: A perspective based on a theoretical model of semantic fields. In R. Lins, T. Rojano, A. Bell, & R. Sutherland (Eds.), *Perspectives on school algebra*. Dordrecht: Kluwer.
- Nielsen, L., Patronis, T., & Skovsmose, O. (1999). *Connecting corners of Europe: A Greek-Danish project in mathematics education*. Århus: Systime.
- Penteado, M. G. (1999). Novos atores, novos cenários: Discutindo a inserção dos computadores na profissão docente. In M. A. V. Bicudo (Ed.), *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas* (pp. 297-313). São Paulo: Editora UNESP.
- Penteado, M. G. (s.d.). *Risk zone: Introduction of computers into teachers’ practice*. Depto. de Matemática, UNESP, Rio Claro (manuscrito).
- Powell, A., & Frankenstein, M. (Eds.) (1997). *Ethnomathematics: Challenging Eurocentrism in mathematics education*. Albany, NY: State University of New York Press.
- Richards, J. (1991). Mathematical discussion. In E. von Glasersfeld (Ed.). *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 13-52). Dordrecht: Kluwer.
- Skovsmose, O. (1994). *Towards a philosophy of critical mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.
- Skovsmose, O. (1999a). Aporism: Uncertainty about mathematics. *Zentralblattfür Didaktik der Mathematik*, 98(3), 88-94.
- Skovsmose, O. (1998b). Linking mathematics education and democracy: Citizenship, mathematics archaeology, mathemacy and deliberative interaction. *Zentralblatt für Didaktik der Matlzematik*, 98(6), 195-203.
- Skovsmose, O. (1999a). ‘Undersogelseslandskaber’. Centre for Research in Learning Mathematics, Royal Danish School of Educational Studies, Roskilde University Centre, Aalborg University.
- Skovsmose, O. (1999b). *Mathematical agency and social theorising*. Centre for Research in Learning Mathematics, Royal Danish School of Educational Studies, Roskilde University Centre, Aalborg University.
- Skovsmose, O. (no prelo). Aphorism and critical mathematics education. *For the Learning of Mathematics*.

- Skovsmose, O., & Nielsen, L. (1996). Critical mathematics education. In A. Bishop et al. (Ed.) *International handbook of mathematics education* (pp. 1257-1288). Dordrecht: Kluwer.
- Skovsmose, O., & Valero, P. (1999). *Breaking political neutrality: The critical engagement of mathematics education with democracy*. Centre for Research in Learning Mathematics, Royal Danish School of Educational Studies, Roskilde University Centre, Aalborg University.
- Valero, P. (1999). Deliberative mathematics education for social democratization in Latin America. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 98(6), 20-26.
- Vithal, R. (1999). Democracy and authority: A complementarity in mathematics education? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 98(6), 27-36.
- Vithal, R. (2000). *In search of a pedagogy, of conflict and dialogue for mathematics education*. Aalborg: Aalborg University.
- Vithal, R., Christiansen, I. M., & Skovsmose, O. (1995). Project work in university mathematics education: A Danish experience: Aalborg University. *Educational Studies in Mathematics*, 29, 199-223.
- Voigt, J. (1998). The culture of the mathematics classroom: Negotiating the mathematical meaning of empirical phenomena. In F. Seeger, J. Voigt., U. Waschescio (Eds.), *The culture of the mathematics classroom* (pp. 191-220). Cambridge: Cambridge University Press.
- Volm Ink, J. (1994). Mathematics by All. In S. Lerman (Ed.), *Cultural perspectives on the mathematics classroom* (pp.51-68). Dordrech: Kluwer.
- Walkerdine, V (1988). *The mastery of reason: Cognitive development and the production of rationality*. London: Routledge and Kegan Paul.
- Wedeg, T. (1999). *Matematikviden og teknologiske kompetencer hos kortuddannede voksne*. Roskilde: Roskilde University Centre (Ph.D. Thesis).