

A Avaliação e o Raciocínio Matemático

Sílvia Semana, Projecto AREA

Leonor Santos, DEFCUL, CIE, DIFMAT, Projecto AREA

Resumo: No âmbito do projecto AREA foi desenvolvido um estudo com o objectivo de compreender o papel do relatório escrito enquanto instrumento de avaliação reguladora das aprendizagens de alunos do 3º ciclo em Matemática, em particular, no que respeita ao raciocínio matemático. O desenvolvimento do relatório escrito foi apoiado com um guião de relatório, com a negociação de critérios de avaliação, e com feedback escrito, completado, quando necessário, por feedback oral. Os resultados deste estudo apontam para que o recurso ao guião de relatório e aos critérios de avaliação facilitam uma progressiva tomada de consciência, pelos alunos, dos objectivos a atingir. Os dois tipos de feedback fornecidos, numa acção combinada, ajudam a desenvolver a capacidade de raciocínio matemático.

Palavras-chave: Raciocínio matemático; relatório escrito; avaliação reguladora.

Abstract: In the context of Project AREA, it has been developed a study aimed to understand the role of the written report, while an assessment instrument to regulate the pupils' learning of the 10th, 11th and 12th grade in Mathematics, particularly in regard to mathematical reasoning. The development of the written report was supported with a report script, with the negotiation of assessment criteria and written feedback supplemented, when necessarily, by oral feedback. The results of this study begin to suggest that the use of guidelines report and assessment criteria make easy a progressive awareness for the pupils, of the objectives achieved. Two types of supplied feedback, in a combined action, help to develop the capacity of mathematical reasoning.

Keywords: Mathematical reasoning; written report; formative assessment.

A capacidade de raciocinar matematicamente é apontada, desde há muito, como um objectivo central do ensino e da aprendizagem da Matemática. É através do raciocínio que acedemos à compreensão de situações matemáticas, que examinamos um problema sob vários ângulos e que, analisando e estabelecendo relações, transformamos as ideias iniciais em hipóteses que dão origem à formulação de conjecturas (Dewey, 1910/1997). Assim, o raciocínio matemático envolve mais do que a compreensão de importantes ideias matemáticas e a aplicação de métodos e procedimentos úteis (Cuoco, 2003). A ele estão associadas diversas formas de pensamento igualmente importantes para todos

aqueles que fazem Matemática, como seja: prever resultados, muitas vezes essencial para a formulação de conjecturas; questionar soluções, mesmo as correctas; procurar padrões; fazer recurso a representações alternativas; analisar; sintetizar.

É igualmente reconhecida a importância do desenvolvimento, no processo de ensino e aprendizagem, de uma avaliação que tenha por principal objectivo contribuir para a regulação das aprendizagens dos alunos. Faz, portanto, todo o sentido questionarmo-nos sobre como podemos avaliar o raciocínio matemático dos alunos de modo a promovermos o desenvolvimento dessa capacidade.

O Raciocínio Matemático

Os actuais documentos curriculares de Matemática um pouco por todo o mundo, e inclusivamente em Portugal, apontam o desenvolvimento do raciocínio matemático como um objectivo central do ensino da Matemática e alertam para a necessidade de desenvolver essa capacidade nos alunos de forma consistente, recorrendo-se à sua utilização sistemática numa diversidade de contextos (NCTM, 2007; Ponte, Serrazina, Guimarães, Breda, Guimarães, Sousa, Menezes, Martins & Oliveira, 2007). Efectivamente, o documento *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (2007) destaca a importância de todos os alunos reconhecerem o raciocínio e a demonstração como aspectos fundamentais da Matemática; formularem e investigarem conjecturas matemáticas; desenvolverem e avaliarem argumentos e provas matemáticos; bem como seleccionarem e usarem diversos tipos de raciocínios e métodos de demonstração. Também o novo Programa de Matemática do Ensino Básico (2007) destaca a importância dos alunos raciocinarem matematicamente usando os conceitos, representações e procedimentos matemáticos. Nesse documento, o raciocínio matemático, além de ser concebido como um objectivo de aprendizagem central, constitui-se como uma orientação metodológica importante para o professor estruturar as actividades a desenvolver em sala de aula.

Ambos os documentos apontam o raciocínio matemático como uma capacidade fundamental, que envolve a explicação e a justificação de ideias, a formulação e o teste de conjecturas e, numa fase mais avançada, a demonstração. Os alunos devem começar, no início da escolaridade, pela justificação de passos e operações na resolução das tarefas e evoluir gradualmente para argumentações mais complexas, acabando por distinguir e apresentar generalizações, casos particulares e contra-exemplos e por

reconhecer e usar diferentes métodos de demonstração (NCTM, 2007; Ponte *et. al.*, 2007).

Naturalmente, o professor desempenha um papel importante no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Em particular, deve propor, frequentemente, a realização de actividades que exijam reflectir e raciocinar, com o intuito de ajudar os alunos a valorizar e a usar o poder do raciocínio matemático. O professor deve ainda dar atenção aos raciocínios dos alunos e procurar que eles os explicitem com clareza. Através da discussão oral na aula, os alunos podem confrontar as suas estratégias de resolução das tarefas, assim como identificar e discutir os raciocínios elaborados pelos seus colegas. Já através da escrita de textos, os alunos têm oportunidade de clarificar e elaborar de modo mais aprofundado as suas estratégias e os seus argumentos, reconhecendo a importância do rigor no uso da linguagem matemática.

Na mesma linha, a brochura *A Experiência Matemática no Ensino Básico* (2008), defende que, desde os primeiros anos de escolaridade e desde que sejam proporcionadas condições adequadas, os alunos são capazes de raciocinar matematicamente, isto é, em ambientes apropriados os alunos são “capazes de explicar e de justificar os raciocínios usados durante o processo de resolução de uma tarefa matemática, de fazer generalizações a partir da análise de casos particulares, de compreender o que significa um contra-exemplo, de reflectir sobre o que constitui um argumento aceitável e adequado quando se trabalha em Matemática e de aplicar resultados gerais a exemplos específicos” (Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008, p. 81). Para caminhar nesse sentido é fundamental proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem em que estes tenham oportunidade para explicar e justificar as suas ideias e resoluções e para formular, testar e, eventualmente, provar conjecturas. Os problemas e as investigações apresentam-se como contextos privilegiados para esse trabalho, mas meros exercícios ou acontecimentos do quotidiano da aula podem constituir-se como pretextos para o professor desafiar os alunos a argumentarem, a confrontarem e a discutirem as suas ideias. O importante é que o raciocínio matemático e, em particular a argumentação, esteja presente, de forma consistente, em qualquer tópico matemático e não fique limitado a situações esporádicas ou a determinado tema matemático (Boavida *et. al.*, 2008).

Avaliação Reguladora das Aprendizagens

As mais recentes orientações curriculares preconizam uma avaliação ao serviço das aprendizagens dos alunos, em que as formas de avaliação constituem, simultaneamente, situações de aprendizagem e as componentes reguladora e auto-reguladora ganham relevo, permitindo a implicação do aluno no processo de avaliação (Ponte *et. al*, 2007; NCTM, 2007). Neste contexto, a regulação das aprendizagens pode ser entendida como “todo o acto intencional que, agindo sobre os mecanismos de aprendizagem, contribua directamente para a progressão e/ou redireccionamento dessa aprendizagem” (Santos, 2002, p. 77). Vários estudos mostram que a implementação de uma avaliação reguladora das aprendizagens pode, de facto, melhorar o desempenho escolar dos alunos. Em particular, Black e William (1998), partindo de um trabalho de revisão de 250 estudos de todo o mundo, publicados entre 1987 e 1998, encontraram evidências de que o foco numa avaliação para a aprendizagem, por oposição a uma avaliação das aprendizagens, produz melhorias substanciais nos desempenhos dos alunos.

São vários os processos de regulação que podem ser accionados e que divergem, essencialmente, pelo papel atribuído aos alunos e ao professor no acto de regulação (Perrenoud, 1999; Santos, 2008). Santos (2002) destaca: a avaliação formativa, da responsabilidade do professor; a co-avaliação entre pares, da responsabilidade do aluno e dos seus pares; e a auto-avaliação, da responsabilidade do aluno. A avaliação formativa e a auto-avaliação merecem aqui a nossa especial atenção.

Enquanto a avaliação sumativa é exterior ao processo de ensino e aprendizagem, baseia-se nos produtos dos alunos e está associada à prestação de contas, à certificação e à selecção, a avaliação formativa debruça-se sobre os processos e a actividade dos alunos e visa a melhoria e a regulação do ensino e das aprendizagens. A legislação portuguesa¹ vigente perspectiva uma avaliação formativa com as seguintes características: (a) apresenta um carácter sistemático e contínuo; (b) recorre a diversos instrumentos de recolha de informação, dependendo da natureza e dos contextos de aprendizagem; (c) fornece informação sobre o desenvolvimento das aprendizagens e competências, permitindo melhorar os processos de trabalho. Neste contexto, a avaliação é considerada como parte integrante do processo de ensino e aprendizagem, pelo que as tarefas de avaliação propostas aos alunos são também tarefas de aprendizagem.

¹ Despacho normativo n.º 1/2005

Já a auto-avaliação é um processo interno ao próprio sujeito e apresenta-se, por isso, como uma forma de regulação privilegiada (Santos, 2002). Alguns estudos sobre auto-avaliação indicam, mesmo, que o recurso a esta forma de avaliação pode conduzir a melhorias significativas no desempenho dos alunos (NCTM, 2003). No contexto escolar, o professor desempenha um papel central neste processo, competindo-lhe implementar estratégias adequadas e propor contextos favoráveis ao desenvolvimento da capacidade de auto-avaliação dos alunos. Um abordagem positiva do erro; o questionamento oral; o *feedback* escrito; a explicitação/negociação dos critérios de avaliação; e o recurso a instrumentos alternativos de avaliação são exemplos de mecanismos que podem ser implementados pelo professor, na prática de uma avaliação formativa, com potencialidades ao nível da auto-avaliação dos alunos e, mais abrangentemente, da auto-regulação das aprendizagens (Santos, 2002).

O erro, enquanto fenómeno inerente à aprendizagem, apresenta-se como uma fonte rica de informação, cabendo ao professor compreender a sua natureza, formular hipóteses explicativas do raciocínio do aluno e orientá-lo adequadamente, para que este seja capaz de identificar e corrigir o erro. A orientação dada pelo professor não deve, por isso, incluir a identificação nem a correcção do erro, mas antes questionar e apontar pistas de acção futura, de modo a que seja o aluno a consegui-lo (Santos, 2002). Santos (2003) reforça algumas destas ideias, considerando que um *feedback* com funções reguladoras deve: (a) ser claro, para que possa ser compreendido, autonomamente, pelo aluno; (b) apontar pistas de acção futura, que levem o aluno a prosseguir; (c) incentivar o aluno a reanalisar a sua resposta; (d) não incluir a correcção do erro, permitindo que o aluno o identifique e corrija e, assim, aconteça uma aprendizagem mais duradoura; e (e) identificar o que está bem feito, para que esse saber seja conscientemente reconhecido e a autoconfiança do aluno seja promovida.

A orientação dada pelo professor pode ser oral ou escrita e apresentar-se sob a forma de comentários com sugestões ou questões reflexivas, mas para que estas intervenções contribuam para o desenvolvimento da capacidade de auto-avaliação dos alunos, devem acontecer de forma continuada, promover uma postura de reflexão e auto-questionamento nos alunos e não incluir juízos de valor sobre o seu desempenho. “A estratégia que escolheste é adequada, mas deves procurar usar uma linguagem menos confusa. Porque não escreves ... em vez de ...?”; “Experimenta com outros valores e analisa os resultados obtidos. O que concluis?”; “Porque pensaste assim?”; “Donde te

surgiu esta ideia?” ou “Em que outras situações é que este processo se poderia aplicar?” são exemplos de intervenções que cumprem esses requisitos (Santos, 2002).

Os critérios de avaliação, por sua vez, desempenham um papel central no processo de auto-avaliação, uma vez que esta se desenvolve mediante um determinado referencial de padrões, valores ou critérios. Os critérios de realização de uma tarefa permitem que o sujeito compare a sua acção com o que é pretendido e, se necessário, implemente estratégias de correcção dessa acção, para obter sucesso na realização da tarefa (Silva, 2004). A apropriação dos critérios de avaliação é, portanto, essencial ao processo de auto-avaliação e de auto-regulação das aprendizagens e cabe ao professor facilitar essa apropriação pelos alunos. De acordo com Santos (2002), o professor deve começar por definir e explicitar, para si próprio, que critérios considera na avaliação da tarefa em causa e, posteriormente, partilhar esses critérios com os alunos. Esta partilha deve, preferencialmente, envolver os alunos no aperfeiçoamento e/ou completude dos critérios, através de um processo de negociação, e deve ser feita recorrendo a uma linguagem acessível aos alunos, para que possam compreender o que é esperado deles. No sentido de promover o desenvolvimento da capacidade de auto-avaliação dos alunos, o professor deve ainda recorrer a instrumentos de avaliação alternativos aos testes tradicionais (Santos, 2002). Concretamente, os testes em duas fases, os relatórios escritos e os portefólios são exemplos de instrumentos com potencialidades no desenvolvimento da auto-avaliação dos alunos (Pinto & Santos, 2006).

Avaliar para promover o raciocínio matemático

Conforme já referimos, o desenvolvimento do raciocínio matemático não é um processo isento de dificuldades, cabendo ao professor proporcionar contextos favoráveis ao seu desenvolvimento. Para além disso, a capacidade do aluno raciocinar matematicamente deve ser avaliada, não só para o professor gerir o seu ensino de modo a facilitar a aprendizagem do aluno, mas também para o próprio aluno tomar consciência e regular o seu processo de aprendizagem. Neste contexto é legítimo questionarmo-nos como poderemos, enquanto professores, avaliar e simultaneamente promover o desenvolvimento da capacidade de raciocínio matemático dos alunos.

De acordo com o que foi atrás referido, as investigações e os problemas constituem contextos favoráveis à promoção do raciocínio matemático. Um instrumento geralmente associado à avaliação de actividades de aprendizagem dessa natureza é o relatório

escrito². Ao fazer apelo à articulação de ideias, à explicação de procedimentos, à fundamentação e à análise crítica dos processos utilizados e dos resultados obtidos, o relatório escrito privilegia aspectos relacionados, não só, com o conhecimento e compreensão de conceitos e processos, mas também com o desenvolvimento de capacidades como a comunicação e o raciocínio matemáticos, a reflexão, o espírito crítico e, ainda, o sentido de responsabilidade e a perseverança (Leal, 1992; Abrantes, Leal, Teixeira & Veloso, 1997; Menino, 2004; Nunes, 2004; Dias, 2005).

Apresentamos, de seguida, um exemplo de implementação do relatório escrito, enquanto instrumento de avaliação reguladora das aprendizagens e, em particular, como promotor do raciocínio matemático dos alunos. Este foi um trabalho desenvolvido numa turma do 8.º ano de escolaridade, no ano lectivo 2007/2008, no âmbito do Projecto AREA³. Ao longo do ano lectivo, foi proposta aos alunos a realização de vários relatórios a partir de tarefas de natureza diversa. Os relatórios a elaborar deviam estar organizados em três partes: introdução, desenvolvimento e conclusão. As duas primeiras partes foram realizadas em grupo, tal como as tarefas que deram origem aos relatórios, e a última parte foi realizada individualmente, incluindo a auto-avaliação do aluno. Com o intuito de potenciar a componente reguladora da avaliação, os relatórios foram elaborados em duas “fases”, isto é, uma primeira versão do relatório foi sujeita à leitura e ao comentário do professor e posteriormente os alunos elaboraram uma nova versão, a versão final, tendo em conta o *feedback* escrito recebido. De notar ainda que durante a actividade de elaboração de ambas as fases do relatório foi fornecido *feedback* oral aos alunos.

Dado que a modalidade de trabalho adoptada na realização do relatório constituiu uma novidade para a turma, foi fundamental a produção de um guião do relatório e a definição dos critérios de avaliação, através de indicadores. No sentido de promover a apropriação dos critérios de avaliação pelos alunos, os dois documentos (indicados respectivamente nos Anexos 1 e 2) foram discutidos com os alunos no início do ano lectivo. Mais do que isso, os critérios de avaliação foram negociados, envolvendo-se os alunos no seu aperfeiçoamento.

² Um relatório escrito pode ser entendido como uma produção que descreve, analisa e/ou critica uma dada situação ou tarefa realizada.

³ O Projecto AREA é um projecto de investigação, financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia (nº PTDC/CED/64970/2006), que procura desenvolver, implementar e avaliar formas de concretização de práticas avaliativas ao serviço da aprendizagem, assim como construir um banco de bibliografia relativa à avaliação reguladora. Para mais informações pode ser consultado o site <http://area.fc.ul.pt/>.

Ao longo do ano verificou-se uma evolução nos relatórios elaborados. Os alunos passaram progressivamente a melhor descrever e explicar as estratégias utilizadas na realização de cada tarefa e a fundamentar os resultados obtidos. A esse nível, foram também visíveis melhorias significativas da primeira para a segunda versões dos relatórios. Apresentamos de seguida dois exemplos que ajudam a perceber esta evolução, nomeadamente da primeira para a segunda fase. Ambos os exemplos dizem respeito a um grupo de quatro alunos que trabalhou em conjunto na elaboração dos relatórios.

Na primeira tarefa (que deu origem ao primeiro relatório) foi proposta aos alunos uma investigação de possíveis generalizações do Teorema de Pitágoras, sendo-lhes pedido que relembassem a relação existente entre as áreas dos quadrados construídos sobre os lados de um triângulo rectângulo e que investigassem o que acontece se construíssem outras figuras geométricas sobre os lados de um triângulo rectângulo. Devido à natureza da tarefa, o grupo foi chamado a formular e testar conjecturas e a justificar ideias, relativamente à relação estudada, apelando-se, assim, à sua capacidade de raciocinar matematicamente.

No relatório, o grupo explicou como procedeu na exploração da primeira situação proposta na tarefa, relativa a triângulos equiláteros construídos sobre os lados de um triângulo rectângulo. Na versão inicial, o grupo descreveu como fez para construir os triângulos equiláteros e referiu que determinou as áreas desses triângulos:

Realizámos a primeira tarefa proposta, começámos por fazer um triângulo rectângulo, com ajuda do compasso fizemos à volta (nas extremidades do triângulo rectângulo) três triângulos equiláteros, porque com a régua não obtínhamos triângulos equiláteros nem uma boa apresentação gráfica. Determinámos a área dos triângulos.

A justificação do recurso ao compasso surgiu na sequência de algum *feedback* oral fornecido durante a elaboração do relatório, o que sugere que esse *feedback* ajudou os alunos a fundamentar as suas opções:

Rute: Nós pusemos assim: com a ajuda do compasso, fizemos à volta três triângulos equiláteros. Depois podemos pôr... ah...

Professor: Porque é que pegaram no compasso?

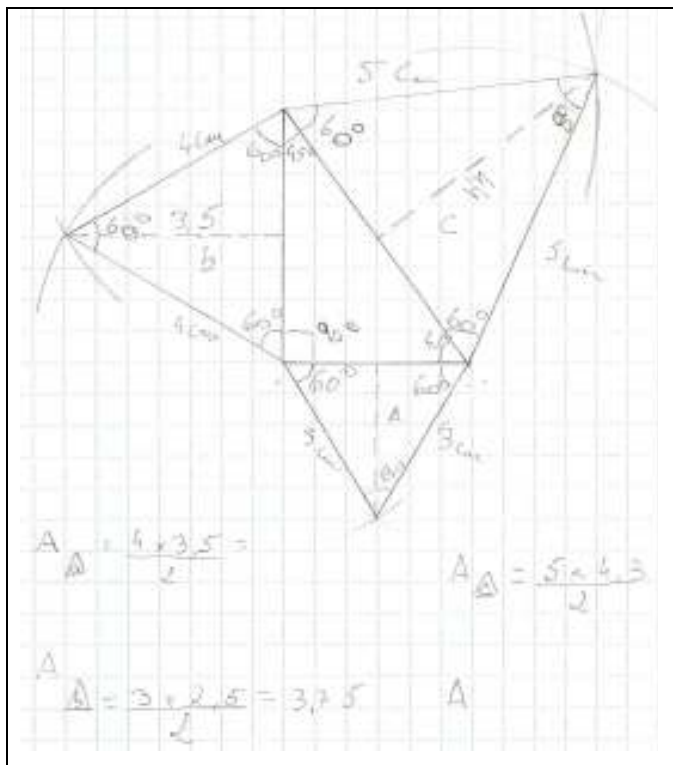
Rute: Porque não conseguíamos realizar a tarefa só com a régua.

Professor: Então, não conseguias desenhar um triângulo só com a régua?

Rute: Sim, mas para o triângulo ser equilátero tinha que ter os lados todos iguais.

Numa folha anexa, o grupo apresentou ainda a construção referente aos triângulos equiláteros, bem como os valores da base e da altura considerados em cada triângulo equilátero, para determinar a área correspondente. Apresentou, também, os cálculos a efectuar para determinar as áreas pretendidas (ver Figura 1).

Porém, os alunos não explicaram, em parte alguma do relatório, como procederam para encontrar os comprimentos das bases e das alturas respectivas, nem que

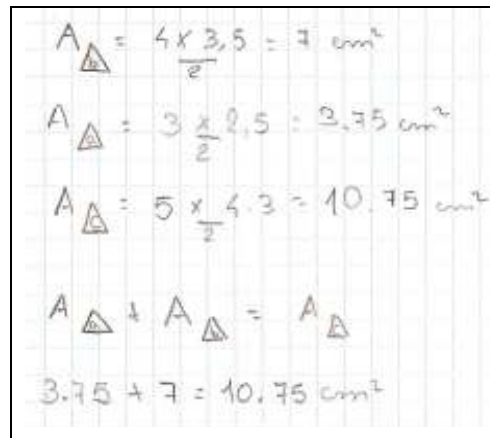


conclusões obtiveram a partir das áreas apresentadas. Para a segunda fase, foi, então, fornecido algum *feedback* escrito. Relativamente à descrição apresentada, foram feitos dois comentários distintos. Por um lado, foram elogiados o recurso ao compasso e a justificação dessa opção: “Fizeram uma excelente opção. Boa forma de responderem a um problema que tiveram de ultrapassar”. Através desta intervenção foram, assim, identificados aspectos positivos no relatório, para que esse saber fosse conscientemente reconhecido e a autoconfiança dos alunos fosse promovida (Santos, 2003). Por outro lado, o grupo foi questionado relativamente ao que concluiu através da determinação da área dos triângulos considerados: “E o que concluíram?”. Foram, ainda, colocadas algumas questões junto da construção dos triângulos, que procuraram orientar o trabalho dos alunos no sentido de incluírem no relatório a informação em falta: “Como chegaram a estes valores? O que concluíram com as áreas apresentadas? Que relação tiraram?”.

Na segunda fase, os alunos mantiveram a descrição que fora elogiada e procuraram dar resposta às questões colocadas, explicando com mais pormenor como procederam, nomeadamente para encontrar os valores da base e da altura e determinar a área correspondente em cada um dos triângulos equiláteros, e que conclusões obtiveram para a primeira situação explorada:

Determinámos a área dos triângulos, sabemos que para achar a área dum triângulo: $\frac{base \times alt}{2}$, medimos a altura e a base, multiplicámos e de seguida dividimos por 2 (e assim para os três triângulos). Concluímos que a soma da área A e área B é igual à área C.

Na folha anexa, na versão final, os alunos, baseando-se na figura da primeira fase, determinaram e identificaram correctamente o valor da área de cada um dos triângulos considerados (ver Figura 2) e explicitaram a relação encontrada entre as áreas dos triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo rectângulo: “A soma da área A e área B é



Handwritten calculations on grid paper:

$$A_{\triangle} = \frac{4 \times 3,5}{2} = 7 \text{ cm}^2$$

$$A_{\triangle} = \frac{3 \times 2,5}{2} = 3,75 \text{ cm}^2$$

$$A_{\triangle} = \frac{5 \times 4,3}{2} = 10,75 \text{ cm}^2$$

$$A_{\triangle} + A_{\triangle} = A_{\triangle}$$

$$3,75 + 7 = 10,75 \text{ cm}^2$$

equivalente à área C”. Além disso, acrescentam uma observação, onde identificam os aspectos negativos da primeira versão, que são então melhorados. São os próprios alunos a identificar e a corrigir os erros cometidos: “Observação (da 1ª fase): Não apresentámos o valor das áreas, trocamos as contas e não apresentamos conclusões”.

Na segunda tarefa (que deu origem ao segundo relatório) foi proposta aos alunos a resolução de um problema, envolvendo a aplicação do Teorema de Pitágoras, no espaço. Concretamente, foi-lhes pedido que construíssem um cone a partir de um dos três sectores iguais de um círculo, com um raio de seis centímetros, e de seguida determinassem a altura do cone assim construído. Foi, ainda, pedido que explicassem como procederiam para determinar a altura do cone obtido, partindo de um círculo com um raio r qualquer. Devido à natureza da tarefa, apelou-se, maioritariamente, às capacidades de resolução de problemas e de raciocínio matemático, além da aplicação e compreensão de alguns conceitos, procedimentos e resultados matemáticos.

No relatório, os alunos explicaram como procederam para construir os cones e procuraram fundamentar as suas acções. Em particular, explicaram como determinaram o ângulo de cada um dos três sectores circulares:

Começámos por ler a tarefa e responder ao que nos foi questionado. Desenhámos um círculo, com raio de 6 cm. Para dividirmos o ângulo em três partes iguais sabemos que o seu ângulo mede 360° (logo $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$).

Com ajuda do transferidor medimos sobre o raio 120° três vezes e unimos os pontos e obtivemos 3 partes iguais. De seguida cortámos as três partes, com ajuda da fita-cola formámos três cones.

De seguida, os alunos apresentaram a estratégia implementada para determinar a altura dos cones. Antes de passarem à resolução propriamente dita, fizeram uma breve descrição de como o grupo abordou o problema, referindo que os vários elementos trocaram ideias entre si e que surgiram algumas dificuldades, que procuraram ultrapassar com a ajuda de um dos professores. Depois, determinaram o perímetro do círculo original, o perímetro da base do cone e, por fim, o raio da base do cone, apresentando os cálculos necessários (ver Figura 3).

$$\begin{array}{l}
 2\pi r = \text{perímetro do círculo} \\
 2\pi r = 37,68 \\
 \frac{\text{Perímetro}}{2\pi} = \text{raio} \\
 \frac{37,68}{2\pi} = 6
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 2\pi R = \text{perímetro da base} \\
 2\pi R = 12,56 \\
 \frac{\text{Perímetro da base}}{2\pi} = \text{raio} \\
 \frac{12,56}{2\pi} = 1,9
 \end{array}$$

Porém, não explicaram ou fundamentaram os cálculos apresentados, não distinguiram os dois círculos referenciados (o original e a base do cone), nem apresentaram unidades de medida. Foi, portanto, fornecido *feedback* escrito com o intuito de alertar os alunos para esses aspectos: “Para que fizeram estes cálculos? Referem o perímetro do círculo várias vezes. Talvez fosse melhor distinguirem em cada situação de que círculo estão a falar. Atenção à falta de unidades de medida”. A importância dos alunos explicarem e fundamentarem os cálculos foi ainda reforçada através do *feedback* oral:

- Professor: “(...) devem procurar explicar melhor os cálculos apresentados e para que os fizeram”. Apresentaram estes cálculos, não foi? Porquê? Para quê? Quando? Como?
- Rute: O store também quer saber tudo!
- Professor: Quero saber tudo, não... Imagine que eu estou a dar a aula e escrevo uma coisa qualquer no quadro e pergunta-me “oh store, o que é aquilo” e eu digo-lhe “Também quer saber tudo”, não é?
- Rute: Oh store, mas aqui nós já sabemos que isto é o perímetro...
- Professor: Já sabem, mas têm que escrever o que quer dizer, eu não vou levar a Rute lá para casa para me explicar, não é?

Também se mostrou necessário complementar o *feedback* escrito, com novas pistas, de modo a que os alunos distinguíssem os círculos considerados na resolução:

- Rute: Stora, como é que vamos distinguir os círculos?
- Professora: Com que círculos é que trabalharam?
- Rute: Com o que tinha raio seis.
- Professora: Sim. E não trabalharam com mais nenhum?
- Rute: Com a base.
- Professora: A base?

Rute: Sim, do cone.

Professora: Então, no relatório, só têm que dizer a qual é que se estão a referir quando explicam o que fizeram.

Os alunos levaram em consideração o *feedback* recebido, quer oral quer escrito, e na versão final do relatório, além de acrescentarem as unidades de medida, descreveram como procederam para determinar o raio da base do cone, clarificando o contexto e com que objectivo foram realizados os cálculos apresentados e ainda identificando a que círculo se referem em cada caso:

Primeiro descobrimos o perímetro do círculo do problema. De seguida dividimos o perímetro do círculo do problema, em três partes iguais, e obtivemos o perímetro da base de um cone. Sabendo que para descobrir o perímetro do círculo é $2\pi r$, portanto para saber o raio é ao contrário, $P \div 2\pi = r$. E obtivemos 1,9 cm.

Ainda na primeira versão do relatório, os alunos procuraram descrever com detalhe o triângulo rectângulo considerado para determinar a altura do cone (ver Figura 4) e explicaram como descobriram o comprimento da hipotenusa (que eles designam por diagonal) desse triângulo:

Se desenharmos a altura do cone, ela vai coincidir com o raio formando um ângulo de 90° . Se nas extremidades das rectas desenharmos um segmento de recta irá formar um triângulo rectângulo e para o nosso bem era a diagonal que sabíamos quanto media.

Nós sabemos que a diagonal mede 6 cm porque a diagonal é o raio da circunferência se abrímos o cone e como o raio da circunferência é 6 cm, então ficámos a saber a diagonal.



Por fim, os alunos apresentaram os cálculos necessários para determinar a altura pretendida, mas não referiram de onde resulta a primeira igualdade usada ($\text{altura do cone}^2 = \text{diagonal}^2 - \text{raio}^2$). Foram, então, alertados para essa omissão através do *feedback* escrito: “Como chegaram a esta igualdade?”. Na versão final do relatório, os alunos tiveram em consideração o *feedback* recebido e referiram que utilizaram o Teorema de Pitágoras para determinar a altura do cone.

Os exemplos dados mostram as potencialidades do relatório escrito na avaliação do raciocínio matemático dos alunos e, ainda mais importante, na promoção do desenvolvimento dessa capacidade nos alunos, com especial destaque para a explicação e a argumentação matemáticas. Para este trabalho, mostrou-se essencial o *feedback* fornecido, quer oral, quer escrito.

A Concluir

Na situação concreta apresentada, utilizou-se uma modalidade de relatório realizada maioritariamente em grupo e em contexto de sala de aula, mas outras modalidades podem ser adoptadas: o relatório pode ser feito individualmente ou em grupo, na sala de aula ou fora dela, durante um período de tempo mais ou menos longo, a partir de tarefas variadas desenvolvidas de forma diversa. Qualquer que seja a modalidade adoptada é importante ter em conta dois aspectos centrais para que a actividade desenvolvida pelos alunos contribua para a sua aprendizagem e, em particular, para o desenvolvimento do seu raciocínio matemático: (i) os critérios de avaliação e o investimento na sua apropriação pelos alunos e (ii) o *feedback*, tanto oral como escrito, a fornecer durante o processo (Pinto & Santos, 2006; Santos & Gomes, 2006).

Se a elaboração de relatórios constitui uma experiência pouco familiar para o aluno, o professor deve promover uma discussão prévia sobre as suas expectativas face ao trabalho proposto e quais as razões que justificam tal proposta. Além disso, pode elaborar documentos de apoio para que o aluno melhor compreenda o que se entende por um relatório de qualidade. Como exemplos de documentos com essas funções, destacam-se documentos escritos que explicitem qual deve ser a estrutura do relatório ou quais os critérios que serão utilizados na avaliação do mesmo ou ainda relatórios produzidos por outros alunos (Pinto & Santos, 2006). O recurso ao guião e aos critérios de avaliação parece facilitar a tomada de consciência, pelos alunos, dos objectivos a atingir e das exigências inerentes à elaboração do relatório, caminhando-se, assim, em direcção à apropriação dos critérios de avaliação. Por sua vez, essa tomada de consciência gradual permitirá que os alunos ajam de forma a melhorar o seu desempenho na redacção dos relatórios (Semana, 2008). Além disso, se as indicações do professor e os critérios de avaliação definidos forem dados no sentido de incluir no relatório, explicações e justificações matemáticas para as opções tomadas, potenciar-se-á desse modo o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

A definição dos critérios de avaliação prende-se ainda com a própria avaliação dos relatórios. No contexto de uma avaliação reguladora das aprendizagens, o importante não é a classificação atribuída às produções dos alunos, mas antes a adequação dos critérios utilizados e a sua apropriação pelos alunos. Esses critérios servirão também para que os alunos auto-avaliem o seu trabalho e definam estratégias de melhoria.

O *feedback* escrito e o *feedback* oral desempenham também um papel fundamental no processo de avaliação reguladora implementado através dos relatórios, já que, numa

acção combinada, podem contribuir para que os alunos tomem consciência dos aspectos positivos e dos aspectos passíveis de ser melhorados na primeira versão dos relatórios e, em função disso e de algumas orientações recebidas, desenvolvam a sua actividade no sentido de aperfeiçoar a versão inicial. Para isso, parece essencial que o *feedback* não assinale os erros, mas coloque antes questões e comentários orientadores, fornecendo pistas relativamente àquilo que os alunos poderão fazer para melhorar a primeira produção, conforme ilustrado através dos dois exemplos apresentados. O recurso aos indicadores pode facilitar o processo de dar *feedback*, processo que, por norma, acarreta dificuldades para o professor, quer ao nível dos comentários a tecer, quer devido ao tempo que consome.

Além dos relatórios escritos, o professor tem à sua disposição uma variedade de formas e instrumentos de avaliação que pode utilizar nos contextos mais diversificados, não perdendo de vista a sua finalidade principal: potenciar a aprendizagem dos alunos e, neste caso específico, promover o desenvolvimento do raciocínio matemático. A discussão oral e a observação informais no quotidiano da sala de aula, as apresentações orais, os portefólios são apenas alguns exemplos de instrumentos que podem ser usados com o mesmo objectivo, desde que devidamente trabalhados e associados a tarefas que apelem ao raciocínio matemático dos alunos. Qualquer que seja o instrumento utilizado é importante acompanhá-lo de estratégias com funções reguladoras, como é o caso de uma abordagem positiva do erro, do questionamento oral, do *feedback* escrito e da negociação dos critérios de avaliação. Não defendemos aqui a necessidade de criação de momentos específicos de avaliação do raciocínio matemático. É através de tarefas adequadas, especialmente pensadas para desenvolver o raciocínio matemático, que podemos contribuir para o crescimento desta capacidade nos alunos e, em simultâneo, ajudá-los nesse processo, através de práticas avaliativas como as descritas. Para além disso, estes momentos permitem ao professor aceder e compreender o raciocínio matemático dos seus alunos, as evoluções que se vão operando, as dificuldades com que se confrontam e o modo como as procuram ultrapassar, aspectos possíveis de serem inferidos a partir da observação dos alunos em trabalho e da análise das suas produções (Perrenoud, 2004).

Referências Bibliográficas

Abrantes, P.; Leal, L.; Teixeira, P. & Veloso, E. (1997). *Mat789, Inovação Curricular em Matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

- Boavida, A. M.; Paiva, A. L.; Cebola, G.; Vale, I.; Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico. Programa de formação contínua em matemática para professores dos 1.º e 2.º ciclos*. Lisboa: Ministério da Educação - DGIDC.
- Cuoco, A. (2003). Mathematical habits of mind. In H. Schoen (Ed.), *Teaching mathematics through problem solving: grades 6-12* (pp. 27-37). Reston, VA: NCTM.
- Dewey, J. (1910/1997). *How we think*. New York: Dover Publications, Inc.
- Dias, P. (2005). *Avaliação reguladora no Ensino Secundário. Processos usados pelos alunos em investigações matemáticas*. (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).
- Leal, M^a. L. (1992). *Avaliação da aprendizagem num contexto de inovação curricular*. (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).
- Menino, H. (2004). *O relatório escrito, o teste em duas fases e o portefólio como instrumentos de avaliação das aprendizagens em Matemática: um estudo no 2º ciclo do ensino básico* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).
- NCTM. (1999). *Normas para a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM (publicado originalmente em inglês em 1995).
- NCTM (2003). *A research companion to principles and standards for school mathematics*. Reston: NCTM.
- NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM (publicado originalmente em inglês em 2000).
- Nunes, C. (2004). *A avaliação como regulação do processo de ensino-aprendizagem da Matemática*. (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).
- Perrenoud, P. (1999). *Construir as competências desde a escola*. Porto Alegre: Artes Médicas Sul.
- Perrenoud, Ph. (2004). Évaluer des competences. *l'Éducateur*, n° spécial, Março, 8-11.
- Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. e Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.
- Pinto, J. & Santos, L. (2006). *Modelos de avaliação das aprendizagens*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: porquê, o quê e como? In P. Abrantes & F. Araújo (Coord.) *Avaliação das aprendizagens: das concepções às práticas* (pp. 75-84). Lisboa: ME e DEB.
- Santos, L. (2003). Avaliar competências: uma tarefa impossível? *Educação e Matemática*, 74, 16-21.
- Santos, L. & Gomes, A. (2006). Apropriação de critérios de avaliação: um estudo com alunos do 7º ano de escolaridade. *Revista portuguesa de pedagogia*, 40(3), 11-48.
- Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes; L. Santos; H. Gomes & C. Rodrigues (Eds.), *Avaliação em Matemática: Problemas e desafios* (pp. 11-35). Viseu: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.
- Semana, S. (2008). *Os relatórios escritos como instrumentos de avaliação reguladora das aprendizagens dos alunos do 8.º ano de escolaridade em Matemática*. (Tese de mestrado em preparação, Universidade de Lisboa).
- Silva, A. L. (2004). A auto-regulação na aprendizagem. In A. L. Silva; A. M. Duarte; I. Sá & A. M. V. Simão (Ed.) *Aprendizagem Auto-Regulada pelo Estudante* (pp.17-39). Porto: Porto Editora.

Anexo 1 – Guião de elaboração do relatório

Um relatório é um trabalho escrito que descreve e critica toda a actividade desenvolvida na exploração de uma tarefa.

Um relatório para quê?

Desenvolver a tua capacidade de comunicar matematicamente, por escrito.

Desenvolver o teu pensamento crítico sobre o trabalho feito.

Contribuir para aprofundar a tua compreensão sobre os vários assuntos estudados.

Pistas para elaborares um relatório:

- tira apontamentos durante a realização da tarefa;
- descreve o que fizeste de uma forma limpa, clara e organizada;
- não te esqueças de apresentar os teus raciocínios e descobertas e descrever todas as tentativas que realizaste até chegar às conclusões finais, não debes pensar “o professor já sabe isto, por isso não vale a pena eu escrever”;
- identifica devidamente o teu relatório;
- estrutura o relatório em introdução, desenvolvimento e conclusão.

Neste ano lectivo, as tarefas vão ser exploradas em grupo e o relatório vai ser dividido em duas partes: a primeira será feita em grupo e deve incluir a introdução e o desenvolvimento do relatório e a outra será feita individualmente e deve compreender a conclusão.

▪ **Introdução** (realizada em grupo)

Apresentem a tarefa proposta e indiquem qual o seu objectivo, usando as vossas próprias palavras. Indiquem os materiais utilizados.

▪ **Desenvolvimento** (realizada em grupo)

Relatem os passos do trabalho realizado, explicando como pensaram e as estratégias usadas.

Descrevam as dificuldades sentidas e como as ultrapassaram.

Apresentem as conclusões obtidas, devidamente fundamentadas.

Podem recorrer a tabelas, representações gráficas ou esquemas.

▪ **Conclusão** (realizada individualmente)

Faz um comentário global sobre o trabalho desenvolvido.

Auto-avalia o teu trabalho.

Resume o que aprendeste.

Comenta o interesse da tarefa.

Para a elaboração do relatório debes recorrer aos critérios de avaliação, para que possas perceber melhor o que é esperado que faças neste trabalho.

Anexo 2 – Critérios de avaliação / auto-avaliação do relatório

O grupo...

	0	1	2	3
Apresentação do Relatório	<p>...não respeita a estrutura proposta.</p> <p>...comete muitos erros ortográficos e/ou apresenta uma construção frásica muito deficiente, dificultando a compreensão do que está escrito.</p> <p>...apresenta o relatório muito rasurado e sujo.</p>	<p>...não respeita grande parte da estrutura proposta.</p> <p>...comete erros ortográficos e, por vezes, apresenta uma construção frásica incorrecta, mas a compreensão do que está escrito não é dificultada.</p> <p>...apresenta o relatório limpo e sem muitas rasuras.</p>	<p>...respeita em grande parte a estrutura proposta.</p> <p>...utiliza correctamente a língua portuguesa, de uma maneira geral.</p> <p>...apresenta o relatório limpo e sem muitas rasuras.</p>	<p>...respeita completamente a estrutura proposta.</p> <p>...utiliza correctamente a língua portuguesa, de uma maneira geral.</p> <p>...apresenta o relatório limpo e sem rasuras.</p>

	0	1	2	3
Recurso a Estratégias e Processo de Exploração	<p>...não apresenta estratégias apropriadas.</p> <p>...não apresenta um processo de exploração ou apresenta um processo de exploração totalmente desadequado.</p>	<p>...apresenta estratégias apropriadas.</p> <p>...apresenta um processo de exploração pouco organizado e muito incompleto.</p>	<p>...apresenta estratégias apropriadas.</p> <p>...apresenta um processo de exploração organizado e quase completo.</p>	<p>...apresenta estratégias apropriadas.</p> <p>...apresenta um processo de exploração metódico e completo.</p>

	0	1	2	3
Mobilização de informação/ conhecimentos	<p>...não recorre a informações/ conhecimentos essenciais à exploração da tarefa.</p>	<p>...reconhece informações/ conhecimentos essenciais à exploração da tarefa, mas não os aplica adequadamente.</p>	<p>...reconhece informações/ conhecimentos essenciais à exploração da tarefa e aplica-os correctamente, em grande parte.</p>	<p>...reconhece e aplica adequadamente informações/ conhecimentos essenciais à exploração da tarefa.</p>

	0	1	2	3
Descrição e Explicação da Actividade Desenvolvida (Comunicação)	...não descreve os passos do trabalho realizado nem a forma como os seus elementos pensaram.	...descreve parcialmente os passos do trabalho realizado e a forma como os seus elementos pensaram.	...descreve e explica todos os passos do trabalho e a forma como os seus elementos pensaram, incluindo as tentativas feitas e as conclusões obtidas.	...descreve e explica todos os passos do trabalho e a forma como os seus elementos pensaram, incluindo as tentativas feitas e as conclusões obtidas.
	...não descreve nem explica as conclusões obtidas.	...descreve as conclusões obtidas, mas não as explica na totalidade.	...descreve as conclusões obtidas, mas não as explica na totalidade.	...descreve as conclusões obtidas, e explica-as na totalidade.

	0	1	2	3
Linguagem Matemática Escrita	...não utiliza linguagem matemática.	...utiliza linguagem matemática com imprecisões.	...utiliza linguagem matemática, com pequenas imprecisões.	...utiliza linguagem matemática revelando um bom conhecimento sobre as relações entre os termos e conhecimentos usados.

Eu, individualmente,...

	0	1	2	3
Reflexão Crítica Sobre a Actividade Desenvolvida	...não saliento as ideias centrais da actividade e/ou referi ideias não relacionadas com a actividade.	...apresento ideias relacionadas com a actividade, mas não destaco as essenciais.	...apresento as ideias centrais da actividade.	...resumo as ideias centrais da actividade, de forma clara.
	...não dou uma opinião sobre a actividade desenvolvida.	...dou uma opinião sobre a actividade desenvolvida, mas não a justifico.	...comento a actividade desenvolvida.	...comento a actividade desenvolvida.
	...não avalio o meu trabalho.	...não avalio o meu trabalho.	...avalio o meu trabalho, fazendo uma reflexão crítica sobre o meu desempenho no grupo e explicando as principais dificuldades que senti.	...avalio o meu trabalho, fazendo uma reflexão crítica sobre o meu desempenho no grupo, explicando as principais dificuldades que senti e identificando aspectos a melhorar.